Для определения области частот, где для волн типа изгиба выполняется условие излучения, разложим дисперсионное уравнение (12) по степеням k вблизи точек $k=0$ и ограничимся членами порядка k^2. Тогда получим

$$k^2 = \frac{2}{1-\sigma} n^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h^2}{12} \frac{n^2}{R^2} \frac{(n^2-1)}{R^2} \right). \tag{13}$$

Частотная область излучения определяется из условия

$$\frac{2}{1-\sigma} n^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h^2}{12} \frac{n^2}{R^2} \frac{(n^2-1)}{R^2} \right) - k_{\text{ср}}^2 < 0. \tag{14}$$

Частоты, удовлетворяющие условию (14), являются околорезонансными частотами поперечных резонансов. Амплитуды колебаний на этих частотах при постоянных силах резко возрастают.

В заключение следует отметить, что звуковое поле замкнутой цилиндрической оболочки на низких частотах $\frac{\omega}{c} R \ll 1$, по-видимому, обусловлено изгибными волнами и вибродемпфирование, бесполезное для продольных и сдвиговых волн, даст существенный эффект в снижении вибраций и звукового поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Коненков, Р. Н. Михайлов. О нормальных волнах в полосе с поперечной кривизной. Акуст. ж., 1968, 14, 1, 72—77.
2. Р. Н. Михайлов. О распространении и затухании нормальных волн в замкнутой цилиндрической оболочке. Сб. «Вибрации и шумы». М., «Наука», 1969, 35—43.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступило в редакцию
28 августа 1969 г.

УДК 534.222.2

О ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, ИЗЛУЧАЕМОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КАВЕРНОЙ, В ПРИБЛИЖЕНИИ КИРКВУДА — БЕТЕ

В. П. Морозов

При решении некоторых задач нелинейной акустики, например, для расчета волн, образующихся при замыкании кавитационных полостей, или при электрическом разряде в жидкости находит применение гипотеза Кирквуда — Бете [1], позволяющая решить задачу в более высоком приближении, нежели акустическое или квазиакустическое. Гипотеза Кирквуда — Бете представляет собой пример эвристического подхода к решению задачи. Представления, положенные в ее основу, являются в значительной мере интуитивными, в силу этого погрешность решения не может быть оценена аналитически, например, путем оценки порядка величины отброшенных членов, и чтобы судить о границах ее применимости необходимо сопоставление с точным решением.

Возможность расчета движения стенки пузырька по Кирквуду и Бете была показана путем сопоставления точного и приближенного решения в работах [2, 3]. В данной работе найдена погрешность расчета волны сжатия, которая накапливается как вследствие приближенного определения движения границы пузырька, так и из-за приближенного характера расчета поля скоростей и давлений вокруг него. Приближенный расчет по Кирквуду — Бете сравнивается с результатом численного интегрирования точных уравнений [2]. Закон движения стенки каверны определялся из уравнения

$$R\frac{dU}{dt}\left(1-\frac{U}{c}\right)+\frac{3}{2}U^2\left(1-\frac{U}{3c}\right)=H\left(1+\frac{U}{c}\right)+\frac{R}{c}\frac{dH}{dt}\left(1-\frac{U}{c}\right), \tag{1}$$

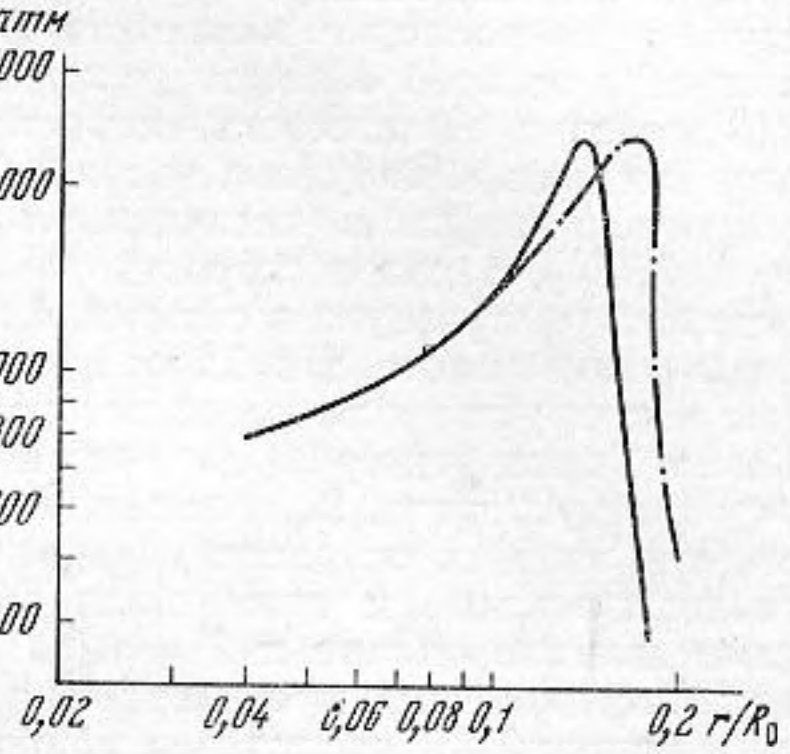
справедливого в рамках гипотезы Кирквуда — Бете [3]. Предполагалось, что давление внутри каверны P изменяется по адиабатическому закону: $P = P_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4,2}$.

Подробности расчета замыкания сферической каверны можно найти в работе [3]. Решение уравнения (1) позволяет получить начальные условия для расчета излучаемой волны, т. е. значения P, U, R для последовательных моментов времени на границе каверны. Расчет излучаемой волны в приближении Кирквуда — Бете сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{R(H + {}^1/_2U^2)(u+c)}{r^2(c-u)} - \dfrac{2c^2u}{r(c-u)} & (2) \\ \dfrac{dr}{dt} = c + u & (3) \end{cases}$$

при начальных условиях, заданных на границе каверны; начальные значения переменных обозначены прописными буквами. Уравнение (3) представляет собой уравнение характеристик, начинающихся на границе раздела. Совместно с системой уравнений (2) — (3) решается алгебраическое уравнение:

$$r\left[h(p) + \frac{u^2}{2}\right] = R\left[H(P) + \frac{U^2}{2}\right]. \quad (4)$$



Система уравнений (2), (3), (4), представляющая собой математическую формулировку гипотезы Кирквуда — Бете, была проинтегрирована численно; распределение давления вокруг каверны в фиксированный момент времени представлено на фигуре как функция безразмерного радиуса r/R_0, где R_0 — максимальный размер каверны. Там же пунктиром нанесена кривая, заимствованная из работы [2], рассчитанная для тех же условий замыкания каверны численным интегрированием точных уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости. Обе кривые сходятся при $r \simeq 0{,}04R_0$, где в данный момент времени находится граница раздела; давление в этой точке равно давлению внутри каверны. Сравнивая кривые, можно видеть, что приближенный расчет преуменьшает путь, пройденный волной к данному моменту времени от источника. Если сопоставлять не пространственное распределение давления в фиксированный момент времени, а изменение давления со временем в фиксированной точке пространства, т. е. совместить с учетом сферического расхождения вершины волн, показанных на фигуре, то максимальная разница между точным и приближенным расчетом, соответствующая прохождению вершины волны, будет около 12%.

Погрешность приближенного метода растет по мере увеличения интенсивности волны и отношения p/B, где B — характерная для воды константа, равная 3000 *атм.* Характеристика (3), соответствующая вершине волны, начинается на границе каверны в момент времени, когда ее радиус доходит до минимума, а давление внутри нее максимально. В данном случае оно равнялось, примерно, 20 000 *атм.* Фигура позволяет судить о максимальной погрешности, накопившейся к моменту, когда приходится прекращать решение из-за образования в волне разрыва. При промежуточных положениях волны эта погрешность меньше. В итоге можно видеть, что допуская погрешность в определении давления в вершине до 15%, можно использовать гипотезу Кирквуда — Бете для расчета сферических волн конечной амплитуды вплоть до начальных давлений порядка 20 000 *атм.* Этому давлению в нашей задаче соответствовало максимальное число Маха: $M = \dfrac{U_{\max}}{c}$ порядка 0,4 и $R_{\min} \simeq 0{,}018R_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Коул. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.
2. R. Hickling, M. S. Plesset. Collapse and rebound of a spherical bubble in water. The Phys. Fluid., 1964, 7, 1, 7—14.
3. В. К. Кердинский. Особенности динамики сферического газового пузырька в жидкости. Пр. мат. и теор. физ., 1967, 3, 120—125.
4. F. R. Gilmore. The growth or collapse of a spherial bubble in a viscous compressible liquid. Proceedings of the Heat Transfer and fluids mechanics institute held at the university of California, 1952, 345—361.
5. В. П. Морозов. Акустическое излучение при замыкании кавитационного пузырька. Тр. НТО Судпрома, Ленинград, 1968, 106, 117—124.

Московский физико-технический институт

Поступило в редакцию 23 июля 1969 г.