АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 4

УДК 534

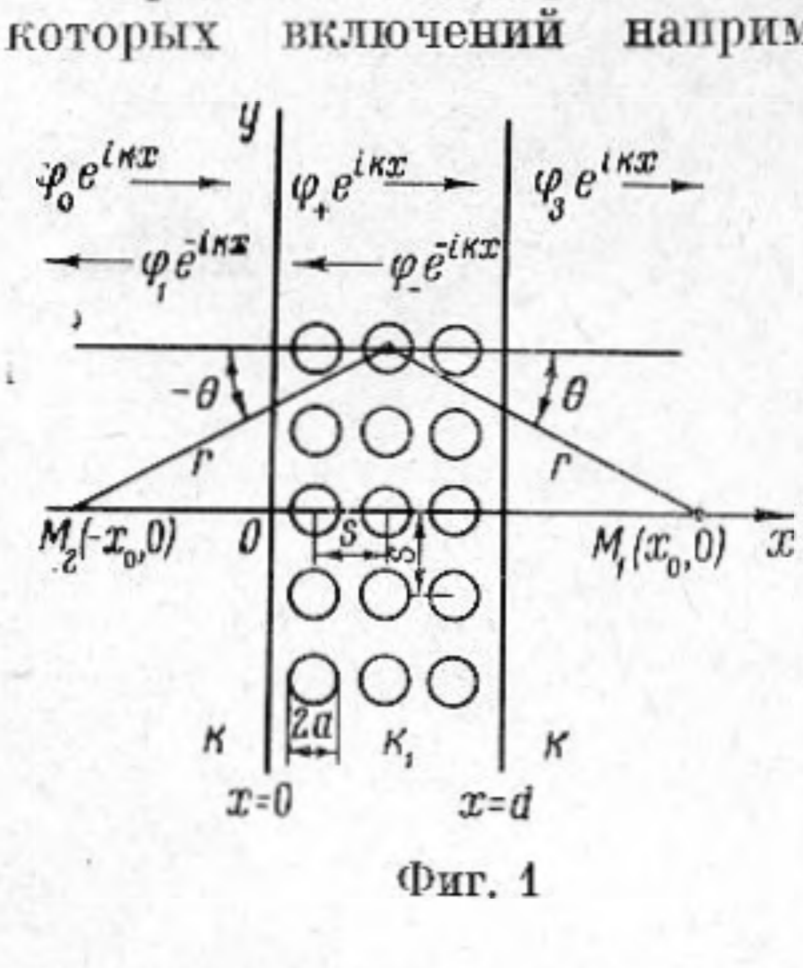
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛОКНА

В. Н. Кожин

Разработана теория для нахождения эффективных параметров (постоянной распространения и плотности) в вязкой среде, содержащей цилиндрические волокна. На основании выражений для потенциалов монопольной и дипольной составляющих поля, рассеянного на цилиндре, свободно висящем в вязкой среде при падении на него плоской звуковой волны, найдены формулы для расчета эффективных параметров. Показано, что действительная часть постоянной распространения представляет собой фазовую скорость звука в неоднородной среде, а мнимая — амплитудный коэффициент поглощения звука в неоднородной среде. Приведены результаты численных расчетов.

Для случая падения плоской волны на однородный слой заданной толщины, расположенный в некоторой однородной среде, которую мы в дальнейшем будем называть «содержащей», взаимосвязь между амплитудами падающей, отраженной и прошедшей волнами может быть легко установлена.

Представим теперь, что этот слой составлен из содержащей среды и некоторых включений например, цилиндрически волокон (цилиндров). Отличие параметров такого неоднородного слоя от параметров содержащей среды можно трактовать как результат рассеяния волны на включениях.



Фиг. 1

Суммируя прямо и обратно рассеянные волны от всех включений в слое, можно найти отраженную и прошедшую волны. Тогда эффективные параметры неоднородного слоя (постоянную распространения и плотность) можно определить как если бы этот слой был «однородным» и имел бы такие же по амплитуде и фазе отраженную и прошедшую волны.

Вообще говоря, не очевидно, что это всегда можно сделать. Действительно, если размеры включений сравнимы с длиной волны в содержащей среде (при отсутствии включений), то свойства такой неоднородной среды слишком сложны, чтобы их можно было описывать двумя постоянными, как в случае однородной среды.

Однако в случае малых размеров включений, которым мы здесь ограничимся, эффективные параметры неоднородного слоя (среды) могут быть найдены.

Итак, рассмотрим слой толщины d, мысленно выделенный в какой-либо однородной среде, содержащий одинаковые цилиндры радиуса a, оси которых параллельны поверхности слоя и отстоят друг от друга на расстоянии s (см. фиг. 1). Пусть нормально к поверхности слоя падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x.

Считая, что этот неоднородный слой можно заменить «однородным» с некоторыми эффективными параметрами, введем следующие обозначения (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду подразумевается): $\varphi_0 \exp(ikx)$ — падающая волна, $\varphi_1 \exp(-ikx)$ — отраженная от слоя волна, $\varphi_+ \exp(ikx)$, $\varphi_- \exp(-ikx)$ — прямая и обратная волны в слое соответственно, $\varphi_3 \exp(ikx)$ — прошедшая волна, k, ρ — постоянная распространения и плотность содержащей среды, k_1, ρ_1 — эффективные постоянная распространения и плотность неоднородного слоя.

Граничные условия постоянства давлений и скорости на поверхности слоя имеют вид

при $x = 0$

$$\varphi_0 + \varphi_1 = A(\varphi_+ + \varphi_-), \quad \varphi_0 - \varphi_1 = B(\varphi_+ - \varphi_-);$$

при $x = d$

$$A(\varphi_+ e^{ik_1 d} + \varphi_- e^{-ik_1 d}) = \varphi_3 e^{ik_1 d}, \quad B(\varphi_+ e^{ik_1 d} - \varphi_- e^{-ik_1 d}) = \varphi_3 e^{ik_1 d},$$

где $A = \rho_1 / \rho$, $B = k_1 / k$ — некоторые постоянные.

Если $kd \ll 1$, $k_1 d \ll 1$, то в последних двух выражениях можно пренебречь степенями kd и $k_1 d$ выше первых:

$$ik_1 d(A / B)(\varphi_0 - \varphi_1) = \varphi_3 + \varphi_3\, ikd - \varphi_0 - \varphi_1, \tag{1}$$

$$ik_1 d(B / A)(\varphi_0 + \varphi_1) = \varphi_3 + \varphi_3\, ikd - \varphi_0 + \varphi_1. \tag{2}$$

Если число цилиндров на единицу площади, перпендикулярной осям цилиндров, не слишком велико, а радиусы цилиндров малы, то параметры такой неоднородной среды * не будут сильно отличаться от параметров содержащей среды. Исходя из этого, следует считать, что отношения ρ_1 / ρ, k_1 / k, A / B по величине имеют порядок единицы.

Тогда, пренебрегая в уравнениях (1) или (2) степенями kd и $k_1 d$ выше нулевых, легко показать, что φ_1 по порядку величины равно $\varphi_3 - \varphi_0$. Вычитая эти два уравнения, получим, что φ_1 порядка $\varphi_0 ikd$ по величине. Учитывая все это, перепишем уравнения (1) и (2) в виде

$$ik_1 d(A / B)\varphi_0 = \varphi_3 + \varphi_0\, ikd - \varphi_0 - \varphi_1, \quad ik_1 d(B / A)\varphi_0 = \\ = \varphi_3 + \varphi_0\, ikd - \varphi_0 + \varphi_1.$$

Умножая и деля эти два выражения друг на друга, мы получим для эффективных параметров неоднородной среды следующие уравнения:

$$(ik_1 d)^2 \varphi_0^2 = (\varphi_3 + \varphi_0\, ikd - \varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_3 + \varphi_0\, ikd - \varphi_0 + \varphi_1),$$
$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{\varphi_3 + \varphi_0 ikd - \varphi_0 - \varphi_1}{\varphi_3 + \varphi_0 ikd - \varphi_0 + \varphi_1}. \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что при определении эффективных параметров неоднородной среды указанным выше способом, предполагалось, что отраженная и прошедшая волны представляют собой плоские волны. Ниже будет показано, когда это предположение справедливо.

Перейдем теперь к расчету рассеяния плоской волны на цилиндрах в слое, пренебрегая гидродинамическим взаимодействием цилиндров в присутствии звуковой волны, т. е. считая, что $s \gg a$. Полное возбуждающее поле на поверхности определенного цилиндра можно представить в виде суммы падающего поля плоской волны и поля взаимодействия волн, рассеянных всеми остальными цилиндрами. Так как по предположению $ka \ll 1$, то, следовательно, амплитуды монопольной и дипольной составляющих поля рассеяния при падении на акустически жесткий цилиндр

---

* Под термином «неоднородная среда» мы всюду понимаем среду, составленную из содержащей среды и включений.

плоской волны будут пропорциональны $(ka)^2$; амплитуды остальных составляющих будут еще меньше, так что ими вполне можно пренебречь. Далее, при рассеянии на некотором цилиндре монопольной и дипольной волны, возбужденными, скажем, соседним цилиндром, амплитуды соответствующих волн будут уже пропорциональны $(ka)^4$, т. е. являются величинами высшего порядка малости по ka; кроме этого, вторично рассеянные волны частично будут компенсировать друг друга. Отсюда следует, что полем взаимодействия цилиндров при $ka \ll 1$ можно пренебречь, т. е. считать, что на каждый цилиндр падает плоская звуковая волна.

Следуя работе [1], скалярный потенциал продольных волн φ рассеянного поля плоской волны единичной амплитуды, падающей на цилиндр, свободно висящий в вязкой среде, при условии, что $ka \ll 1$, на расстояниях, значения которых велики по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя, можно представить в виде

$$\varphi = B_0 H_0(kr) + B_1 H_1(kr)\cos\theta,\ B_0 = -\frac{1}{2}k^2 a A_0,\ B_1 = \frac{ik(\sigma-1)A_1}{\sigma - 1 - 4iA_1/\pi k a^2},$$

$$A_0 = \{kH_1(ka)\}^{-1}, \quad A_1 = -\frac{2k^{-1}H_2(ha)}{H_0(ka)H_2(ha) + H_0(ha)H_2(ka)},$$

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{4i\omega\nu}{c^2}\right)^{-2} \quad h = \beta e^{i\pi/4} \quad \beta = (\omega/\nu)^{1/2}.$$

Здесь и далее: k — волновое число продольных волн в вязкой среде, ω — круговая частота, c — скорость звука в отсутствие вязкости, ν — кинематическая вязкость, h — волновое число вязких (поперечных) волн, $(\beta/\sqrt{2})^{-1}$ — так называемая толщина вязкого пограничного слоя, H — функция Ханкеля 1-го рода порядка n, σ — отношение плотностей материала цилиндра и вязкой среды соответственно. Смысл величин r и θ ясен из фиг. 1.

Вязкие волны, имеющие место вблизи поверхности цилиндра (на расстояниях, равных нескольким кратным толщины вязкого пограничного слоя) принимаются в рассмотрение в том смысле, в каком они оказывают влияние на коэффициенты B_0 и B_1 для продольной рассеянной волны.

Таким образом, поле прямо рассеянной волны в точке $M_1(x_0,\ 0)$ при условии, что $|kx_0| \gg 1$ мы найдем, используя асимптотические представления функций Ханкеля при больших значениях аргумента [2] и суммируя волны, рассеянные всеми цилиндрами в слое

$$\varphi_0 \sum_{n=0}^{n=d/s} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \left(\frac{2}{\pi k r}\right)^{1/2} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} (B_0 - iB_1\cos\theta), \tag{4}$$

где $r = \sqrt{(x_0 - ns)^2 + (ms)^2}$, $\cos\theta = x_0 / r$.

Предполагая, что длина волны звука много больше расстояния между цилиндрами, и, переходя к новым переменным $ls = \alpha$, $ms = \gamma$, можно на основании приближенного равенства

$$F(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} F(x)\,dx$$

заменить двойную сумму интегралом

$$\varphi_0 e^{-i\pi/4}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2} \frac{1}{s^2} \int_0^d \int_{-\infty}^{\infty} \left(B_0 - iB_1\frac{x_0}{r}\right) e^{ikr} d\alpha d\gamma.$$

Выбирая точку M_1 так чтобы $x_0 \gg d$, что дает нам право пренебречь изменением амплитуды и фазы рассеянной волны по толщине слоя, и, учитывая четность подынтегральной функции по γ, перепишем последнее выражение в виде

$$2\varphi_0 e^{-i\pi/4}\left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2}\frac{d}{s^2}\int_{x_0}^{\infty}\left(B_0 - iB_1\frac{x_0}{r}\right)\frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{r^2-x_0^2}},$$

где $r^2 = x_0^2 + \gamma^2$. Для вычисления интегралов введем новую переменную по формуле $r = x_0 + p\eta^2$, $dr = 2p\eta d\eta$, где $p \gg 1$. Тогда, разбивая последний интеграл на два интеграла, получим

$$\int_{x_0}^{\infty}\left(B_0 - iB_1\right)\frac{x_0}{r}\frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{r^2-x_0^2}} = 2\sqrt{p}\,e^{ikx_0}\left\{\int_0^{\infty} e^{ikp\eta^2}\frac{\sqrt{x_0+p\eta^2}}{\sqrt{2x_0+p\eta^2}}\,d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty} e^{ikp\eta^2}\frac{x_0\,d\eta}{\sqrt{x_0+p\eta^2}\sqrt{2x_0+p\eta^2}}\right\}.$$

Так как в обоих подынтегральных выражениях присутствуют быстроосциллирующая и медленноменяющаяся функции, то эти интегралы можно вычислить по методу стационарной фазы; при этом, показатель экспоненты в подынтегральном выражении можно считать чисто мнимым. Действительно, в случае распространения звуковых волн в вязкой жидкости отношение $\omega\nu / c^2$ чрезвычайно мало вплоть до частот порядка сотен килогерц, так что с большим приближением можно считать волновое число продольных волн в содержащей среде k вещественным и равным ω / c.

Таким образом, для поля прямо рассеянной волны в точке M_1 мы получаем выражение:

$$2\varphi_0 e^{ikx_0}\frac{d}{ks^2}(B_0 - iB_1).$$

Аналогично, для поля обратно рассеянной волны в симметричной точке $M_2(-x_0, 0)$ получим, полагая в (4) $\cos\theta = -x_0 / r$

$$2\varphi_0 e^{-ikx_0}\frac{d}{ks^2}(B_0 + iB_1).$$

Легко видеть, что как прямо, так и обратно рассеянные волны представляют собой плоские волны, что является прямым следствием принятых допущений.

Прошедшая волна, равная сумме падающей волны и прямо рассеянной волны, имеет вид

$$\varphi_0 e^{ikx_0}\left\{1 + \frac{2d}{ks^2}(B_0 - iB_1)\right\}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\exp(-ikx_0)$ в отраженной волне φ_1 и коэффициент при $\exp(ikx_0)$ в прошедшей волне φ_3, получим из (3)

$$(k_1 / k)^2 = (1 - 4iB_0 / k^2s^2)(1 - 4B_1 / k^2s^2), \tag{5}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = (1 - 4iB_0/k^2s^2)^{-1/2}\cdot(1 - 4B_1/k^2s^2)^{3/2}. \tag{6}$$

Так как B_0, B_1 пропорциональны $(ka)^2$, то, учитывая, что $s \gg a$, и, вводя концентрацию цилиндров на единицу площади, перпендикулярной их осям по формуле $\Phi = \pi a^2 / s^2$, из формулы (5) получим приближенное выражение для

$$k_1 / k = 1 + \Phi(U + iV), \tag{7}$$

где U, V — функции от параметров a, ω, ν, σ, определяемые формулой

$$U + iV = -\frac{2}{\pi k^2 a^2}(iB_0 + B_1). \tag{8}$$

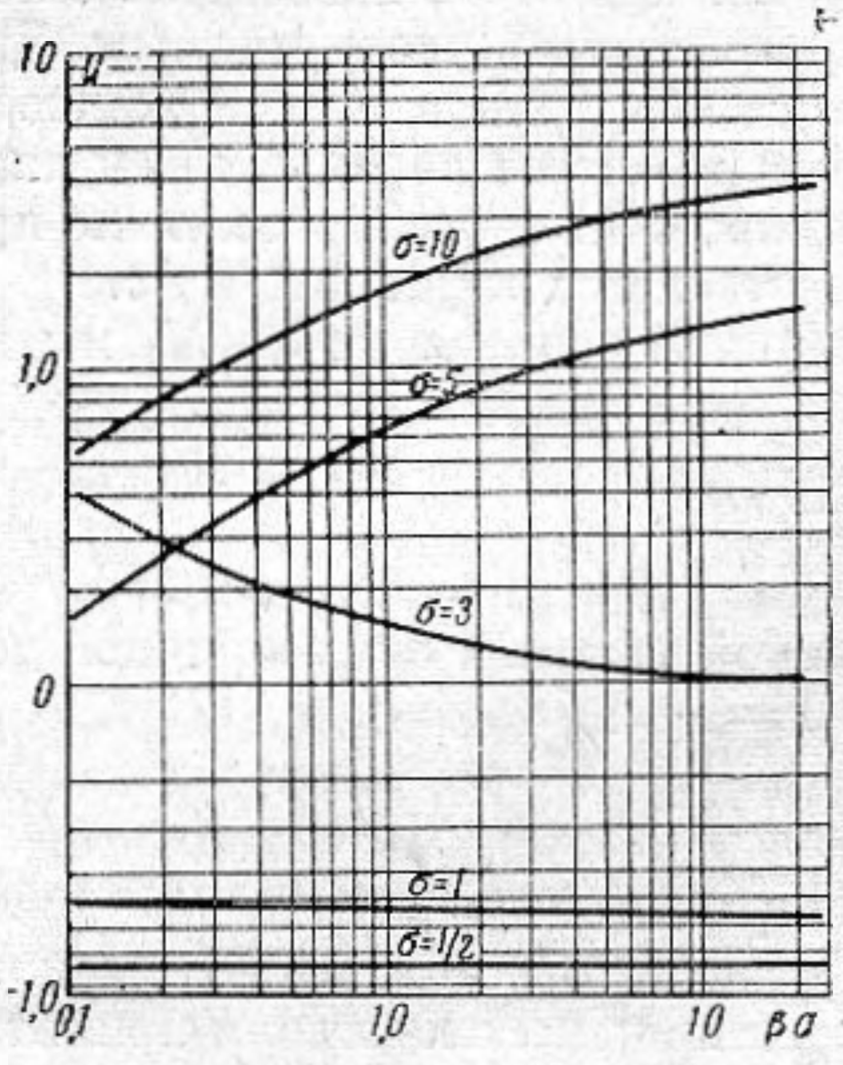
Если учесть, что $k_1 = \omega / c_1 + i\alpha$, где c_1 — фазовая скорость распространения звука в неоднородной среде (в содержащей среде фазовая скорость равна c), а α — амплитудный коэффициент поглощения звука в неоднородной среде, то выражение (7) можно представить в виде $c_1 = c(1 + \Phi U)$, $\alpha = (\omega / c)\Phi V$.

Рассмотрим случай, когда вязкость содержащей среды мала, т. е. $\beta a \gg 1$. При этом для функций U и V мы получаем, согласно формуле (8),

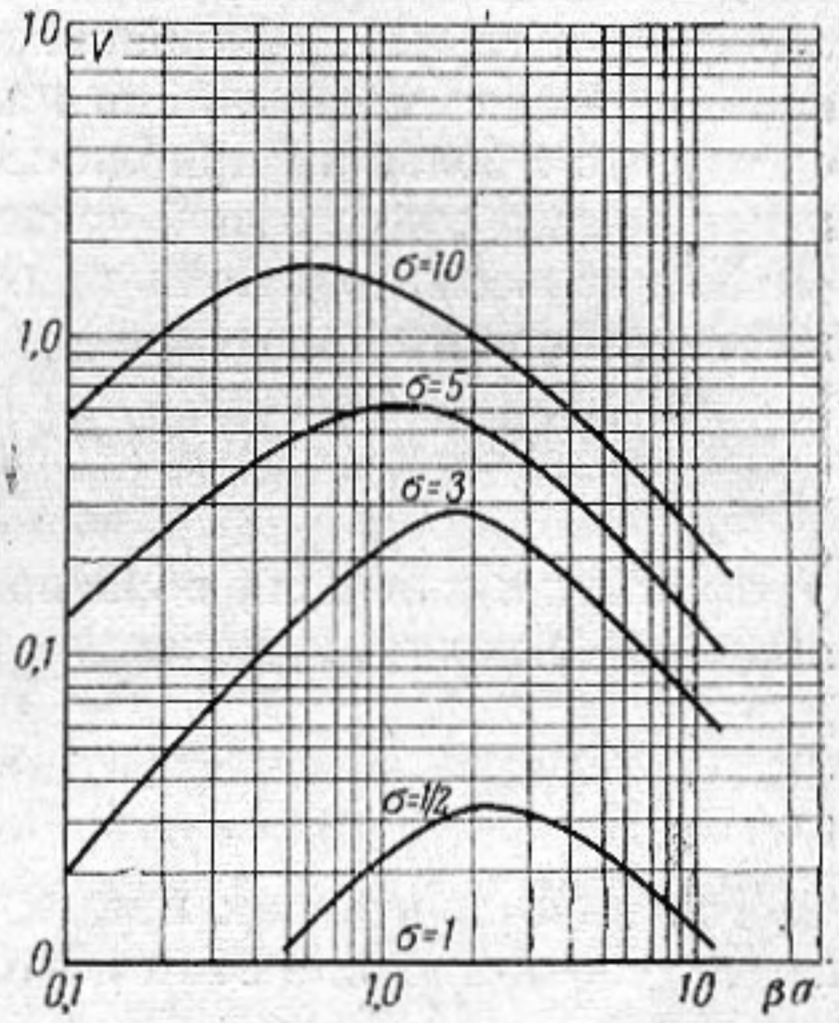
$$U = -\frac{1}{2} + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\beta a}\right),$$

$$V = \pi k^2 a^2 \left\{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\,\frac{(\sigma - 1)^2}{(\sigma + 1)^2}\right\} + \frac{\sqrt{2}}{\beta a}\,\frac{(\sigma - 1)^2}{(\sigma + 1)^2}.$$

Так как функция V отлична от нуля, то это значит, что звуковая волна при распространении в неоднородной среде будет затухать, что объясняется ее рассеянием на включениях. При этом первый член в выражении



Фиг. 2



Фиг. 3

для V соответствует поглощению волны из-за монопольного и дипольного рассеяний, возникающих благодаря самому факту присутствия включений на пути распространения волны. Второй член соответствует необратимому поглощению волны из-за вязкости содержащей среды, возникающему при дипольном рассеянии, т. е. в том случае, когда имеет место относительное движение среды и включений. Нетрудно видеть, что второй член обращается в нуль, когда не возникает дипольного рассеяния ($\sigma = 1$) или когда вязкость $\nu = 0$ ($\beta a = \infty$).

Когда $\beta a \ll 1$, что имеет место при большой вязкости содержащей среды, получение удобно анализируемых выражений для функций U и V затруднительно.

Если мы не будем удерживать в выражениях для A_0 и A_1 члены высшего порядка малости по ka, то оказывается, что U и V будут зависеть только от параметров σ и βa; при этом получаем из формулы (8)

$$U + iV = -\frac{1}{2} - \frac{(\sigma - 1)\, H_2(ha)/H_0(ha)}{\sigma - 1 - 2H_2(ha)/H_0(ha)}. \tag{9}$$

С помощью табулированных функций Бесселя от комплексного аргумента [3] были проведены вычисления функций U и V по формуле (9).

Результаты численных расчетов представлены на фиг. 2—3, показывающих зависимость U и V от параметра βa при различных значениях σ, причем значения σ указываются над кривыми.

Значения U приближаются к $(\sigma - 2) / 2$ при малых βa (точнее при таких значениях βa, для которых уже выполняется неравенство $(\beta^2 a^2 \ln {}^1/_2 \beta a)^{-1} \gg \sigma - 1$) и к $(\sigma - 3) / 2(\sigma + 1)$ при больших βa. Кривые для V показывают, что для каждого данного значения σ существует максимальное звукопоглощение (вследствие вязкости) при вполне определенном значении βa.

Из выражения (6) следует, что эффективная плотность в общем случае может принимать комплексные значения, что для однородной среды лишено физического смысла. В связи с этим следует заметить, что полученные здесь эффективные значения параметров неоднородной среды — это такие значения, при которых волновое уравнение Гельмгольца для однородной среды справедливо в любой макроскопической области неоднородной среды. Под макроскопической областью мы понимаем здесь любую область, размеры которой значительно больше среднего расстояния между включениями.

Эффективные параметры не являются полными характеристиками неоднородной среды; они характеризуют лишь поведение среды в целом, т. е. ее макроскопические свойства. Наоборот, измерение свойств такой среды определяет эффективные значения ее параметров. Поэтому, если эффективные параметры принимают необъяснимые значения, то следует помнить, что эти параметры служат прежде всего характеристиками «макроскопического» поведения среды в целом, а не истинными физическими свойствами такой среды.

Кстати заметим, что найденные здесь значения эффективных параметров неоднородной среды характеризуют ее свойства при прохождении монохроматических волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Кожин. Излучение и рассеяние звука цилиндром в вязкой среде. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 269—274.
2. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., ИЛ., 1949.
3. Таблицы функции Бесселя в комплексной области (библиотека математических таблиц, вып. 22, 23), М., ВЦ. АН СССР, 1963.

Всесоюзный н.-и. институт метрологии
им. Д. И. Менделеева
Ленинград

Поступила в редакцию
27 февраля 1969 г.