АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVI 1970 Вып. 4

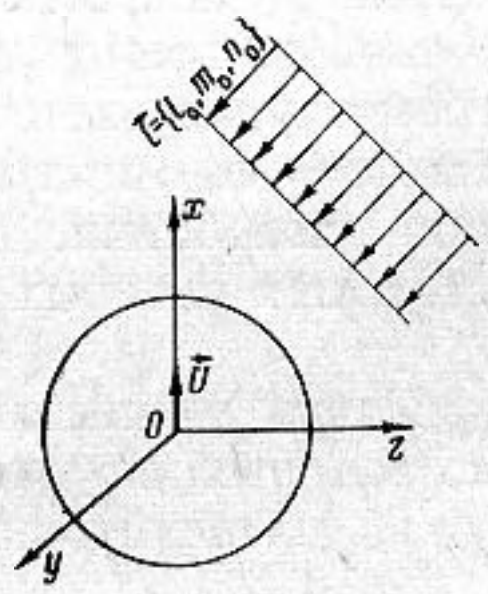
УДК 534.26

О ДИФРАКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ДВИЖУЩЕЙСЯ СФЕРЕ

П. И. Цой

Рассматривается задача о дифракции стационарных звуковых волн на движущейся сфере, когда поверхность сферы от падающей волны деформируется и нормальная скорость на этой поверхности изменяется по заданному закону в зависимости от угла θ. Методом Морза исследовано акустическое поле для длинных звуковых волн. В работе проводятся графики отношений $\Pi_s / 2\pi a^2 J_p$ и $(P - P_0)a / A_0\rho_0 c$ для жесткой сферы.

Рассмотрим систему плоских звуковых волн, приходящих из бесконечности по произвольному направлению с направляющими косинусами l_0, m_0, n_0, т. е. $\mathbf{l} = \{l_0, m_0, n_0\}$ по отношению к подвижной системе координат $Oxyz$ и падающих на проницаемую сферу, неизменно связанную с той же системой так, что центр тяжести сферы совпадал с началом системы, а ось Ox — с направлением движения сферы в среде (фиг. 1). Задача заключается в том, чтобы определить акустическое поле сферы относительно системы $Oxyz$.



Фиг. 1

Данная задача приводится к решению уравнения потенциала скоростей φ [1]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2U\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} + U^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = c^2\Delta\varphi,$$
$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \tag{1}$$

удовлетворяющему граничному условию на поверхности сферы (при $r = a$)

$$\partial\varphi / \partial n = f(\theta)\, e^{-\omega t i}, \tag{2}$$

где U — скорость сферы относительно неподвижной системы отсчета, c — скорость звука, n — внешняя нормаль к поверхности сферы, ω — круговая частота колебаний, а $f(\theta)$ — заданная от θ функция на поверхности сферы.

В случае установившегося режима (с временным множителем $e^{-i\omega t}$) выражение для плоской волны, распространяющейся вдоль направления $\mathbf{l}$, может быть представлено в виде

$$\varphi = A_0 \exp\left[i\left\{\frac{k}{1-\alpha l_0}(l_0 x + m_0 y + n_0 z) - \omega t\right\}\right], \tag{3}$$

где A_0 — амплитуда падающих плоских волн, k — волновое число, равное ω / c, $\alpha = U / c$ — число Маха.

Введем вместо x, y, z сферические координаты r, θ, ψ. Тогда можно написать формулу (3) в виде

$$\varphi_p = A_0 e^{-\omega t i} \exp\left\{\frac{kri}{1-\alpha l_0}\cos\gamma\right\}. \tag{4}$$

Здесь

$$\cos\gamma = \cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\psi - \psi_0),\ x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta\cos\psi,\ z = r\sin\theta\sin\psi,\ l_0 = \cos\theta_0,\ m_0 = \sin\theta_0\cos\psi_0, \quad (5)$$
$$n_0 = \sin\theta_0 \sin\psi_0,$$

γ — угол между двумя прямыми, совпадающими с векторами **r** и **l**.

Применяя к правой части (4) известное разложение функции в ряд по функциям Бесселя и Лежандра [2], мы получим

$$\varphi_p = A_0 e^{-it\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n j_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right) P_n(\cos\gamma). \quad (6)$$

Здесь $P_n(\cos\gamma)$ — первая функция Лежандра n порядка, $j_n(u)$ — сферическая бесселевая функция, равная

$$j_n(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, J_{n+1/2}(u), \quad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

где $J_{n+1/2}(n)$ — функция Бесселя 1-го рода $n + 1/2$ порядка.

Далее, применяя теорему сложения Лежандра [3] для зональной функции $P_n(\cos\gamma)$, получим для φ_p выражение:

$$\varphi_p = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n j_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)\Big[P_n(l_0)\, P_n(\cos\theta) +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(l_0)\, P_n^m(\cos\theta)\cos m(\psi - \psi_0)\Big] e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

где $P_n^m(u)$ — присоединенная функция Лежандра 1-го рода.

Чтобы определить выражение для волны, рассеянной движущейся сферой, прежде всего преобразуем граничное условие (2) к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = f(\theta)\, e^{-\omega t i} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P_n(\cos\gamma)\, e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

где

$$U_n = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} f(\theta)\, P_n(\cos\gamma)\, d\cos\gamma. \quad (9)$$

Тогда выражение волны, рассеянной движущейся сферой, можно искать в виде

$$\varphi_s = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2n+1)\, i^n h_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)\Big[P_n(l_0)\, P_n(\cos\theta) +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(l_0)\, P_n^m(\cos\theta)\cos m(\psi - \psi_0)\Big] e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

где $h_n(u)$ — сферическая функция Ханкеля 1-го рода

$$h_n(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, H_{n+\frac{1}{2}}(u), \quad (n = 0, 1, 2\ldots).$$

Здесь $H_{n+1/2}(u)$ — функция Ханкеля 1-го рода $n + 1/2$ порядка, а B_n — коэффициенты разложения, определяемые из условия (8). Применяя граничные условия (8) к функции

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_s, \quad (11)$$

находим B_n в виде

$$A_n = -\frac{j_n'(ka/1-\alpha l_0)}{h_n'(ka/1-\alpha l_0)} + \frac{U_n(1-\alpha l_0)}{kA_0 i^n (2n+1) h_n'(ka/1-\alpha l_0)}; \; h_n'(u) = \frac{d}{du} h_n(u) \tag{12}$$

Подстановка выражения (12) в формулу (10) дает функцию φ_s, удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2), в виде

$$\varphi_s = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_0 (2n+1) i^n \frac{j_n'(ka/1-\alpha l_0)}{h_n'(ka/1-\alpha l_0)} - \frac{U_n(1-\alpha l_0)}{kh_n'(ka/1-\alpha l_0)} \right] \times$$

$$\times h_n(kr/1-\alpha l_0) \times \left[P_n(l_0) P_n(\cos\theta) + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(l_0) P_n^m(\cos\theta) \times \right.$$

$$\left. \times \cos m(\psi - \psi_0) \right] e^{-i\omega t} \tag{13}$$

Таким образом, задача, поставленная в начале статьи, решена в виде ряда, определяемого формулами (7) и (13) с учетом (11). Если $U_n = 0$ для всех n, то мы имеем случай, когда жесткая сфера движется со скоростью U в среде. Во всех частных случаях, когда $U_n = 0$ и а) среда неподвижна ($\alpha = 0$), б) среда и плоские волны движутся в одном или противоположных направлениях ($l_0 = \pm 1$, $m_0 = 0$, $n_0 = 0$), в) сфера движется по направлению, перпендикулярному к падающим волнам ($l_0 = 0$, $\theta = \pi/2$), г) сфера неподвижна, и положительная ось Ox совпадает с направлением движения плоских волн ($\alpha = 0$, $l_0 = 1$, $m_0 = 0$, $n_0 = 0$), все приведенные выше формулы точно согласуются с результатами работы Рэлея [4].

Следуя Морзу [5, 6], применим обозначение:

$$h_n'(u) = iD_n^\alpha e^{i\delta_n^\alpha}. \tag{14}$$

Предельные значения амплитуд D_n^α и фазовых углов δ_n^α определяются следующими приближенными формулами:

При $ka = \omega a / c = 2\pi a / \lambda \gg n + {}^1/_2$

$$D_n^\alpha \approx \frac{1-\alpha l_0}{ka} = D_n(1-\alpha l_0); \quad \delta_n^\alpha \approx \frac{ka}{1-\alpha l_0} - \frac{n+1}{2}\pi =$$

$$= \frac{\delta_n}{1-\alpha l_0} + \frac{(n+1)\pi\alpha l_0}{2(1-\alpha l_0)}. \tag{15}$$

При $ka = \omega a / c = 2\pi a / \lambda \ll n + {}^1/_2$

$$D_0^\alpha \approx \frac{(1-\alpha l_0)^2}{(ka)^2} = D_0(1-\alpha l_0)^2; \quad \delta_0^\alpha \approx \frac{1}{3}\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)^3 = \frac{\delta_0}{(1-\alpha l_0)^3},$$

$$D_n^\alpha \approx \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(n+1)}{(ka)^{n+2}}(1-\alpha l_0)^{n+2} = D_n(1-\alpha l\ )^{n+2}, \quad (n > 0) \tag{16}$$

$$\delta_n^\alpha \approx -\frac{n(ka)^{2n+1}}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)(n+1)(1-\alpha l_0)^{2n+1}} = \frac{\delta_n}{(1-\alpha l_0)^{2n+1}},$$

где предельные значения D_n и δ_n, зависящие от ka, определяются по таблицам [5, 6]. Из формул (15) и (16) вытекает, что если $l_0 > 0$, то $D_n^\alpha \leqslant D_n$ и $\delta_n^\alpha \geqslant \delta_n$, а если $l_0 < 0$, то $D_n^\alpha \geqslant D_n$ и $\delta_n^\alpha \leqslant \delta_n$. Давление и радиальная скорость в точке (r, θ, ψ) определяются следующими выражениями:

$$p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_0 U \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r} \right), \quad v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}. \tag{17}$$

Тогда на основании формул (7), (11), (13) формулы (17) примут вид

$$p - p_0 = A_0\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \left[\left\{ j_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right) - \frac{j_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} \times \right.\right.$$

$$\times h_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)\Big\}\omega i+\Big\{j_n'\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)-$$

$$-\frac{j_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}h_n'\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)\Big\}\frac{kU\cos\theta}{1-\alpha l_0}\Big]P_n(\cos\gamma)\,e^{-i\omega t}+$$

$$+\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}\Big\{\frac{(1-\alpha l_0)\,\omega i}{k}h_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)+$$

$$+U\cos\theta h_n'\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)\Big\}P_n(\cos\gamma)\,e^{-i\omega t}- \tag{18}$$

$$-\frac{A_0\rho_0 U\sin\theta}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(2n+1)\,i^n\Big\{j_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)-\frac{j_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}h_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)+$$

$$+\frac{U_n(1-\alpha l_0)}{A_0k(2n+1)\,i^n h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}h_n\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)\Big\}\Big]\frac{dP_n(\cos\gamma)}{d\theta}e^{-i\omega t};$$

$$v_r=\frac{A_0k}{1-\alpha l_0}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,i^n\Big\{j_n'\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)-\frac{j_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}h_n'\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)+$$

$$+\frac{(1-\alpha l_0)\,U_n h_n'\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}\right)}{A_0k(2n+1)\,i^n h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)}\Big\}P_n(\cos\gamma)\,e^{-i\omega t}.$$

В дальнейшем мы используем для сферических бесселевых функций следующие асимптотические формулы [2]:

$$\underset{u\to\infty}{j_n}(u)\sim\frac{1}{u}\cos\left(u-\frac{n+1}{2}\pi\right);\quad \underset{u\to\infty}{h_n}(u)\sim\frac{1}{u}e^{i\left(u-\frac{n+1}{2}\pi\right)},$$

$$\underset{u\to 0}{j_n}(u)\sim\frac{u^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)};\quad \underset{u\to 0}{h_n}(u)\sim-\frac{i\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{u^{n+1}}. \tag{19}$$

Тогда давление и радиальная скорость в рассеянной волне на больших расстояниях r (в дальней зоне) от движущейся сферы в силу выражений (18) и (19) будут

$$P_s=\frac{A_0\rho_0 c}{r}(1-al_0+\alpha\cos\theta)\exp\left\{i\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\times$$

$$\times\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin\delta_n^{\alpha}e^{-\delta_n^{\alpha}i}+$$

$$+\frac{1-\alpha l_0}{A_0k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n}{D_n^{\alpha}}\exp\left\{-i\left(\delta_n^{\alpha}+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\Big]P_n(\cos\gamma); \tag{20}$$

$$v_{rs}=\frac{A_0}{r}\exp\left\{i\left(\frac{kr}{1-\alpha l_0}-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin\delta_n^{\alpha}e^{-\delta_n^{\alpha}i}+$$

$$+\frac{1-\alpha l_0}{A_0k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n}{D_n^{\alpha}}\exp\left\{-i\left(\delta_n^{\alpha}+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\Big]P_n(\cos\gamma).$$

Интенсивность рассеянной волны в точке (r, θ, ψ) при $kr \gg 1$ будет

$$I_s = \overline{p_s v_{rs}} = \frac{I_p a^2}{r^2} F_r(\theta, \psi); \quad I_p = \frac{I_0 \rho_0 \omega^2}{2c(1-\alpha l_0)^2}, \tag{21}$$

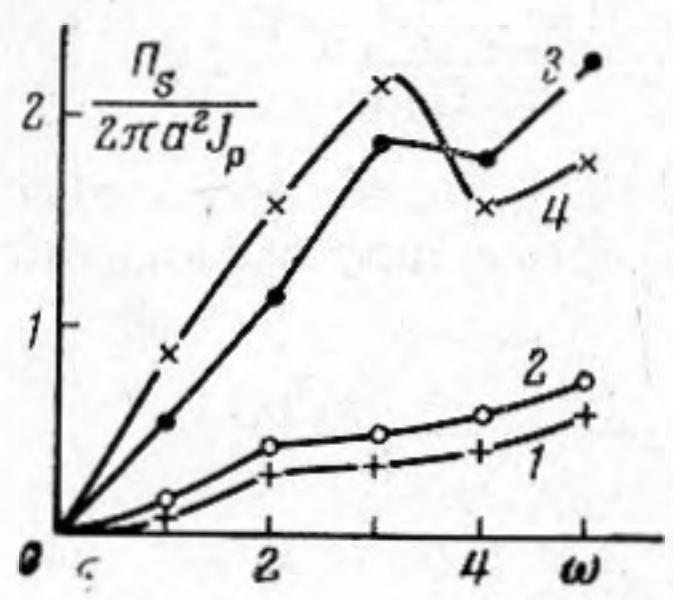
$$F_r(\theta, \psi) = \frac{(1-\alpha l_0)^2 (1-\alpha l_0 + \alpha\cos\theta)}{\omega_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \left[(2n+1)\sin\delta_n^{\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha l_0) U_n}{A_0 k D_n^{\alpha}} \cos\frac{n\pi}{2}\right] \left[(2n'+1)\sin\delta_{n'}^{\alpha} + \frac{(1-\alpha l_0) U_{n'}}{A_0 k D_{n'}^{\alpha}} \cos\frac{n'\pi}{2}\right] \times$$
$$\times P_n(\cos\gamma) P_{n'}(\cos\gamma); \quad \omega_0 = \omega a/c, \tag{22}$$

где I_p — интенсивность падающей плоской волны, движущейся по направлению $\mathbf{l} = \{l_0, m_0, n_0\}$, а $F_r(\theta, \psi)$ — характеристика направленности (по интенсивности) рассеянной волны в зависимости от θ и ψ. Так как $\cos\gamma$ определяется по формуле (5), то характеристика направленности рассеянной волны в общем случае зависит от α, θ_0, ψ_0, θ, ψ.

Найдем теперь полную рассеянную мощность вдали от движущейся сферы. Применяя теорию ортогональных сферических функций [3], после несложного вычисления получим для Π_s следующее выражение:

$$\Pi_s = \frac{4\pi a^2 I_p}{\omega_0^2} (1-\alpha l_0)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[(2n+1)\sin\delta_n^{\alpha} + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha l_0) U_n}{A_0 k D_n^{\alpha}} \cos\frac{n\pi}{2}\right]^2 \left[\{P_n(l_0)\}^2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \{P_n^m(l_0)\}^2\right] +$$
$$+ \frac{4\pi a^2 (1-\alpha l_0)^2}{\omega_0^2} I_p \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left\{(2n+1)\sin\delta_n^{\alpha} + \right. \tag{23}$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha l_0) U_n}{A_0 k D_n^{\alpha}} \cos\frac{n\pi}{2}\right\} \left\{(2n-1)\sin\delta_{n-1}^{\delta} + \frac{(1-\alpha l_0) U_{n-1}}{A_0 k D_{n-1}^{\alpha}} \sin\frac{n\pi}{2}\right\} \times$$
$$\times \left[P_n(l_0) P_{n-1}(l_0) \frac{k}{4n^2-1} + \frac{4}{4n^2-1} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(l_0) P_{n-1}^m(l_0)\right].$$

Произведение $2\pi a^2 I_p$ представляет мощность падающих плоских волн с направлением $\mathbf{l} = \{l_0, m_0, n_0\}$, проходящих через площадь, равную двойной площади поперечного диаметрального сечения сферы πa^2. На фиг. 2 даны графики отношения $\Pi_s / 2\pi a^2 I_p$ для жесткой сферы ($1 - \alpha = 1/4$, $l_0 = 0$, $m_0 = 1$; $2 - \alpha = 0$, $l_0 = 1$; $3 - \alpha = 1/4$, $l_0 = 1$; $4 - \alpha = 1/4$, $l_0 = 1$). Из этой фигуры видно, что это отношение при $\alpha \neq 0$ (для движущейся сферы) существенно отличается от того же отношения при $\alpha = 0$ (при неподвижной сфере), причем рассеянная мощность от движения сферы при $l_0 = 1$ и $l_0 = -1$ намного больше, чем той же величины от неподвижной сферы, однако при $l_0 = 0$, $m_0 = 1$, $n_0 = 0$ мы имеем обратное явление. Если $\alpha = 0$, $U_n = 0$, то из формулы мы получим результаты, совпадающие с работами [5, 6]. Используя свойство сферических бесселевых функций [3], можно определить давление на поверхности сферы (при $r = a$) в виде



Фиг. 2

$$p - p_0 = -\frac{A_0 \rho_0 c (1-\alpha l_0)^2}{\omega_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} P_n(\cos\gamma) e^{-i\omega t} +$$

$$+\rho_0 ci \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} \left\{(1-\alpha l_0)\, h_n\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right) - \right.$$

$$\left. - i\alpha \cos\theta h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)\right\} P_n(\cos\gamma)\, e^{-\omega t i} -$$

$$- \frac{A_0\rho_0(1-\alpha l_0)\alpha c}{\omega_0^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} \left\{(2n+1)\, i^{n+1}(1-\alpha l_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{U_n k a^2}{A_0} h_n\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)\right\} \left[\frac{n(n+1)}{2n+1}\{P_{n+1}(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)\} P_n(l_0) + \right.$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(l_0) \left\{\frac{1}{2n+1}\left[(n-m+1)\, P_{n+1}^m(\cos\theta) - \right.\right. \tag{24}$$

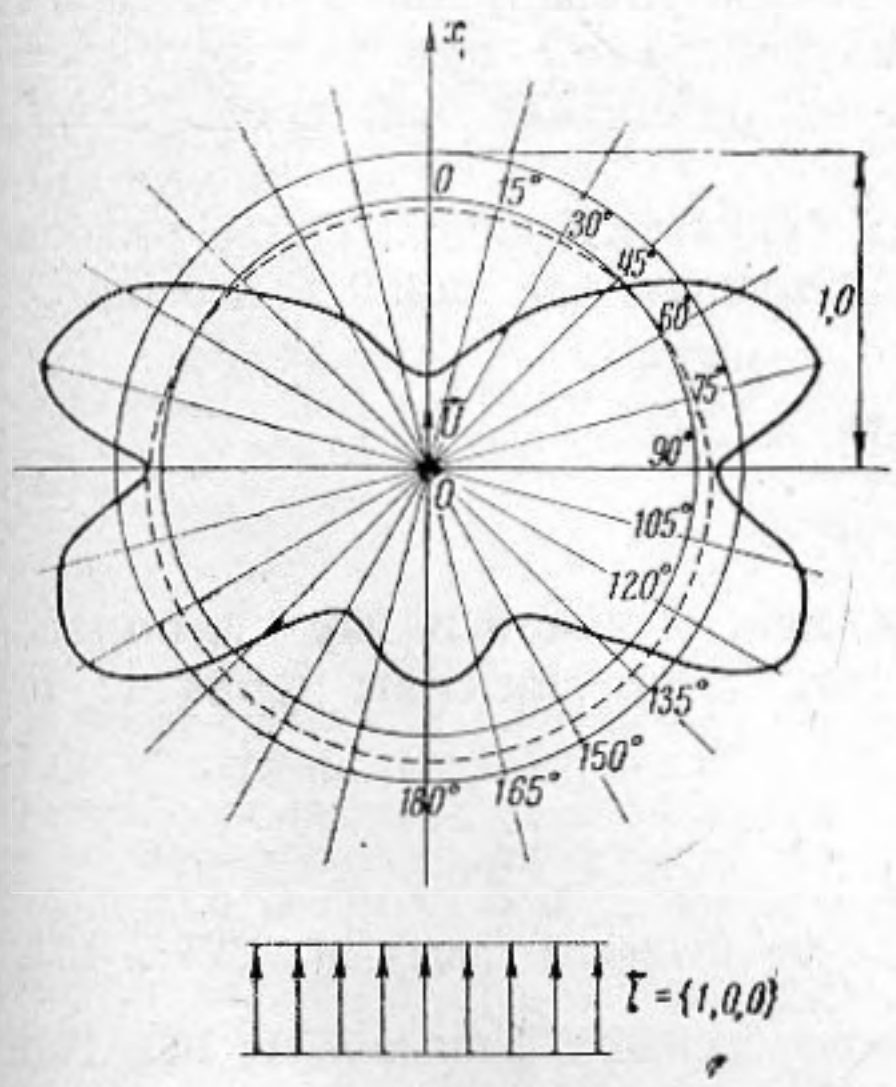
$$\left.\left. \left. - \frac{n+1}{2n+1} \cos\theta\, P_n^m(\cos\theta)\right]\right\} \cos m(\psi - \psi_0)\right] e^{-i\omega t}.$$

На фиг. 3 и 4 были построены графики отношения $\frac{p-p_0}{A_0\rho_0 c}$ а в двух случаях: $U_n = 0$ (для жесткой сферы) и $l_0 = 1$; $U_n = 0$ и $l_0 = -1$, в зависимости от угла θ при следующих данных:

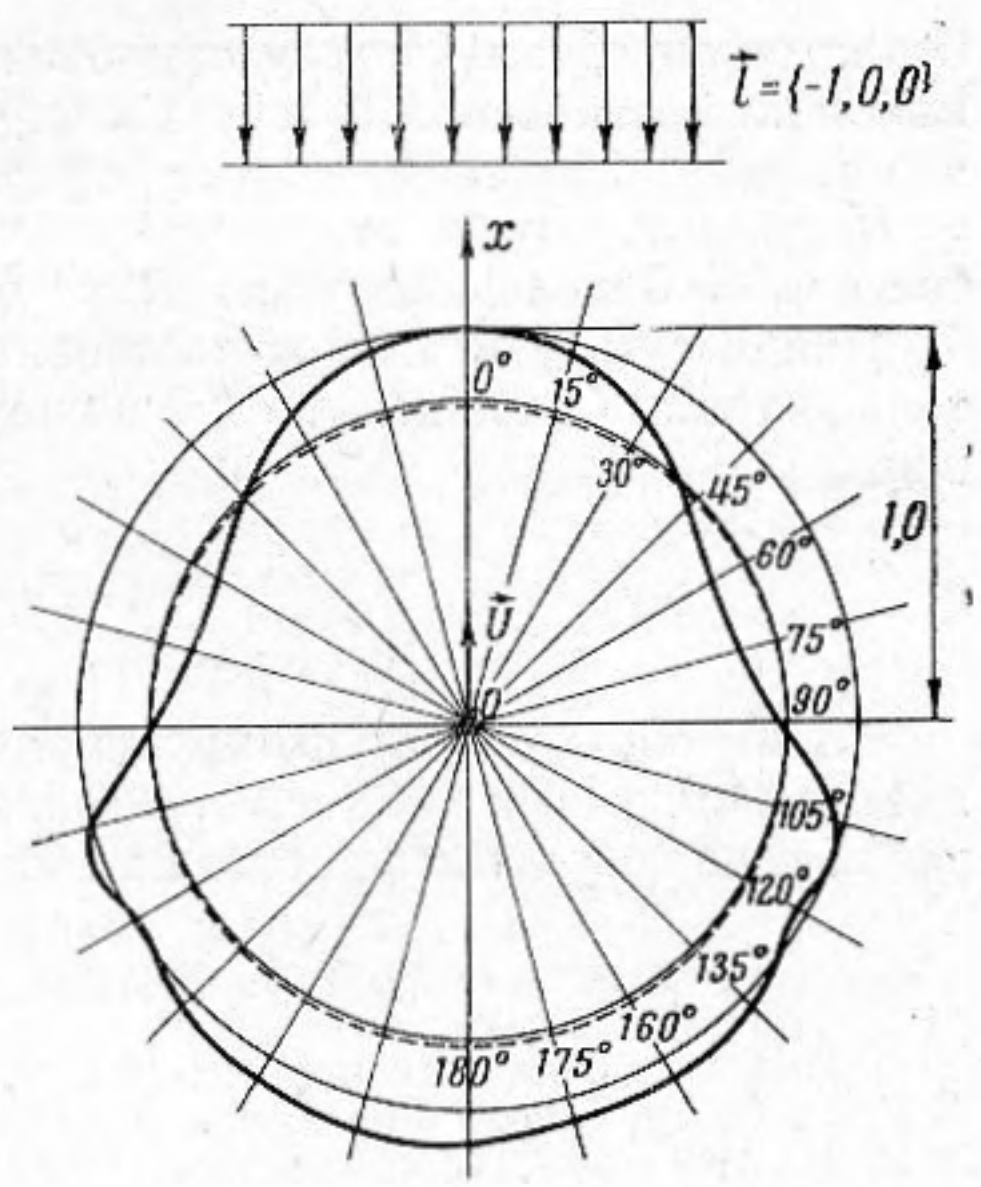
$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad a = 100 \text{ см}, \quad t^\circ = 15^\circ, \quad \nu' = 0, \quad \nu = 0{,}148 \text{ см}^2/\text{сек},$$

$$c = 342 \cdot 10^2 \text{ см/сек}, \quad \omega = \omega_0 c/a.$$

На фиг. 3 сплошная линия — при $\alpha = 1/4$, $l_0 = 1$, $\omega_0 = 3$; пунктирная — $\alpha = 1/4$, $l_0 = 1$, $\omega_0 = 1$. На фиг. 4 соответственно — при $\alpha = 1/4$, $l_0 = 1$, $\omega_0 = 3$; $\alpha = 1/4$, $l_0 = 1$, $\omega_0 = 1$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Расчеты были произведены только для двух случаев: $\omega_0 = 1$, $\omega_0 = 3$. С увеличением ω_0 потребуется большое число членов ряда, чтобы вычислить $\frac{p-p_0}{A_0\rho_0 c}\, a$. Поэтому при $\omega_0 \gg 1$ (для коротких волн) мы будем применять другие асимптотические формулы, о которых будет идти речь в дру-

гой работе автора. Графики 3 и 4 показывают, что давление на поверхности сферы существенно зависит как от θ_0, так и от θ и ω_0, причем с увеличением ω_0 они принимают сложную форму.

Результирующая сила, действующая на поверхность сферы, определяется ее проекциями R_x, R_y и R_z в виде

$$R_x = a^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} p\,|_{r=a} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi a^2}{3} A_0 \rho_0 c \left[-\frac{3(1-\alpha l_0)^2 l_0 i}{\omega_0 a h_n'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} + \right.$$

$$+ \frac{U_1 (1-\alpha l_0) i}{A_0 h_1'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} l_0 h_1\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right) + \frac{\alpha V_0}{A_0} - \frac{9(1-\alpha l_0)\alpha l_0 \sqrt{1-l_0^2}}{5\omega_0^2 a} i \times$$

$$\left. \times \left\{ 5(1-\alpha l_0) + \frac{U_2 k a^2 i}{A_0} h_2\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right) \right\} \right] e^{-i\omega t};$$

$$R_y = a^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} p\,|_{r=a} \sin^2\theta \cos\psi\, d\theta = -\frac{4}{3}\pi \cos\psi_0 \cdot M e^{-i\omega t}; \tag{25}$$

$$R_z = a^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} p\,|_{r=a} \sin^2\theta \sin\psi\, d\theta = \frac{4}{3}\pi \sin\psi_0 \cdot M e^{-i\omega t};$$

где $M = \dfrac{A_0 \rho_0 c a^2 (1-\alpha l_0)\sqrt{1-l_0^2}}{h_1'\left(\frac{ka}{1-\alpha l_0}\right)} \left[\dfrac{3(1-\alpha l_0)}{\omega_0 a} - \dfrac{U_1}{A_0} h_1\left(\dfrac{ka}{1-\alpha l_0}\right) \right]$.

Величина результирующей силы выражается так:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \tag{26}$$

Остается определить точку приложения силы **R**. Из физических соображений и аналитического расчета следует, что результирующая сила лежит в плоскости большого круга сферы, параллельной направлению $I_0 = \{l_0, m_0, n_0\}$. Пусть эта плоскость есть координатная плоскость $z = 0$, тогда $\psi_0 = 0$ и следовательно, $R_z = 0$.

Найдя сумму моментов составляющих результирующей силы относительно точки O, найдем угол θ между результирующей силой **R** и осью Ox в виде

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{R_y}{R_x}. \tag{27}$$

Таким образом, результирующая сила, действующая на сферу, определяется формулами (26) и (27), причем линия действия силы проходит через начало координатной системы $Oxyz$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Блохинцев. Акустика неоднородной движущейся среды. М., ГТТИ, 1946.
2. Г. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
3. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.
4. Рэлей. Теория звука, т. II. М., ГТТИ, 1955.
5. Ф. Морз. Колебания и звук. М., ГТТИ, 1949.
6. Ф. М. Морз, Г. Фешбах. Методы математической физики, т. II. М., ИЛ, 1960.

Тульский политехнический институт

Поступила в редакцию 30 декабря 1968 г.