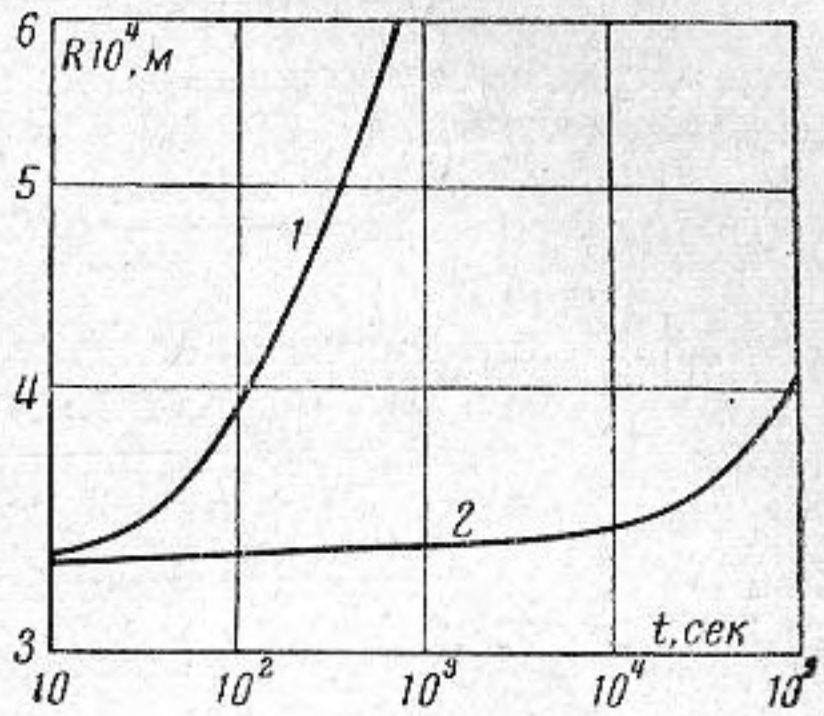
УДК 534.29

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ВОДЕ ВСЛЕДСТВИЕ «ВЫПРЯМЛЕННОЙ» ДИФФУЗИИ В ШУМОВОМ ПОЛЕ

А. В. Чалов

Известно, что одной из причин увеличения размеров газового пузырька в жидкости под действием звука является «выпрямленная» диффузия. Этот эффект был рассмотрен в работе [1] в предположении неизменности амплитуды колебаний пузырька при постоянстве амплитуды звукового давления. В работе [2] было учтено влияние на амплитуду колебаний пузырька соотношения между его резонансной частотой и частотой звука, а также величины коэффициента потерь. Представляет интерес рассмотреть задачу о «выпрямленной» диффузии с учетом резонансных свойств пузырька для того случая, когда он колеблется в шумовом поле.

Рассмотрим одиночный пузырек газа в воде, насыщенной газом. Пусть на пузырек воздействует давление, имеющее в диапазоне частот от f_1 до f_2 сплошной спектр амплитуд с плотностью $S(f)$. Предположим, что радиус пузырька R остается меньше длин волн гармонических составляющих спектра и ограничимся рассмотрением его малых линейных колебаний на нулевой моде. Кроме того, влиянием сил поверхностного натяжения воды будем пренебрегать. Тогда относительную амплитуду колебаний $\delta = a/R$ пузырька можно определить из выражения:



$$\delta = \int_{f_1}^{f_2} \frac{S}{3\gamma P} \{[1-(f/f_r)^2]^2 + \eta^2 (f/f_r)^4\}^{-1/2}\, df, \quad (1)$$

где a — амплитуда колебаний радиуса пузырька, R — радиус пузырька, f — текущая частота, f_r — резонансная частота пузырька, связанная с его радиусом формулой Миннаэрта: $f_r = \frac{1}{2\pi R}(3\gamma P/\rho)^{1/2}$, η — коэффициент потерь пузырька, γ — показатель политропы, P — статическое давление воды в месте расположения пузырька, ρ — массовая плотность воды.

Используя выражение (1), получим на основании работы [1] уравнение, связывающее радиус пузырька со временем, в виде

$$R\dot{R} = \frac{2DC_\infty}{3\rho_г \gamma^2 P^2} \left(\int_{f_1}^{f_2} S\, \{[1-(f/f_r)^2]^2 + \eta^2 (f/f_r)^4\}^{-1/2}\, df \right)^2, \quad (2)$$

где D — коэффициент диффузии, C_∞ — концентрация газа в воде на бесконечном удалении от пузырька, $\rho_г$ — плотность газа в пузырьке, $\dot{R}$ — радиальная скорость пузырька. В случае монохроматической волны выражение (2) переходит в уравнение, рассмотренное в работе [2].

Интеграл, входящий в уравнение (2), зависит от R через резонансную частоту. Для его вычисления необходимо знать вид функций $S(f)$ и $\eta(f)$. Примем функцию $S(f)$ в следующем виде: в диапазоне частот от $f_1 = 0$ до f_0 $S = S_0 \cdot f / f_0^2$, от f_0 до f_2 $S = S_0 / f$, где S_0 — некоторая амплитуда давления, f_0 — некоторая граничная частота.

В частности, такой вид функции $S(f)$ в первом приближении соответствует кавитационным источникам шума. Интеграл, входящий в (2), принимает вид

$$I = \frac{S_0 f_r^2}{f_0^2} A + S_0 B,$$

где

$$A = \int_0^{\bar{f}_0} \bar{f}\, [(1-\bar{f}^2)^2 + \eta^2 \bar{f}^4]^{-1/2}\, d\bar{f}, \quad B = \int_{\bar{f}_0}^{\bar{f}_2} \bar{f}^{-1} [(1-\bar{f}^2)^2 + \eta^2 \bar{f}^4]^{-1/2}\, d\bar{f}, \quad \bar{f}_2 = f_2/f_r,\ \bar{f}_0 = f_0/f_r.$$

Примем коэффициент потерь η не зависящим от текущей частоты f; тогда заменой переменных $\bar{f}^2 = y$ оба интервала сводятся к табличным. В результате получаем

$$A = \frac{1}{2(1+\eta^2)^{1/2}} \ln\{2(1+\eta^2)^{1/2}[(1+\eta^2)\bar{f}^4 - 2\bar{f}^2 + 1]^{1/2} + 2(1+\eta^2)\bar{f}^2 - 2\}\Big|_0^{\bar{f}_0}$$

$$B = -\frac{1}{2}\ln[\{2 - 2\bar{f} + 2[\bar{f}^4(1+\eta^2) - 2\bar{f}^2 + 1]^{1/2}\}\cdot\bar{f}^{-2}]\Big|_{\bar{f}_0}^{\bar{f}_2}.$$

Из-за сложного вида A и B дифференциальное уравнение (2) не может быть решено в квадратурах. Поэтому рассмотрим два наиболее простых случая:

1) $\bar{f}_0 < 1$ и $\bar{f}_2 > 1$.

Учитывая, что $\eta < 1$, и полагая $\eta > \bar{f}_0^2$ и $\eta > \bar{f}_2^{-2}$ получим с точностью до малых высших порядков

$$A = f_0^2 / 2f_r^2 \text{ и } B = \ln 2f_r / f_0 \cdot \eta.$$

Ограничимся рассмотрением пузырьков, имеющих резонансные частоты от нескольких килогерц до нескольких десятков килогерц. Тогда, используя принятую в работе [2] аппроксимацию для резонансных пузырьков $\eta = 0{,}35\cdot 10^{-4} / R$ (R берется в метрах) и формулу Миннаэрта, получим

$$I = S_0/2 + S_0 \ln 1{,}6\cdot 10^4 (\gamma P/\rho)^{1/2}\cdot f_0^{-1},$$

где f_0 выражается в герцах, а P и ρ — в системе СИ. Дифференциальное уравнение (2) принимает вид

$$R\dot{R} = \frac{2DC_\infty S_0^2}{3\rho_{\text{г}}\gamma^2 P^2}[1/2 + \ln 1{,}6\cdot 10^4 (\gamma P/\rho)^{1/2} f_0^{-1}]^2$$

и после интегрирования мы получим

$$R^2 = R_0^2 + \frac{4DC_\infty S_0^2}{3\gamma^2\rho_{\text{г}}\cdot P^2}[1/2 + \ln 1{,}6\cdot 10^4 (\gamma P/\rho)^{1/2} f_0^{-1}]^2\cdot t, \tag{3}$$

где R_0 — радиус пузырька в нулевой момент времени.

2) $\bar{f}_2 > \bar{f}_0 > 1$.

В этом случае для A и B мы получаем приближенные выражения:

$$A = \ln(2f_0 / f_r\cdot\eta) = \ln 2{,}1\cdot 10^5\cdot f_0 R^2 (\gamma P/\rho)^{-1/2}, \qquad B = 2f_r^2 / f_0^2,$$

где f_0 выражается в герцах, а P, ρ и R — в системе СИ. Дифференциальное уравнение (2) принимает вид

$$R^5\dot{R} / [2 + \ln 2{,}1\cdot 10^5\cdot f_0 R^2 (\gamma P/\rho)^{-1/2}]^2 = 3S_0^2 DC_\infty / 8\pi^4\rho_{\text{г}}\rho^2 f_0^4.$$

При $\bar{f}_0 > 1$ функцию $[2 + \ln 2{,}1\cdot 10^5 f_0 R^2 (\gamma P/\rho)^{-1/2}]^2$ можно рассматривать как изменяющуюся медленно в сравнении с множителем R^5, поэтому при интегрировании ее можно вынести из-под знака интеграла.

После интегрирования мы получаем

$$\frac{R^6 - R_0^6}{[2 + \ln 2{,}1\cdot 10^5\cdot f_0\cdot R^2(\gamma P/\rho)^{-1/2}]^2} = \frac{9S_0^2 DC_\infty t}{4\pi^4\rho_{\text{г}}\rho^2 f_0^4}. \tag{4}$$

На фигуре представлены рассчитанные по выражениям (3) и (4) зависимости радиуса пузырька от времени при следующих условиях:

$P = 10^5$ *н/м²*, $\rho = 1{,}02\cdot 10^3$ *нсек²/м⁴*, $\gamma = 1{,}4$, $D = 2\cdot 10^{-9}$ *м²/сек*, $C_\infty / \rho_{\text{г}} = 0{,}02$,

$$R_0 = 3{,}3\cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Кривые *1* и *2* построены соответственно для двух пар значений f_0 и S_0: $f_0 = 10^3$ *гц*, $S_0 = 10^5$ *н/м²* и $f_0 = 10^5$ *гц*, $S_0 = 2{,}6\cdot 10^5$ *н/м²* выбранных так, что уровни давления в полосе частот от 0 до $f_2 = 10^6$ *гц* в обоих случаях равны. Полученные зависимости подтверждают тот факт, что сдвиг спектра в сторону высоких частот приводит к замедлению роста пузырька.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. G. Hsieh, M. S. Plesset. Theory of rectified diffusion of mass into gas bubles. J. Acoust. Soc. America, 1961, 33, 2, 206—215.
2. О. А. Капустина. Исследование влияния ультразвука на процесс роста воздушного пузырька в воде. Акуст. ж., 1965, 11, 1, 116—119.

Ленинград

Поступило в редакцию
4 августа 1969 г.