АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 1

УДК 534.222

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ВЕТРА

О. В. Руденко, С. И. Солуян

На основе общего уравнения для акустических течений рассмотрен процесс установления акустического ветра в свободном звуковом поле. Полученные решения допускают конкретизацию вида объемных сил, вызывающих потоки, и справедливы для произвольных акустических чисел Рейнольдса. С течением времени нестационарные решения релаксируют к установившимся, что позволяет оценить характерное время формирования акустического ветра.

Как известно, распространение мощных звуковых волн в жидких и газообразных средах часто приводит к образованию непериодических движений среды типа потоков. По истечении некоторого, достаточно продолжительного промежутка времени с момента включения источника звука сформируется стационарный процесс, и характер акустических потоков будет целиком определяться величиной поглощения волны, геометрией звукового пучка и граничными условиями системы. В настоящее время стационарный акустический ветер изучен достаточно полно. Существует ряд теоретических и экспериментальных работ, с детальным обзором которых можно познакомиться в монографиях [1, 2].

Вместе с тем, заслуживает внимательного рассмотрения и сам процесс установления акустических течений. Экспериментаторам хорошо известны специфические особенности этого процесса [3], однако, удовлетворительного теоретического объяснения они до сих пор не получили. Это связано, в первую очередь, с трудностями математического характера. Нам известна лишь одна теоретическая работа [4], посвященная этому вопросу.

Изучение нестационарного акустического ветра мы проведем на основе системы уравнений для потоков в звуковом поле, которая имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} - \frac{\eta}{\rho_0}\,\Delta\mathbf{u} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho_0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость акустического потока, ρ_0 — равновесная плотность среды, p — давление, η — сдвиговая вязкость и $\mathbf{F}$ — сила, вызывающая поток.

Рассмотрим, следуя Эккарту [5], следующую геометрию задачи: звуковой пучок радиуса r_1 распространяется в цилиндрической трубе с жесткими стенками, радиуса r_0. В такой постановке задачу целесообразно решать в цилиндрической системе координат.

Полагая $(\partial u / \partial z) = 0$, из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ и проекции уравнения движения на ось r, соответственно получим $u_r = 0$ и $(\partial p / \partial r) = 0$. Заметим, что требование $u_r = 0$ эквивалентно требованию $r_1 \gg \lambda$, где r_1 — радиус излучателя, λ — длина волны, т. е. рассматривается плоская звуковая волна. Поскольку течение является цилиндрически симметричным, то система уравнений (1), таким образом, сводится к одному уравнению — проекции уравнения движения на ось z. Полагая, что сила, вызывающая поток, является функцией только переменной r и направлена вдоль оси z,

получим

$$\frac{\partial u(r_1 t)}{\partial t} - a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}\right) = F(r) - K(t). \qquad (2)$$

Здесь $a^2 = \eta / \rho_0$, $K(t) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}$. Процесс установления силы F нами не рассматривается, т. е. предполагается, что сила F устанавливается одновременно с приходом звука в точку наблюдения. Пусть этому моменту соответствует время $t = 0$.

Сила, вызывающая поток, обусловлена поглощением звуковой волны, и в зависимости от характера поглощения, т. е. от соотношения между нелинейными и диссипативными свойствами среды, может быть представлена по-разному [5—7]. Во всех случаях, при выбранной геометрии звукового пучка, для силы справедливо следующее представление:

$$F = A \cdot \theta(r_1 - r), \quad \text{где} \quad \theta(r_1 - r) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < r < r_1 \\ 0 & \text{при} \quad r_1 < r < r_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Для удобства последующих сопоставлений с работой [5] примем $A = v_0^2 b \omega^2 / 2c_0^3 \rho_0$, хотя при желании можно воспользоваться соответственными выражениями для коэффициента A из работ [6, 7].

1. Перейдем теперь непосредственно к решению поставленной задачи, для чего удобно произвести следующее разбиение:

$$u(r, t) = u_{\text{ст}}(r, \infty) + u_{\text{н}}(r, t), \quad K(t) = K_{\text{ст}}(\infty) + K_{\text{н}}(t).$$

Потребуем, чтобы $u_{\text{ст}}(r, \infty)$ удовлетворяло «стационарному» уравнению:

$$-\frac{a^2}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{du_{\text{ст}}}{dr}\right) = A \cdot \theta(r_1 - r) - K(\infty). \qquad (4)$$

Должны выполняться граничные условия $|u_{\text{ст}}(0)| < \infty$, $u_{\text{ст}}(r_0) = 0$ и дополнительное условие равенства нулю полного потока через поперечное сечение трубы:

$$\int_0^{r_0} r u_{\text{ст}}(r)\, dr = 0. \qquad (5)$$

В такой постановке задача для $u_{\text{ст}}(r)$ полностью совпадает с той задачей, которая рассматривалась в работе [5]. Необходимо, однако заметить, что константа $K(\infty)$ характеризует собой степень влияния источника звука и стенок трубы на радиальное распределение скорости акустического ветра, и поэтому может быть определена из граничных условий и дополнительного условия (5), примененных непосредственно к уравнению (4). В отличие от Эккарта, мы определим $K(\infty)$ без нахождения явного вида решения уравнения (4). Здесь эта операция не является необходимой, однако такой подход, который удобнее всего проследить на этом простом примере, позволит нам впоследствии получить решение нестационарной задачи.

Как нетрудно показать, дополнительное условие (5) вместе с граничными условиями приводит к следующим ограничениям, наложенным на первую и вторую производные:

$$\int_0^{r_0} r^2 \frac{du_{\text{ст}}}{dr}\, dr = 0; \quad \int_0^{r_0} r^3 \frac{d^2 u_{\text{ст}}}{dr^2}\, dr = 0. \qquad (6)$$

Умножая теперь обе части уравнения (4) последовательно на r и r^3 и интегрируя в пределах от 0 до r_0 с использованием соотношений (6), получим простые выражения:

$$-a^2 r_0 \frac{du_{\text{ст}}(r_0)}{dr} = A \frac{r_1^2}{2} - K(\infty) \frac{r_0^2}{2}, \quad -a^2 r_0^3 \frac{du_{\text{ст}}(r_0)}{dr} = A \frac{r_1^4}{4} - K(\infty) \frac{r_0^4}{4}$$

и после исключения $du_{ст}(r_0)/dr$ найдем

$$K(\infty) = A\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\left[2-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Подставляя значение (8) в уравнение (4), после двукратного интегрирования с использованием граничных условий для определения констант, получим известное решение Эккарта:

$$\frac{u_{ст}(r,\infty)}{u_0} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)-\left(1-\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)-\ln\frac{r_1}{r_0} & \text{при } 0<r<r_1, \\ -\left(1-\frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)-\ln\frac{r}{r_0} & \text{при } r_1<r<r_0, \end{cases} \tag{9}$$

где $u_0 = Ar_1^2/2a^2$. В дальнейшем нам потребуется еще одна форма записи решения (9), к получению которой мы сейчас и переходим.

Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\frac{d}{dr}\left(r^3\frac{dy}{dr}\right)+\lambda r^3 y = 0 \quad |y(0)|<\infty, \quad y'(r_0)=0. \tag{10}$$

Из теории общего уравнения для специальных функций следует, что система собственных функций краевой задачи (10)

$$y_0 = 1, \quad y_n = J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r\right)\Big/\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r, \quad n = 1, 2, 3\ldots, \tag{11}$$

отвечающих собственным значениям

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3\ldots, \tag{12}$$

является полной и ортогональной с весом r^3 на отрезке $[0, r_0]$. Здесь $\mu_n^{(2)}$— корни функции Бесселя второго порядка.

На основе решения (9) введем новую функцию $\Phi(r)$ по следующему правилу:

$$\Phi(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{u_{ст}}{u_0}\right). \tag{13}$$

Отметим, что выражение для $\Phi(r)$ имеет гораздо более простой вид по сравнению с формулой (9), и потому может быть легко разложено в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций (11). После вычисления квадратов норм и коэффициентов разложения получим

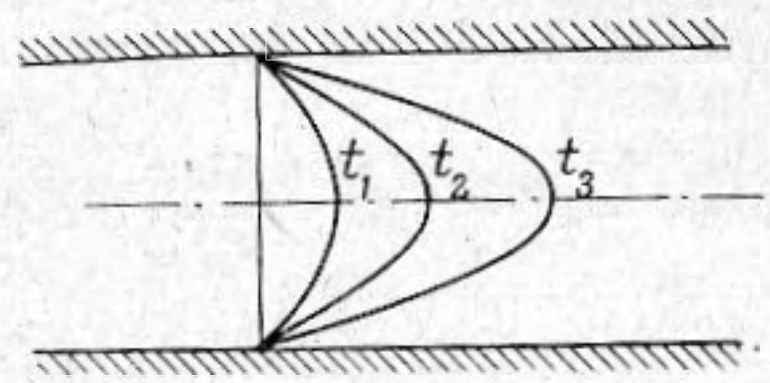
$$\Phi(r) = \frac{2}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_n^{(2)})}\left[J_0(\mu_n^{(2)})-2\frac{J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r_1\right)}{\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r_1}\right]\frac{J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r\right)}{\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r}. \tag{14}$$

Возвращаясь теперь в формуле (14) к стационарной скорости акустического течения и определяя единственную константу интегрирования из условия $u_{ст}(r_0) = 0$, найдем требуемую форму представления решения (9):

$$\frac{u_{ст}(r)}{u_0} = 4\frac{r_0}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_n^{(2)})^3 J_1^2(\mu_n^{(2)})}\times$$
$$\times\left[J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r_1\right)-\frac{\mu_n^{(2)}}{2}\frac{r_1}{r_0}J_0(\mu_n^{(2)})\right]\cdot\left[J_0\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}r\right)-J_0(\mu_n^{(2)})\right]. \tag{15}$$

Заметим, что в выражении (15) легко обнаруживаются известные предельные переходы. Скорость потока обращается в нуль при $r_1 = r_0$ за счет выражения в первых квадратных скобках. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться рекуррентными формулами для функций Бесселя. Скорость потока равна нулю и при $r = r_0$. Это сразу видно из второй квадратной скобки решения (15). Наконец, равенство нулю полного потока через поперечное сечение трубы (5) проверить гораздо проще, если исходить из решения в форме (15).

2. Хорошо известно, что при изучении как стационарных, так и нестационарных акустических течений следует различать два случая [2]. Наиболее простым и легко поддающимся аналитическому рассмотрению является случай $K(t) = 0$. Однако он мало интересен, поскольку реализуется лишь при отсутствии различного рода перегородок и препятствий в трубе, в то время как источник звука представляет собой непроницаемую для потока стенку, расположенную при $z = 0$. Этот случай, и только он, рассматривался в работе [4]. К сожалению, ее авторы предположили, что звуковой пучок полностью заполняет трубу, т. е. $r_1 = r_0$, и не привели никакой обозримой формулы для скорости потока. В то же время уравнение (2) с граничными условиями $|u(0, t)| < \infty$, $u(r_0, t) = 0$ и нулевым начальным условием в случае $K(t) = 0$ без труда решается с помощью метода разделения переменных. Мы приведем лишь окончательный результат:



Фиг. 1

$$\frac{u(r, t)}{u_0} = 4\,\frac{r_0}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r_1\right)J_0\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}r\right)}{(\mu_n^{(0)})^3 J_1^2(\mu_n^{(0)})}\left[1 - e^{-\left(\frac{\mu_n^{(0)}}{r_0}\right)^2 a^2 t}\right]. \quad (16)$$

Здесь $\mu_n^{(0)}$ — корни функции Бесселя нулевого порядка и, вообще говоря, $r_0 \neq r_1$.

На фиг. 1 изображены профили скорости потока в соответствии с выражением (16) для трех последовательных моментов времени: $t_3 > t_2 > t_1$.

Исходя из формулы (16), можно оценить τ_1 — характерное время установления течения для данного случая:

$$\tau_1 \sim \frac{r_0^2}{(\mu_1^{(0)})^2}\,\frac{\rho_0}{\eta}. \quad (17)$$

Этот результат несколько отличается от оценки, сделанной в работе [4].

Другой случай, когда градиент динамического давления потока $K(t) \neq 0$, наиболее интересен, т. к. именно он реализуется в эксперименте. Поскольку мы уже провели разбиение функций $u(r, t)$ и $K(t)$ на стационарную и нестационарную части и отождествили $u_{ст}(r, \infty)$ с известным решением Эккарта, требуется поставить задачу для нестационарной поправки $u_н(r, t)$. Вычитая уравнение (4) из уравнения (2), получим

$$\frac{\partial u_н}{\partial t} - a^2\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -K_н(t). \quad (18)$$

Граничное условие на стенке трубы и дополнительное условие равенства нулю потока через поперечное сечение трубы имеют место по-прежнему, зато начальное условие становится неоднородным:

$$u_н(r, 0) = -u_{ст}(r, \infty). \quad (19)$$

Применяя к уравнению (18) метод определения функции $K_н(t)$, развитый выше на примере решения стационарной задачи, получим аналог фор-

мулы (8) для нестационарной части градиента давления:

$$K_{\text{н}}(t) = \frac{4}{r_0^4} \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} r^3 u_{\text{н}}(r, t)\, dr. \tag{20}$$

Итак, задача свелась к отысканию решения следующего интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u_{\text{н}}}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u_{\text{н}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{н}}}{\partial r} \right) + \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 \frac{\partial u_{\text{н}}}{\partial t}\, dr = 0. \tag{21}$$

Будем искать его частное решение в виде $u_{\text{н}}(r, t) = R(r)T(t)$. Тогда для функции $R(r)$ получим такую краевую задачу:

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda R + \frac{4\lambda}{r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 R(r)\, dr = 0, \quad R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \tag{22}$$

Система собственных значений задачи (22) имеет вид

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{23}$$

Наконец, напишем систему собственных функций, отвечающих собственным значениям системы (23):

$$R_n = J_0 \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r \right) - J_0(\mu_n^{(2)}) \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

В силу линейности уравнения (22) линейная комбинация его частных решений также будет решением этого уравнения, и поэтому можно написать:

$$u_{\text{н}}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}\right)^2 a^2 t} \left\{ J_0 \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r \right) - J_0(\mu_n^{(2)}) \right\}, \tag{24}$$

где коэффициенты C_n выбираются так, чтобы выполнялось начальное условие (19).

Значение коэффициентов C_n нетрудно определить из сопоставления формулы (24), в которой надо положить $t = 0$, с выражением (15), представляющим собой не зависящую от времени часть решения исходной задачи. В обоих случаях разложение проведено по одним и тем же функциям от r, так что искомые коэффициенты C_n просто равны соответствующим коэффициентам в формуле (15).

Таким образом, нестационарная задача для случая $K(t) \neq 0$ решена полностью. Окончательное выражение для скорости акустического потока имеет вид

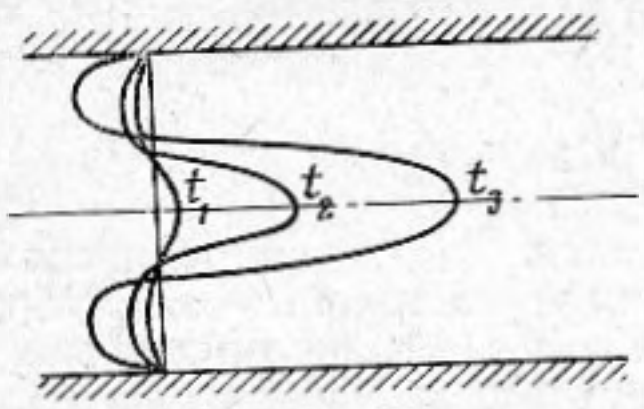
$$\frac{u(r, t)}{u_0} = 4 \frac{r_0}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(2)})^3 J_1^2(\mu_n^{(2)})} \left[J_1 \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r_1 \right) - \frac{\mu_n^{(2)}}{2} \frac{r_1}{r_0} J_0(\mu_n^{(2)}) \right] \times$$
$$\times \left[1 - e^{-\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0}\right)^2 a^2 t} \right] \cdot \left[J_0 \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{r_0} r \right) - J_0(\mu_n^{(2)}) \right]. \tag{25}$$

Формула (25) при $t \to \infty$ переходит в формулу (15) или эквивалентное последней выражение (9). Координатная часть формулы (25) сохраняет все свойства решения (15). В соответствии с выражением (25) на фиг. 2 проведено построение профилей скорости потока для трех моментов времени $t_3 > t_2 > t_1$.

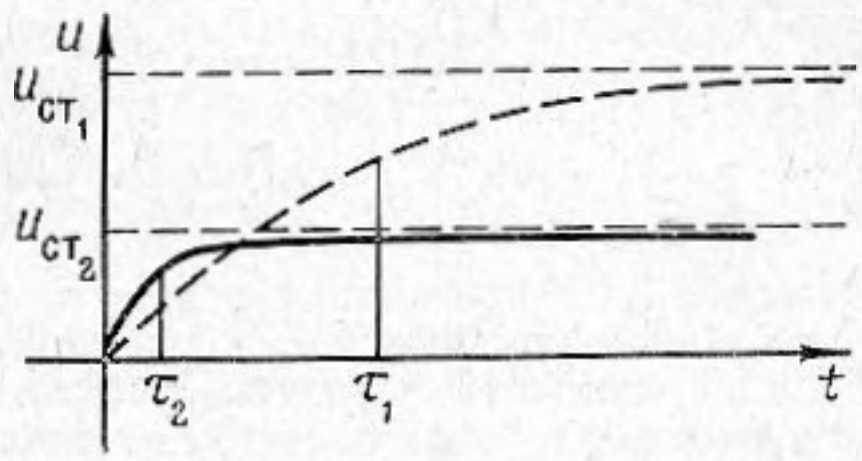
Характерное время установления акустического ветра, как следует из решения (25), оценивается выражением:

$$\tau_2 \sim \frac{r_0^2}{(\mu_1^{(2)})^2} \frac{\rho_0}{\eta} \tag{26}$$

и отличается от времени, определяемого формулой (17), причем $\tau_2 < \tau_1$. Это различие не является случайным и связано с тем, что при $K(t) \neq 0$, в отличие от первого случая $K(t) = 0$, учитывается влияние источника звука на скорость акустического ветра, и в любой момент времени выпол-



Фиг. 2



Фиг. 3

няется условие равенства нулю полного потока через поперечное сечение трубы.

Отметим, что в рамках развитой выше теории процесс установления акустического ветра во всех случаях носит монотонный характер. На фиг. 3 построены графики зависимости от времени скорости потока в некоторой фиксированной точке (например, на оси трубы). Пунктирная линия соответствует значению $K(t) = 0$, а сплошная — $K(t) \neq 0$.

В заключение следует подчеркнуть, что особый интерес представляет исследование часто наблюдаемой в экспериментальных условиях немонотонной зависимости скорости акустического ветра от времени [3]. Однако эта проблема выходит за рамки принятых в настоящей теории допущений, сформулированных при переходе от системы уравнений (1) к уравнению (2), и требует специального рассмотрения.

Авторы благодарят Д. П. Костомарова и Р. В. Хохлова за полезные дискуссии по предмету настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. «Физическая акустика». Под ред. У. Мезона, т. II, ч. Б. М. «Мир», 1969.
3. Н. Г. Семенова. Экспериментальное изучение некоторых случаев акустических течений (канд. диссертация). М., Акустический ин-т АН СССР, 1969.
4. Н. Г. Семенова, Ю. Г. Статников. Об установлении акустических течений. Акуст. ж., 1968, **14**, 2, 300—302.
5. C. Eckart. Vortices and streams caused by sound waves. Phys. Rev., 1948, **73**, 68—76.
6. К. А. Наугольных. К вопросу о потоках, вызванных звуком. Докл. АН СССР, 1958, **123**, 1003—1005.
7. Ю. Г. Статников. Потоки, вызванные звуком конечной амплитуды. Акуст. ж., 1967, **13**, 1, 146—148.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 12 декабря 1969 г.