АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 1

УДК 534.26

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ЖЕСТКОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. М. Астапенко, Б. М. Шлиомович

Задача дифракции плоской волны на гофрированной поверхности, сведенная к рекуррентной последовательности краевых задач, решается в длинноволновом приближении. Метод основан на применении конформных отображений к первой задаче рекуррентной последовательности. Находится присоединенная масса и последующие коэффициенты формы, через которые определяется коэффициент отражения до пятого приближения по волновому числу.

Пусть на цилиндрическую поверхность, имеющую период по y и параллельную оси z, падает плоская волна, параллельная плоскости $z = 0$, с давлением

$$p_0 = e^{-ik(\alpha x - \beta y)}, \tag{1}$$

где k — волновое число, α и β — направляющие косинусы $(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$. Пусть, далее, поверхность жесткая и ее период равен $2c$. Рассмотрим соответствующую задачу на плоскости. Пусть периодическая по y кривая $\Gamma = \{x, y\colon x = \xi(y),\ \xi(y + 2c) \equiv \xi(y),\ \xi(c) = 0,\ \xi(y) \geqslant 0,\ -\infty < y < \infty\}$ непрерывна и ее участки выпуклы там, где $\xi \neq 0$ (фиг. 1) и имеют оси симметрии, параллельные оси x. Справа из области $D = \{x, y\colon x > \xi(y)\}$ на эту границу падает плоская волна (1). Требуется найти решение p уравнения Гельмгольца $(\Delta + k^2)p(x, y) = 0$ в области D, непрерывное в $D + \Gamma$ и удовлетворяющее граничному условию Неймана $\partial p / \partial n|_\Gamma = 0$, условию квазипериодичности в D, т. е. $p(x, y + 2c) = p(x, y)e^{-2ik\beta c}$ и условию погашаемости Малюжинца в D:

$$|(p - p_0)e^{-ik\beta y}| < \infty \text{ при } \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k|.$$

Предположим дополнительно, что решение этой задачи регулярно по k в круге $|k| < \pi / 2c$. Тогда, как показано в работе [1], решение этой задачи, представленное в виде

$$p = p_0 + \frac{\alpha + i\sum\limits_{q=1}^{\infty} B_{2q-1}k^{2q-1}}{\alpha - i\sum\limits_{q=1}^{\infty} B_{2q-1}k^{2q-1}}\, e^{ik(\alpha x + \beta y)} + e^{ik\beta y}\sum_{q=1}^{\infty} u_q k^q \tag{2}$$

сводится к решению некоторой рекуррентной последовательности краевых задач A_q $(q = 1, 2, \ldots)$ для u_q, причем задача A_1 ставится для уравнения Лапласа, а остальные — для уравнения Пуассона.

В настоящей работе решение задачи A_1 получено конформным отображением области D на полуплоскость, а решения задач A_2 и A_3 достаточно

обозримо выражены через решение задачи A_1. Решение этих трех задач позволяет найти коэффициент отражения, фигурирующий в выражении (2), с точностью до k^5. Легко видеть, что для достижения указанной точности при $\alpha \neq 0$ в коэффициенте отражения достаточно знать только B_1 и B_3. Ниже будет получено представление величин B_1 и B_3 через решения задач $A_1 - A_3$.

Задача A_1. Найти функцию $u_1(x, y)$, гармоническую в области D, т. е.

$$\Delta u_1 = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющую краевому условию Неймана

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_\Gamma = -i\beta \frac{\partial y}{\partial n}, \tag{4}$$

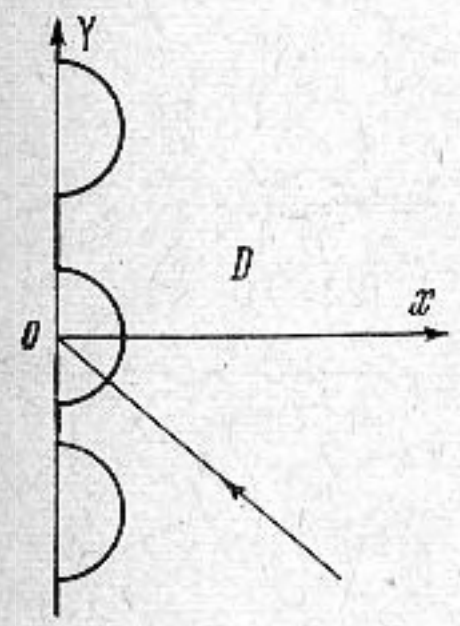
периодическую с периодом $2c$ по y

$$u_1(x, y + 2c) \equiv u_1(x, y) \tag{5}$$

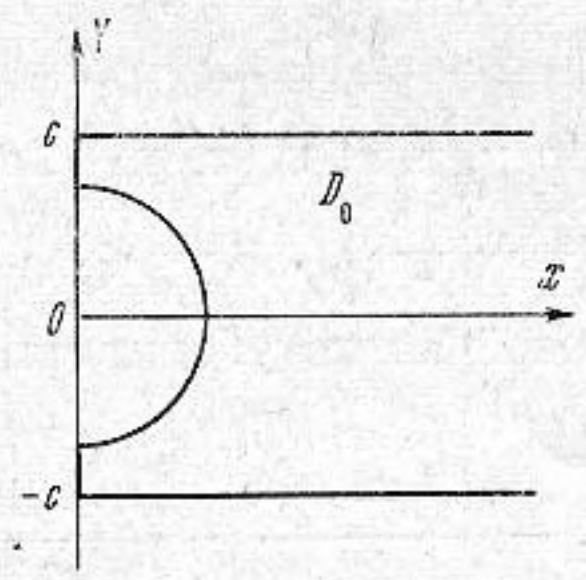
и убывающую по x по закону

$$u_1 = O(e^{-x\pi/c}), \quad x \to \infty. \tag{6}$$

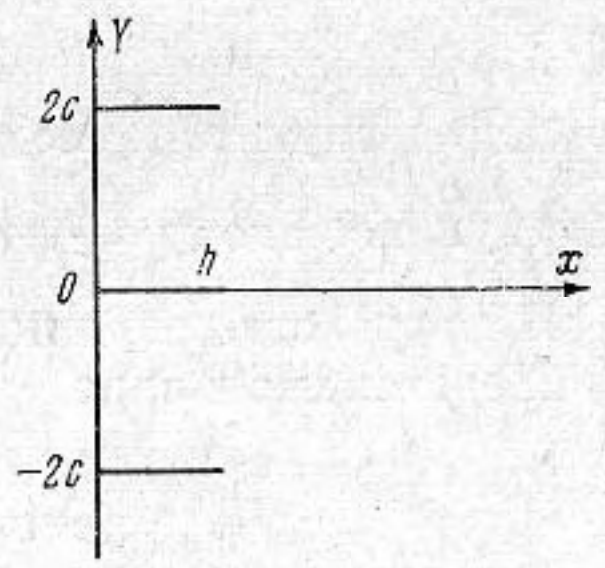
Значения искомой функции u_1, как следует из формулы (4), чисто мнимы. Представим u_1 в виде $u_1 = -i\beta\varphi_1$. Тогда действительная функция φ_1



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

является решением задачи A_1' с упрощенным краевым условием

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right|_\Gamma = \frac{\partial y}{\partial n}, \tag{7}$$

причем условия (3), (5) и (6) налагаются на φ_1 без изменения. Функцию φ_1 получим с помощью конформного отображения w области $D_0 = \{z = x + iy : (x, y) \in D, \ |y| < c\}$ на полуполосу G_0 (фиг. 2) $\{w: |\operatorname{Re} w| < c, \ \operatorname{Im} w > 0\}$. Заметим, что функция w_1, продолжающая w по принципу симметрии, отображает всю область D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что условия (3), (7) и (5) выполняются для функции $\operatorname{Re} w_1 + y$. Потребовав от w_1 выполнения условия $\left|\frac{dw_1}{dz}\right|_{z=\infty} < \infty$, получим и оценку (6).

Итак, в силу единственности решения задачи A_1 [1], искомая функция φ_1 есть $\operatorname{Re} w_1 + y$, а функцию w_1 можно представить в виде

$$w_1(z) = iz + [\varphi_1 + i(\psi_1 + C)], \tag{8}$$

где ψ_1 — некоторая гармоническая в D функция, обладающая свойствами

$$\psi_1|_\Gamma = -x - C, \quad \lim_{x\to\infty} \psi_1(x, y) = 0, \tag{9}$$

а C — действительная постоянная, получаемая по формуле Грина для ψ_1 и x из формул (9) и уравнений Коши — Римана, и имеющая явный вид

$$C = -\frac{\lambda_y + M_1}{4c}, \tag{10}$$

где $M_1 = \int\limits_{\Gamma_0} x \frac{\partial x}{\partial n} dl$, $\Gamma_0 = \{x, y : (x, y) \in \Gamma, |y| < c\}$, $\lambda_y = -2 \int\limits_{\Gamma_0} \varphi_1 \frac{\partial y}{\partial n} dl$.

Числа $2M_1$ и λ_y имеют физический смысл [2] массы и присоединенной массы соответственно для элемента решетки, заключенной между исходной гофрированной поверхностью и ее отражением по оси x.

Задача A_2. Найти функцию $u_2(x, y)$, удовлетворяющую в области D уравнению Пуассона $\Delta u_2 = -2\beta^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, граничному условию Неймана на Γ

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_\Gamma = -\beta^2 \frac{\partial y}{\partial n} \varphi_1 + (\alpha^2 x + B_1) \frac{\partial x}{\partial n},$$

где B_1 из формулы (2) имеет вид [1]

$$B_1 = \frac{\beta^2 \lambda_y - \alpha^2 M_1}{4c},$$

периодическую с периодом $2c$ по y, т. е. $u_2(x, y + 2c) \equiv u_2(x, y)$, и убывающую по закону $u_2 = O\left(\exp\left(-\frac{x\pi}{c}\right)\right)$, $x \to \infty$.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение задачи A_2 представимо в виде

$$u_2 = \varphi_2 + \beta^2 \left(x\psi_1 - \frac{\varphi_1^2 - \psi_1^2}{2} - \frac{\lambda_y + M_1}{4c} \psi_1\right), \tag{11}$$

где функция φ_2 удовлетворяет условию (3) в D, (5), (6) и граничному условию Неймана на Γ вида

$$\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right|_\Gamma = \left(x - \frac{M_1}{4c}\right) \frac{\partial x}{\partial n}. \tag{12}$$

Задача A_3. Найти функцию $u_3(x, y)$, удовлетворяющую в области D уравнению Пуассона $\Delta u_3 = -2i\beta \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\alpha^2}{2} \varphi_1\right)$, граничному условию Неймана на Γ

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_\Gamma = i\beta \left(-u_2 + \frac{\alpha^2}{2} x^2 + B_1 x\right) \frac{\partial y}{\partial n},$$

периодическую в D, т. е. $u_3(x, y + 2c) \equiv u_3(x, y)$, и убывающую по закону $u_3 = O(e^{-x\pi/c})$, $x \to \infty$.

Справедливо представление решения этой задачи в виде

$$u_3 = i\beta \left\{\varphi_3 + \beta^2 \left[\frac{\varphi_1^3 - 3\varphi_1\psi_1^2}{6} + \frac{\lambda_y + M_1}{4c} \varphi_1 (\psi_1 + x) - x\varphi_1 \left(\psi_1 + \frac{x}{2}\right)\right]\right\}, \tag{13}$$

где функция φ_3 есть решение следующей краевой задачи:

$$\Delta\varphi_3 = -2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \varphi_1, \quad (x, y) \in D,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\right|_\Gamma = \left[-\varphi_2 + x\left(\frac{x}{2} - \frac{M_1}{4c}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial n}, \quad (x, y) \in \Gamma, \tag{14}$$

$$\varphi_3(x, y + 2c) \equiv \varphi_3(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$\varphi_3 = O(e^{-x\pi/c}), \quad x \to \infty, \quad (x, y) \in D.$$

Обратимся теперь снова к представлению (2) полного поля. В направлении возрастания x распространяется без затухания [1] только второе слагаемое, представляющее собой отраженную волну, и параметр B_3, дающий коэффициент отражения с точностью до k^5, имеет явное выражение:

$$B_3 = \frac{\alpha^4}{3c} M_3 + \frac{\alpha^2}{2c} M_2 B_1 - \frac{\alpha^2}{2c}\mu_2{}^1 - \frac{i\beta}{2c}\lambda_3{}^0 + \frac{i\beta\alpha^2}{4c}\lambda_1{}^2, \tag{15}$$

где

$$M_p = \int\limits_{\Gamma_0} x^p \frac{\partial x}{\partial n} dl, \quad p = 2, 3,$$

$$\mu_2{}^1 = \int\limits_{\Gamma_0} x u_2 \frac{\partial x}{\partial n} dl,$$

$$\lambda_p{}^q = \int\limits_{\Gamma_0} x^q u_p \frac{\partial y}{\partial n} dl, \quad q = 0,2, \quad p = 1,3.$$

Хотя в последнем равенстве присутствует u_3, можно определить $\lambda_3{}^0$, зная только лишь φ_1 в D_0 и φ_2 на Γ_0, что избавит нас от решения задачи (15). Для этого подставим в интеграл вместо u_3 ее выражение (13) и применим формулу Грина к функциям φ_1 и $\varphi_3 - y\varphi_2$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_0} \varphi_3 \frac{\partial y}{\partial n} dl = \int\limits_{\Gamma_0} \left\{y\varphi_2 \frac{\partial y}{\partial n} + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial n}\left[xy\left(\frac{x}{2} - \frac{M_1}{4c}\right)\right]\right\} dl +$$

$$+ 2c\int\limits_0^\infty \varphi_2(x, c)\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} dx - \iint\limits_{D_0} \varphi_1{}^2 dx\, dy,$$

что делает очевидным наше утверждение.

Итак, зная конформное отображение w: $D_0 \to G_0$ (фиг. 2), мы получаем первый член u_1 дифракционной части поля (2) и вдобавок коэффициент отражения с точностью до k^2. Найдя дополнительное решение φ_2 краевой задачи для уравнения Лапласа (3), (5), (6), (12), мы получаем второй член u_2 дифракционной части поля и коэффициент отражения с точностью до k^5. Для нахождения третьего приближения u_3 дифракционной части поля приходится решать краевую задачу (14) для уравнения Пуассона. Как известно (см., например, [3]), для задач типа (3), (12), (5), (6) и (14) существуют удобные численные итерационные методы, что является хорошим преимуществом.

Частный случай. Рассмотрим гофрированную поверхность типа гребешка, для которой Γ имеет вид (фиг. 3).

$$\Gamma = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{x, y : 0 \leqslant x \leqslant h, \ y = 2cn\} \cup \{x, y : x = 0, \ -\infty < y < \infty\}.$$

Все приведенные выше рассуждения справедливы для области D, лежащей справа от Г, причем в данном случае конформное отображение w есть

$$w = \frac{2ic}{\pi} \operatorname{ar\,ch} \frac{\operatorname{ch}(\pi z/2c)}{\operatorname{ch}(\pi h/2c)}, \tag{16}$$

и вдоль границы Г выполняется свойство

$$x \frac{\partial x}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} \equiv 0, \quad y \frac{\partial y}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} \equiv 0, \tag{17}$$

избавляющее нас от вычисления многих интегралов по Г и решения некоторых неоднородных краевых задач.

Так как w имеет также эквивалентный формуле (16) вид

$$w = \frac{2ic}{\pi}\left[\ln\left(\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2c} + \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi z}{2c} - \operatorname{ch}^2\frac{\pi h}{2c}}\right) - \ln\operatorname{ch}\frac{\pi h}{2c}\right],$$

то, в силу формул (8), (10), (17), мы получаем $\lambda_y = (8c^2/\pi)\ln\operatorname{ch}\pi h/2c$, что совпадает с результатом, полученным в работе [2] для обтекания решетки, соответствующей избранному частному случаю.

Изученные ранее величины и функции равны соответственно

$$B_1 = \frac{2\beta^2 c}{\pi}\ln\operatorname{ch}\frac{\pi h}{2c}, \quad \varphi_2 \equiv 0,$$

$$B_3 = \frac{2}{3}\beta^4\left(\frac{\lambda_y}{4c}\right)^3 + \beta^2\frac{\lambda_1^2}{2c} - \frac{\beta^2}{2c}\iint\limits_{D_0}\varphi_1^2\,dx\,dy.$$

Чтобы избавиться от интегрирования φ_1 по всей области D_0 в последней формуле, введем функцию $\psi(x, y)$, удовлетворяющую в D уравнению Пуассона $\Delta\psi = \varphi_1$, условию периодичности $\psi(x, y + 2c) \equiv \psi(x, y)$ и условию на бесконечности $\psi = O(x)$, $x \to \infty$, и применим формулу Грина к ψ и φ. Тогда

$$\iint\limits_{D_0}\varphi_1^2\,dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_0}\left(\varphi_1\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial y}{\partial n}\right)dl. \tag{18}$$

Функцию же ψ можно построить методом, приведенным в работе [4].

Рассмотрим аналитическую в D функцию

$$\vartheta(z) = \rho_1 + i\zeta_1 = \int[w(z) - iz]\,dz, \quad \vartheta(z + 2ic) \equiv \vartheta(z). \tag{19}$$

Прямым расчетом (см. формулу (8)) получаем, что $\dfrac{\partial\rho_1}{\partial x} \equiv \varphi_1$, $\dfrac{\partial\rho_1}{\partial y} \equiv -\psi_1$, и функцию ψ можно принять в виде $\psi = \dfrac{x}{2}\rho_1$. Интеграл (18) получает при этом вид

$$\iint\limits_{D_0}\varphi_1^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_0}\left\{-x(\rho_1 + \varphi_1\psi_1)\frac{\partial y}{\partial n} + \varphi_1\rho_1\frac{\partial x}{\partial n}\right\}dl. \tag{20}$$

При помощи интегрирования по частям получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_0} x\rho_1\frac{\partial y}{\partial n}\,dl = -\int\limits_{\Gamma_0} x^2\varphi_1\frac{\partial y}{\partial n}\,dl,$$

а из формул (9), (10)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_0} x\varphi_1\psi_1\frac{\partial y}{\partial n}\,dl = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_0} x^2\varphi_1\frac{\partial y}{\partial n}\,dl + \frac{\lambda_y}{8c}\int\limits_{\Gamma_0} x\varphi_1\frac{\partial y}{\partial n}\,dl.$$

Последний член в формуле (20) мы также получим интегрированием по частям с использованием свойств φ_1 и Γ:

$$\int\limits_{\Gamma_0} \varphi_1 \rho_1 \frac{\partial x}{\partial n} dl = \frac{\lambda_y}{2c} \int\limits_0^c y \varphi_1 (0, y)\, dy.$$

Итак, для B_3 получена формула, содержащая интегрирование известных функций

$$\varphi_1 (x, 0) = -\frac{2c}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 (\pi h/2c) - \operatorname{ch}^2 (\pi x/2c)}}{\operatorname{ch} (\pi x/2c)},$$

$$\varphi_1 (0, y) = -\frac{2c}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 (\pi h/2c) - \cos^2 (\pi y/2c)}}{\cos (\pi y/2c)}$$

только по участкам границы Γ_0:

$$B_3 = \frac{2}{3} \beta^4 \left(\frac{\lambda_y}{4c}\right)^3 + \frac{\beta^2}{2c} \int\limits_0^h x^2 \varphi_1 (x, 0)\, dx + \beta^2 \frac{\lambda_y}{8c^2} \int\limits_0^h x \varphi_1 (x, 0)\, dx -$$

$$- \beta^2 \frac{\lambda_y}{4c^2} \int\limits_0^c y \varphi_1 (0, y)\, dy.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Астапенко, Г. Д. Малюжинец. Дифракция плоской звуковой волны на частой периодической решетке. Акуст. ж., 1970, 16, 3, 354—363.
2. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., ГТТИ, 1950.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 2. М.— Л., ГТТИ, 1951.
4. Г. В. Колосов. Применение комплексной переменной к теории упругости, М., ОНТИ, 1935.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
17 марта 1970 г.