АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 1

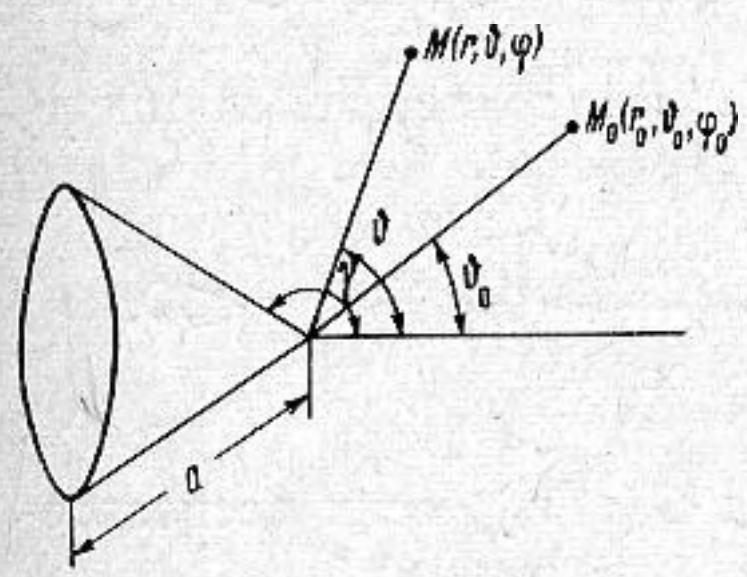
УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА КОНЕЧНОМ КОНУСЕ

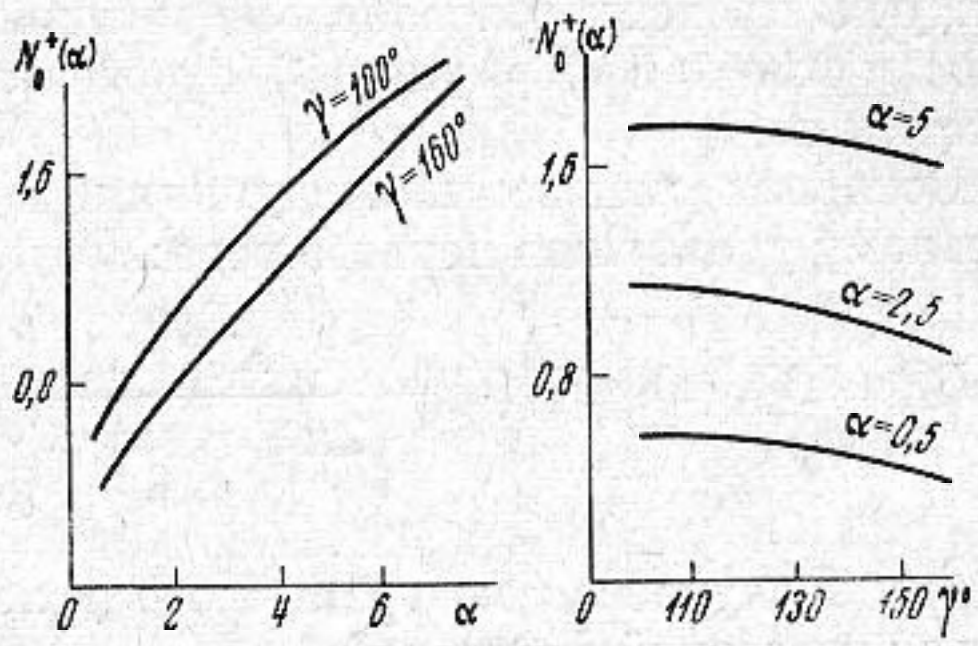
Ю. В. Вайслейб

Рассмотрена динамическая задача о функции Грина для конечной абсолютно жесткой конической воронки. В области, примыкающей к воронке, решение представлено в виде ряда по собственным функциям соответственной задачи для полубесконечного конуса, вне этой области — в виде ряда по полиномам Лежандра и функциям Ханкеля с полуцелым индексом. Коэффициенты рядов удовлетворяют бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, полученных методом факторизации в сочетании с интегральным преобразованием Конторовича — Лебедева. Подробно обсуждены свойства этих систем и приведено их приближенное решение в случае, когда длина падающей волны значительно превосходит длину образующей конуса.

Дифракция звуковых и электромагнитных волн на конечных телах с коническими и клиновидными границами продолжает привлекать внимание исследователей, несмотря на значительное число работ, посвященных этой проблеме [1]. В нашей работе [2] было предложено использовать



Фиг. 1



Фиг. 2

для решения электродинамической задачи об осевом возбуждении идеально проводящего конечного конуса метод Винера — Хопфа в сочетании с интегральным преобразованием Конторовича — Лебедева. Позднее, в работе [3] близким методом было исследовано осесимметричное возбуждение конической плазменной оболочки. Целью настоящей работы является построение на основе указанного метода строгого решения задачи о дифракции звуковых волн на конечном конусе.

Мы будем искать функцию $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)$, удовлетворяющую неоднородному уравнению Гельмгольца $(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ во всем пространстве вне конуса $\vartheta = \gamma$, $r \leqslant a$, ограниченную и подчиняющуюся условию $\frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) = 0$ на его поверхности, и стремящуюся к нулю при $r \to \infty$ $(\operatorname{Im} k > 0)$. Функция $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)$ есть функция Грина соответственной динамической задачи Неймана и сформулированные выше условия гарантируют ее существование и единственность. Очевидно, $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)$ описывает

поле точечного звукового излучателя, помещенного в точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ над конечной конической воронкой (фиг. 1).

Положим

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) = \frac{e^{-sR_0}}{4\pi R_0} + u(r); \quad R_0 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\beta_0},$$

$$\cos\beta_0 = \cos\vartheta_0\cos\vartheta + \sin\vartheta_0\sin\vartheta\cos(\varphi_0 - \varphi); \; s = ik(\operatorname{Re} s > 0), \quad (1)$$

и учитывая симметрию задачи относительно плоскости $\varphi = \varphi_0$, разложим $u(r)$ в ряд Фурье по четным азимутальным гармоникам:

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r, \vartheta)\cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (2)$$

Коэффициенты ряда (2) напишем в виде интегралов типа Конторовича — Лебедева:

$$u_m(r, \vartheta) = \frac{1}{i\pi\sqrt{r}}\int_C \alpha I_\alpha(sr)\, N_m(\alpha)\frac{P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\vartheta)}{\frac{\partial}{\partial\gamma}P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\gamma)} F_m(\alpha)\, d\alpha, \quad (3)$$

где

$$N_m(\alpha) = -\frac{(-1)^m\pi\sin\gamma}{2\cos\pi\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+\alpha\right)}\frac{\partial}{\partial\gamma}P^{-m}_{\alpha-1/2}(\cos\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma}P^{-m}_{\alpha-1/2}(-\cos\gamma), \quad (4)$$

$$F_m(\alpha) = \int_0^a [u_m(r, \gamma - 0) - u_m(r, \gamma + 0)]\, K_\alpha(sr)\frac{dr}{\sqrt{r}}, \quad (5)$$

контур C проходит параллельно мнимой оси в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < 1/2$, а знаки плюс и минус в формуле (3) относятся к областям $\vartheta < \gamma$ и $\vartheta > \gamma$ соответственно.

Основная неизвестная функция задачи $F_m(\alpha)$ удовлетворяет интегральному уравнению первого рода:

$$\int_C \alpha I_\alpha(sr)\, N_m(\alpha)\left[F_m(\alpha) - \frac{\varepsilon_m K_\alpha(sr_0)}{2\pi\sqrt{r_0}\sin\gamma}\frac{P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\vartheta)}{\frac{\partial}{\partial\gamma}P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\gamma)}\right]d\alpha = 0, \; r \leqslant 0, \quad (6)$$

которое получается из граничного условия для $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)$, если воспользоваться известной формулой:

$$\frac{e^{-sR_0}}{R_0} = -\frac{i}{\sqrt{rr_0}}\int_C \alpha I_\alpha(sr)\, K_\alpha(sr_0)\sec\pi\alpha P_{\alpha-1/2}(-\cos\beta_0)\, d\alpha,$$

а также теоремой сложения для функций Лежандра [4]. Здесь ε_m — символ Неймана, а знаки $\pm$ относятся к случаям $\vartheta_0 < \gamma$ и $\vartheta_0 > \gamma$ соответственно. Интегральное уравнение (6) эквивалентно функциональному уравнению

$$N_m(\alpha)\left[F_m(\alpha) - \frac{\varepsilon_m K_\alpha(sr_0)}{2\pi\sqrt{r_0}\sin\gamma}\frac{P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\vartheta_0)}{\frac{\partial}{\partial\gamma}P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\gamma)}\right] = D(\alpha) \quad (7)$$

в некоторой полосе комплексной плоскости α при условии, что $D(\alpha)$ — целая функция, допускающая при $|\alpha| \to \infty$ асимптотическое представление

$$D(\alpha) \sim \Gamma(|\alpha|)\left(\frac{sa}{2}\right)^{-|\alpha|}\varphi(\alpha); \; \varphi(\alpha) \to 0. \quad (8)$$

В самом деле, если $D(\alpha)$ регулярна в правой полуплоскости и удовлетворяет условиям (8), контур C можно замкнуть в правой полуплоскости полуокружностью бесконечно большого радиуса и по лемме Жордана интеграл (6) равен нулю. Однако левая часть формулы (7) есть четная функция α, так что $D(\alpha)$ должна быть регулярна на всей плоскости. Далее, из условия ограниченности $u(r)$ вблизи вершины конуса, а также формулы связи между модифицированной функцией Бесселя и функцией Макдональда

$$K_\alpha(sr) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec} \pi\alpha \, [I_{-\alpha}(sr) - I_\alpha(sr)] \tag{9}$$

следует, что $F_m(\alpha)$, определяемая равенством (5), допускает представление:

$$F_m(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\Gamma(-\alpha)\left(\frac{sa}{2}\right)^{\alpha} F_m^{+}(\alpha) + \Gamma(\alpha)\left(\frac{sa}{2}\right)^{-\alpha} F_m^{-}(\alpha)\right], \tag{10а}$$

$$F_m^{\pm}(\alpha) = \Gamma(1 \pm \alpha)\left(\frac{sa}{2}\right)^{\mp\alpha} \int_0^a [u_m(r, \gamma - 0) - u_m(r, \gamma + 0)] \, I_{\pm\alpha}(sr) \frac{dr}{\sqrt{r}}, \tag{10б}$$

причем $F_m^{\pm}(\alpha)$ регулярны в полуплоскостях $\operatorname{Re}\alpha > -1/2$ и $\operatorname{Re}\alpha < 1/2$ соответственно. Поскольку функции $N_m(\alpha)$, как видно из формулы (4), регулярны в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < 1/2 + m$, мы видим, что уравнение (7) справедливо, по крайней мере, в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < 1/2$.

Равенство (7), в соответствии с принятой в работе [5] терминологией, является обобщенным уравнением типа Винера — Хопфа, и для его решения необходимо факторизовать функции $N_m(\alpha)$. Факторизация функции, равной в наших обозначениях $-N_0(\alpha)$, подробно описана в работе [6]; необходимые нам результаты получаются элементарным обобщением использованного там метода. Поэтому здесь мы отметим лишь, что факторизация выполняется методом бесконечных произведений и приведем окончательные формулы:

$$N_m(\alpha) = N_m^{+}(\alpha) N_m^{-}(\alpha), \quad N_m^{-}(\alpha) = N_m^{+}(\alpha),$$

$$N_m^{+}(\alpha) = n_m(\gamma)\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + \alpha\right) e^{\alpha\varkappa(\gamma)} \prod_k [\alpha, \alpha_k^m(\gamma)] \prod_k [\alpha, \alpha_k^m(\pi - \gamma)],$$

$$n_m(\gamma) = \left[-\frac{\sin\gamma}{2}\frac{d}{d\gamma} P_{-0,5}^{-m}(\cos\gamma)\frac{d}{d\gamma} P_{-0,5}^{-m}(-\cos\gamma)\right]^{1/2},$$

$$\varkappa(\gamma) = -\left[M(\gamma) + M(\pi - \gamma) + \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right) - \frac{\gamma}{\pi}\ln\frac{\gamma}{\pi} - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi - \gamma}{\pi}\ln\frac{\pi - \gamma}{\pi}\right],$$

$$M(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \{[x_k^m(\gamma)]^{-1} - [\alpha_k^m(\gamma)]^{-1}\}, \; x_k^m(\gamma) = \frac{\pi}{\gamma}\left(k - \frac{3}{4} + \frac{m}{2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} P_{\alpha-1/2}^{-m}(\cos\gamma)\big|_{\alpha=\alpha_k^m(\gamma)} = 0, \; \alpha_k^m(\gamma) = x_k^m(\gamma) + O(k^{-1}),$$

$$\prod_k [\alpha, \alpha_k^m(\gamma)] = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{\alpha}{\alpha_k^m(\gamma)}\right] e^{-\frac{\alpha}{\alpha_k^m(\gamma)}}$$

Функции $N_m^{+}(\alpha)$ вещественны при вещественных α, регулярны в полуплоскостях $\operatorname{Re}\alpha > -1/2 - m$ и не имеют нулей при $\operatorname{Re}\alpha > -\min[\alpha_1^m(\gamma), \alpha_1^m(\pi - \gamma)]$. При $|\alpha| \to \infty$ и $|\alpha| \gg m$

$$N_m^{+}(\alpha) = \eta_m(\gamma)\,\alpha^{1/2} + O(\alpha^{-1/2}), \tag{11}$$

$$\eta_m(\gamma) = \frac{\pi^{m-1}}{\sqrt{2}} n_m(\gamma) \widetilde{N}_m(\gamma) \widetilde{N}_m(\pi-\gamma) \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{[\gamma(\pi-\gamma)]^{m+1/2}}}, \widetilde{N}_m(\gamma) =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^m(\gamma)}{\alpha_k^m(\gamma)}.$$

При $|\alpha| \ll m$ функции $N_m^+(\alpha)$ в первом асимптотическом приближении от α вообще не зависят: $N_m^+(\alpha) = \left(\frac{1}{2} m \sin\gamma\right)^{1/2} + O(m^{-1/2})$. Зависимость $N_0^+(\alpha)$ от α и γ показана на фиг. 2 *.

Подставив выражение (10а) в уравнение (7) и (считая факторизацию выполненной) разделив обе части его на $\frac{1}{2}\Gamma(-\alpha)\left(\frac{sa}{2}\right)^{\alpha} N_m^-(\alpha)$, получим

$$N_m^+(\alpha) F_m^+(\alpha) + H_m(\alpha) = T_m(\alpha) - \frac{2D(\alpha)\left(\frac{sa}{2}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha) N_m^-(\alpha)}, \tag{7a}$$

где

$$H_m(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{sa}{2}\right)^{-2\alpha} N_m^+(\alpha) F_m^-(\alpha),$$

$$T_m(\alpha) = \frac{\varepsilon_m K_\alpha(sr_0)}{\pi\sqrt{r_0}\sin\gamma} \cdot \frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\vartheta_0)}{\frac{\partial}{\partial\gamma} P^{-m}_{\alpha-1/2}(\pm\cos\gamma)}.$$

Рассмотрим аналитические свойства функций, входящих в формулу (7а). Первый и последний члены этого уравнения регулярны и стремятся к нулю (последнее вытекает из формул (8), (11), а также из ограниченности $u(r)$ в окрестности ребра основания конуса) в полуплоскостях $\operatorname{Re}\alpha > -1/2$ и $\operatorname{Re}\alpha < \min[\alpha_1^m(\gamma), \alpha_1^m(\pi-\gamma)]$ соответственно. Функция $H_m(\alpha)$ регулярна в полосе $|\operatorname{Re}\alpha| < 1/2$ причем в левой полуплоскости ($\operatorname{Re}\alpha < 1/2$) она имеет простые полюсы в точках $\alpha = -n$; $n = 1, 2\ldots$ и $\alpha = -n - 1/2$; $n = m, m+1, \ldots$ Вычисляя вычеты в этих полюсах, найдем, что

$$H_m^+(\alpha) = -\frac{\pi(-1)^m \sin\gamma}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+\alpha} \frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} b_n^m(\gamma) F_m^+(n) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}(n+1/2)}{n+\alpha+1/2} \frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma^2(n+3/2)} C_n^m(\gamma) F_m^+(n+1/2) \right\}, \tag{12}$$

где

$$b_n^m(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+m\right)} \frac{\frac{\partial}{\partial\gamma} P^m_{n-1/2}(\cos\gamma) \frac{\partial}{\partial\gamma} P^m_{n-1/2}(-\cos\gamma)}{N_m^+(n)},$$

$$C_n^m(\gamma) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\gamma} P_n^m(\cos\gamma)\right]^2}{N_m^+(n+1/2)}$$

---

* Таблицы $N_0^+(\alpha)$, построенные на основе вышеприведенных формул, имеются в работе [7].

регулярна и стремится к нулю в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > -1$ при всех m. Аналогичными свойствами (но в левой полуплоскости) обладает функция $H_m^-(\alpha) = H_m(\alpha) - H_m^+(\alpha)$. Функция $T_m(\alpha)$ регулярна в полосе $-{}^1/_2 - m < \operatorname{Re}\alpha < \min[\alpha_1(\gamma), \alpha_1^m(\pi-\gamma)]$, в левой полуплоскости она имеет простые полюсы в точках $\alpha = -n - {}^1/_2$; $n = m, m+1, \ldots$, а в правой — такие же полюсы в точках $\alpha = \alpha_n^m(\gamma)$ или $\alpha = \alpha_n^m(\pi-\gamma)$ в зависимости от того, расположен ли источник вне ($\vartheta_0 < \gamma$) или внутри ($\vartheta_0 > \gamma$) воронки. При условии $r_0 > a$ можно положить

$$T_m^+(\alpha) = -\frac{\varepsilon_m}{2\pi\sqrt{r_0}} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{n+1/2} K_{n+1/2}(sr_0)}{(n+\alpha+{}^1/_2)\,\Gamma(n+{}^1/_2)}\, t_n^m(\gamma), \tag{13а}$$

$$t_n^m(\gamma) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos\vartheta_0)\frac{\partial}{\partial\gamma}P_n^m(\cos\gamma)}{N_m^+(n+{}^1/_2)}, \quad T_m^-(\alpha) = T_m(\alpha) - T_m^+(\alpha)$$

$T_m^+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Re}\alpha > -\frac{1}{2} - m$ и стремится к нулю при $|\alpha| \to \infty$ равномерно по α. При $r_0 \leqslant a$ ряд (13) как видно из асимптотической формулы $K_\alpha(x) = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}[1 + O(\alpha^{-1})]$ расходится и необходимо использовать более сложное разбиение, получающееся с помощью формулы (9):

$$T_m^+(\alpha) = \frac{\varepsilon}{2\pi\sqrt{r_0}\sin\gamma}\,[\widetilde{T}_m(\alpha) - \widetilde{T}_m^+(\alpha) - \pi(-1)^m \sin\gamma\, \widetilde{\widetilde{T}}_m^+(\alpha)],$$

$$\widetilde{T}_m(\alpha) = \Gamma(1+\alpha)\, I_\alpha(sr_0)\left(\frac{sa}{2}\right)^{-\alpha} N_m^+(\alpha)\, \frac{P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\vartheta_0)}{\frac{d}{d\gamma}P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\gamma)},$$

$$\widetilde{T}_m^+(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n + {}^1/_2}{\alpha - \nu_n - {}^1/_2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu_n\right)\left(\frac{sa}{2}\right)^{-\nu_n - 1/2} I_{\nu_n+1/2}(sr_0)\, N_m^+(\nu_n + {}^1/_2)\, \frac{P_{\nu_n}^m(\pm\cos\vartheta_0)}{\frac{\partial^2}{\partial\gamma\partial\nu}P_\nu^m(\pm\cos\gamma)\big|_{\nu_n}}, \tag{13б}$$

$$\widetilde{\widetilde{T}}_m^+(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-\frac{n}{2}\right)}{(n+2\alpha)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-\frac{n}{2}\right)} \frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} I_{\frac{n}{2}}(sr_0) \times$$

$$\times \frac{P_{\frac{n-1}{2}}^m(\pm\cos\vartheta_0)\frac{\partial}{\partial\gamma}P_{\frac{n-1}{2}}^m(\mp\cos\gamma)}{N_m^+\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Здесь $\nu_n = \alpha_n^m(\gamma) - {}^1/_2$ или $\nu_n = \alpha_n^m(\pi-\gamma) - {}^1/_2$ в зависимости от места расположения источника. Функция $T_m^+(\alpha)$, определенная формулой (13б), регулярна и (стремится к нулю при $|\alpha| \to \infty$) в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > -{}^1/_2$, причем это разложение справедливо при $r_0 \leqslant a$.

Группируя теперь члены уравнения (7а) с учетом произведенных выше разбиений и используя обобщенную теорему Лиувилля, мы получаем новое функциональное уравнение, которое, в отличие от (7) и (7а) со-

держит только одну неизвестную функцию $F_m^+(\alpha)$:

$$N_m^+(\alpha)F_m^+(\alpha) - \frac{\pi(-1)^m \sin\gamma}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+\alpha}\frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}b_n^m(\gamma)F_m^+(n) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}(n+{}^1/_2)}{n+\alpha+{}^1/_2}\frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma^2(n+{}^3/_2)}C_n^m(\gamma)F_m^+(n+{}^1/_2)\right\} = T_m^+(\alpha). \quad (14)$$

Как следует из этой формулы, $F_m^+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Re}\alpha > -{}^1/_2$, если $m=0$ и при $\operatorname{Re}\alpha > -\min[1, \alpha_1^m(\gamma), \alpha_1^m(\pi-\gamma)]$, если $m \geqslant 1$. Поведение ее на бесконечности определяется соотношением

$$F_m^+(\alpha) = O(\alpha^{-3/2}) \text{ при } |\alpha| \to \infty. \quad (15)$$

Уравнение (14) позволяет численным путем найти $F_m^+(\alpha)$. С этой целью необходимо положить последовательно $\alpha = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ и т. д. и решить тем или иным путем получающиеся при этом бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $F_m^+\left(\frac{n}{2}\right)$. Исследование этих систем мы проведем ниже, но сначала покажем, как искомые функции $u_m(r, \vartheta)$ выражаются через $F_m^+(\alpha)$, и выясним некоторые качественные особенности решения.

С этой целью подставим выражение (10а) в формулу (3) и напишем $u_m(r, \vartheta)$ в виде суммы

$$u_m(r, \vartheta) = u_m^1(r, \vartheta) + u_m^2(r, \vartheta), \quad (16)$$

$$u_m^{1,2}(r, \vartheta) = \mp\frac{1}{2\pi i\sqrt{r}}\int_C \Gamma(1\mp\alpha)I_{\pm\alpha}(sr)\left(\frac{sa}{2}\right)^{\pm\alpha}N_m(\alpha)F_m^+(\alpha)\times$$

$$\times\frac{P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\vartheta)}{\frac{\partial}{\partial\gamma}P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\gamma)}d\alpha.$$

На основании оценки (15) и асимптотической формулы

$$I_{\alpha(x)} \sim \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \text{ при } |\alpha| \to \infty$$

контуры интегрирования в обоих случаях можно при выполнении условия $r < a$ замкнуть в правой полуплоскости и применить теорему о вычетах. Подынтегральное выражение в формуле для $u_m^1(r, \vartheta)$ имеет в правой полуплоскости простые полюсы в точках $\alpha = n/2$, $n = 1, 2 \ldots$. Для вычисления $u_m^2(r, \vartheta)$ изменим знак перед α в формуле (14) и будем рассматривать полученное уравнение как определяющее $F_m^-(\alpha)$. При этом оказывается, что подынтегральное выражение в формуле для $u_m^2(r, \vartheta)$ имеет помимо указанных выше полюсов еще и простые полюсы в корнях функции $\frac{\partial}{\partial\gamma}P_{\alpha-1/2}^{-m}(\cos\gamma)$ или $\frac{\partial}{\partial\gamma}P_{\alpha-1/2}^{-m}(-\cos\gamma)$ в зависимости от расположения точки наблюдения. Вклады от полюсов первого типа полностью компенсируют как друг друга, так и первый член в формуле (1) для $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0)$, так что окончательное выражение для функции Грина в области $r < a$ имеет вид

$$G(\mathbf{r}/\mathbf{r}_0) = \delta_{1q}\zeta\left(\frac{r_0}{a}\right)G_{\inf} + G_k, \quad (17)$$

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}, \quad q = sgn\,\frac{\gamma - \vartheta_0}{\gamma - \vartheta}$$

δ_{1q} — символ Кронекера,

$$G_{\inf} = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_0) \int_C \alpha \frac{J_\alpha(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_\alpha^{(1)}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + m + \alpha\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - \alpha\right) P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\vartheta_0) \left[P_{\alpha-1/2}^{-m}(\mp\cos\vartheta) - P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\vartheta) \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\frac{d}{d\gamma} P_{\alpha-1/2}^{-m}(\mp\cos\gamma)}{\frac{d}{d\gamma} P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\gamma)}\right] d\alpha,$$

$$G_k = \frac{\sin kr}{kr} \left\{\delta_{1,1-q}\zeta\left(\frac{a}{r_0}\right) \frac{e^{ikr_0}}{4\pi r_0} + \frac{N^+\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a}} \left[H_m^+\left(-\frac{1}{2}\right) - T_m^+\left(-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\right)\right] \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{ctg} 2}\right\} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \frac{J_{\nu_n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_{\nu_n}^m(\pm\cos\vartheta) \times$$

$$\times \frac{N_m^+(\nu_n + 1/2)}{\frac{\partial^2}{\partial\gamma\partial\nu} P_\nu^m(\pm\cos\gamma)\big|_{\nu_n}} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu_n\right) \left(\frac{ka}{2}\right)^{-\nu_n - 1/2} d_n^m, \qquad (18)$$

$$d_n^m = H_m^+(-\nu_n - 1/2) - T_m^+(-\nu_n - 1/2).$$

Первый член в выражении (17) описывает поле, создаваемое точечным источником, помещенным над полубесконечным конусом $\vartheta = \gamma$. Он, естественно, отличен от нуля только в тех случаях, когда $r_0 < a$ и точки наблюдения и расположения источника находятся по одну сторону от поверхности конуса. Второй член в формуле (17) характеризует поправку к решению для полубесконечного конуса, обусловленную конечными размерами воронки и учитывает, таким образом, краевой эффект.

Для вычисления $u_m(r, \vartheta)$ в области $r > a$ изменим в выражении для $u_m^2(r, \vartheta)$ знак перед α и снова воспользуемся соотношением (9). В результате мы получим для $u_m(r, \vartheta)$ новое интегральное представление:

$$u_m(r, \vartheta) = \frac{1}{i\pi\sqrt{r}} \int_C \frac{\left(\frac{sa}{2}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} K_\alpha(sr) N_m(\alpha) F_m^+(\alpha) \frac{P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\vartheta)}{\frac{\partial}{\partial\gamma} P_{\alpha-1/2}^{-m}(\pm\cos\gamma)} d\alpha,$$

откуда

$$u(r) = -\frac{i\pi\sin\gamma}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \cos m(\varphi - \varphi_0) \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_n^m(\cos\vartheta) g_n^m, \qquad (19)$$

$$g_n^m = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\partial}{\partial\gamma} P_n^m(\cos\gamma) \frac{\left(\frac{ka}{2}\right)^{n+1/2}}{\Gamma(n + 1/2)} F_m^+(n + 1/2).$$

В дальней зоне $u(r) = -\frac{\sqrt{\pi a}\sin\gamma}{2} \frac{e^{ikr}}{r} A(\vartheta, \varphi)$, где $A(\vartheta, \varphi)$ — комплексная характеристика рассеяния:

$$A(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} i^{-n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\left(\frac{ka}{2}\right)^n}{\Gamma(n + 1/2)} \frac{\partial}{\partial\gamma} P_n^m(\cos\gamma) F_m^+(n + 1/2) \times$$

$$\times P_n^m(\cos\vartheta) \cos m(\varphi - \varphi_0).$$

Ряды (18) и (19) сходятся равномерно по r, ϑ и φ в областях $r \leqslant a$ и $r \geqslant a$ и их можно почленно дифференцировать. Поэтому найденные решения

действительно удовлетворяют неоднородному уравнению Гельмгольца и представляют собой ограниченные во всем пространстве функции. Нетрудно убедиться также в том, что каждый член ряда (18) удовлетворяет граничному условию на поверхности конуса, на поверхности сферы $r=a$ ряды (18) и (19) непрерывно переходят друг в друга, обеспечивая тем самым точное (а не в смысле какого-либо усреднения, как например, в методе частичных областей) сшивание решений.

Таким образом, при условии разрешимости выведенных выше бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, найденные нами выражения представляют собой точное решение сформулированной краевой задачи. Перейдем теперь к исследованию бесконечных систем. Чтобы не загромождать рассуждения дополнительными выкладками, ограничимся в анализе случаем $m=0$. Обобщение выводов на случай произвольного m не составляет труда.

Прежде всего рассмотрим вопрос о рациональной формулировке систем. Легко видеть, что если в качестве неизвестных выбрать величины $F_m^+\left(\frac{q}{2}\right)$ то полученные системы не только окажутся не регулярными, но и вообще к ним трудно применить какой-либо из известных критериев разрешимости [8]. Однако, если воспользоваться соотношением (10б) и положить

$$x_q=\frac{\varepsilon^q}{\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)}e^{-i\frac{\pi q}{4}}F_0^+\left(\frac{q}{2}\right),\ \varepsilon=\sqrt{\frac{ka}{2}},$$

то для x_q получается система

$$x_q+\sum_{k=1}^{\infty}a_{qk}x_k=f_q \tag{20}$$

с матрицей коэффициентов

$$a_{qk}=$$

$$=-\frac{\pi\sin\gamma\, e^{-i\frac{\pi}{4}(q+k)}}{(q+k)N_0^+\left(\frac{q}{2}\right)N_0^+\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{\varepsilon^{q+k}\frac{\partial}{\partial\gamma}P_{\frac{k-1}{2}}(\cos\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma}P_{\frac{k-1}{2}}(-\cos\gamma)}{\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}$$

и свободными членами

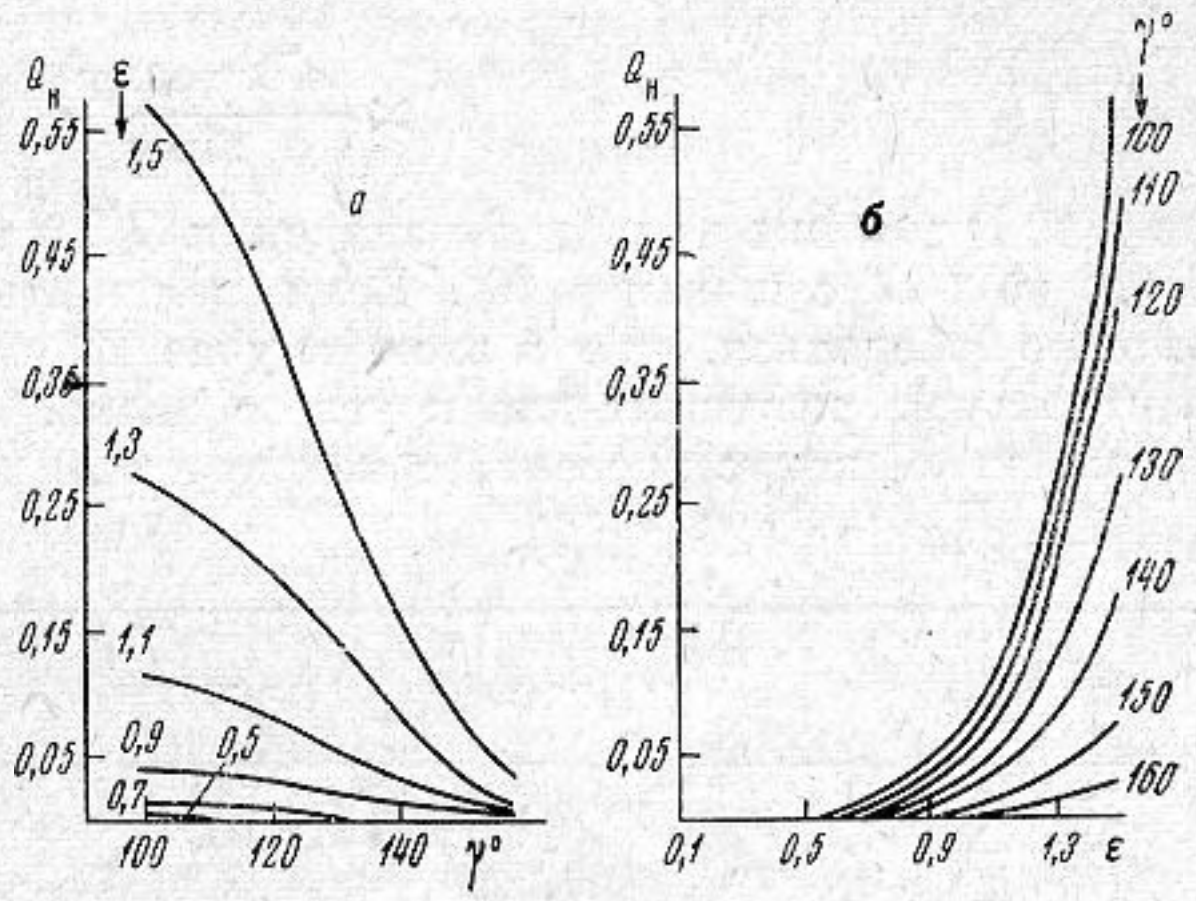
$$f_q=\frac{\varepsilon^q e^{-i\frac{\pi}{4}q}}{\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)}\frac{T_0^+\left(\frac{q}{2}\right)}{N_0^+\left(\frac{q}{2}\right)}.$$

Вектор $\mathbf{f}(f_1, f_2\ldots f_q\ldots)$, компонентами которого являются свободные члены (20) принадлежат бесконечно-мерному комплексному эвклидову пространству l_2, поскольку $\sum\limits_{q=1}^{\infty}|f_q|^2<\infty$. Точно так же можно показать, что матрица $\|a_{qk}\|$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{q,k}^{\infty}|a_{qk}|^2<\infty$ и, следовательно, уравнение (20) представляет собой уравнение с ограниченным оператором в классе функций, принадлежащих l_2. Из этого вытекает, что оно является уравнением с вполне непрерывным оператором в l_2 и для него справедлива альтернатива Гильберта: либо система (20) имеет единственное решение, либо соответствующая однородная система имеет нетривиальное решение. Поскольку наличие нетривиального решения у однородной системы противоречит теореме единственности для функции Грина,

в данном случае должна выполняться первая часть альтернативы. Имеет место следующая теорема [9]: если система обладает единственным решением в l_2 при любом $\mathbf{f}$, то метод редукции для этой системы сходится по норме l_2. Итак, полученная система имеет единственное решение, и это решение может быть найдено методом редукции, причем из сходимости по норме следует, что $x_q^j \to x_q$ при $j \to \infty$, где j — число используемых уравнений.

Характерным свойством уравнения (20) является то обстоятельство, что матрица $\|a_{qh}\|$ зависит от геометрии воронки, но не от характеристик первичного источника, изменение которых сказывается лишь на величине свободных членов f_q. Это позволяет раз и навсегда вычислить коэффициенты систем и разработать на этой основе удобную устойчивую программу для расчетов на ЦВМ.

Таким образом, использованный нами метод привел к алгебраизации краевой задачи, т. е. к переходу из функционального пространства в пространство бесконечных числовых последовательностей. Однако не следует думать, что мы имеем дело с чисто численным методом. Построенное решение является строгим и позволяет, в принципе, получить и аналитические выражения для величин, представляющих физический интерес. Как обычно в таких случаях, сравнительно нетрудно найти асимптотику функции Грина при $\varepsilon \to 0$. Для этого нужно только представить решение в виде ряда по степеням ε, подставить его в формулу (14) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε. Проиллюстрируем эту процедуру на примере расчета поперечника рассеяния конечного конуса при осевом облучении его плоской волной ($\vartheta_0 = 0$).



Фиг. 3

С этой целью заменим в формуле (13а) функцию Макдональда ее асимптотическим представлением $K_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\,[1 + O(x^{-1})]$, отбросим множитель $\frac{e^{ikr_0}}{4\pi r_0}$ и положим

$$N_0^+(\alpha)\, F_0^+(\alpha) = \frac{ika^{3/2}}{N_0^+(^3/_2)}\, X(\alpha),\; X(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\alpha) \left(\frac{sa}{2}\right)^n.$$

Коэффициенты $X_n(\alpha)$ определяются из рекуррентных соотношений, именно:

$$X_0(\alpha) = -\frac{\sin\gamma}{\alpha + {}^3/_2},\; X_1(\alpha) = \frac{2N_0^+(^3/_2)}{3(\alpha + {}^5/_2)}\, t_2^0(\gamma),$$

$$X_2(\alpha) = \frac{4N_0^+(^3/_2)\, t_3^0(\gamma)}{15(\alpha + {}^7/_2)} - \frac{\pi \sin^2\gamma\, b_1^0(\gamma)}{5(\alpha + 1)},$$

$$X_3(\alpha) = \frac{8N_0^+(^3/_2)\, t_4^0(\gamma)}{105(\alpha + {}^9/_2)} + \frac{\pi \sin\gamma\, b_1^0(\gamma)}{2(\alpha + 1)}\, X_1(1) - \frac{4\sin^2\gamma\, C_1^0(\gamma)}{9(\alpha + {}^3/_2)} \text{ и т. д.}$$

Подставляя эти значения в формулу для поперечника рассеяния

$$Q_{\text{н}} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} r^2 d\varphi d(\cos\vartheta)\,\mathrm{Re}\left(iu\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)}{k\sin\gamma\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{2\pi} dr d\varphi W_{\text{пад}}},$$

где $W_{\text{пад}}$ — плотность мощности падающего поля, а черта означает комплексносопряженную величину, находим

$$Q_{\text{н}} = Q_{\text{н}}^0\varepsilon^4[1+\tau_1(\gamma)\varepsilon^2+\tau_2(\gamma)\varepsilon^4+\tau_3(\gamma)\varepsilon^6+\ldots],\ Q_{\text{н}}^0 = \frac{1}{27}\frac{\sin^4\gamma}{[N_0^+(^3/_2)]^4}. \tag{21}$$

Здесь

$$\tau_1(\gamma) = \frac{9}{4}\operatorname{cosec}^2\gamma\{[X_1(^3/_2)]^2 - 2X_0(^3/_2)\,X_2(^3/_2)\} + \frac{3}{80}\left[\frac{N_0^+(^3/_2)}{N_0^+(^5/_2)}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{P_2^1(\cos\gamma)}{\sin\gamma}\right]^2$$

и т. д. В таблице приведены значения $Q_{\text{н}}^0$ и $\tau_{1,2}$ для углов γ в диапазоне от 100° до 160° с шагом в 10°. Если положить в выражении (21) $\gamma = \pi/2$ можно убедиться, что в этом случае формула (21) дает известный из литературы результат для круглого диска. В нулевом приближении, следовательно, конус рассеивает как круглый диск с эффективным радиусом $\rho_{\text{эфф}} = \sqrt{\pi}a\sin\gamma/2N_0^+(^3/_2)$.

γ^0	$Q_{\text{н}}^0$	$\tau_1(\gamma)$	$\tau_2(\gamma)$	γ^0	$Q_{\text{н}}^0$	$\tau_1(\gamma)$	$\tau_2(\gamma)$
100	0,057	0,320	0,053	140	0,016	0,339	0,085
110	0,049	0,323	0,059	150	0,008	0,329	0,076
120	0,038	0,327	0,068	160	0,003	0,318	0,067
130	0,026	0,331	0,077				

На фиг. 3 изображена зависимость интегрального поперечника рассеяния конечного конуса $Q_{\text{н}}$ от угла раствора конуса (*а*, параметр при кривых — значения ε) и от ε (*б*, параметр при кривых — γ) при осевом облучении, построенная с помощью формул (21) и таблицы.

Автор благодарен А. З. Фрадину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. Corriher, B. O. Pyron. A bibliography of articles on radar reflectivity and related subjects. Proc. IEEE, 1965, **53**, 8, 1025—1064.
2. Ю. В. Вайслейб. Осесимметричное облучение идеально проводящего конуса конечной длины радиальным электрическим диполем. Тр. учебных институтов связи, 1967, 35, 59—65.
3. D. S. Pridmore-Brown. A Wiener — Hopf solution of a radiation problem in conical geometry. J. Math. Phys., 1968, **47**, 1, 79—94.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1967.
5. Б. Нобл. Метод Винера — Хопфа. М., ИЛ, 1962.
6. J. Bazer, S. Karp. On a steady-state potential flow throw a conical pipe with a circular aperture. J. Rat. Mech. Anal., 1956, 5, 277—322.
7. Ю. В. Вайслейб. Некоторые задачи теории антенн, имеющих острия и ребра (канд. диссертация). Ленинградский электротехнический институт связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, 1968.
8. Л. В. Конторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М., ГТТИ, 1952.
9. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. М., «Наука», 1967.

Ленинградский электротехнический институт связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Поступила в редакцию 22 марта 1969 г.