АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVII 1971 Вып. 1

УДК 534.26

О КРИТЕРИИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕМ «ДАЛЬНЮЮ ЗОНУ» ПРИ РАССЕЯНИИ ВОЛН НА СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Ю. П. Лысанов

Получены критерии, определяющие расстояние до дальней зоны (зоны Фраунгофера) при рассеянии волн на статистически неровных поверхностях. Выведенным соотношениям дана простая физическая трактовка.

При дифракции волн на каком-либо объекте, характерный линейный размер которого равен l, дальняя зона или зона Фраунгофера начинается на расстоянии R_0, удовлетворяющем хорошо известному из классической теории дифракции соотношению [1]:

$$R_0 \gg \frac{l^2 \cos^2 \theta}{\lambda}, \tag{1}$$

где λ — длина волны падающего излучения, θ — угол между нормалью к поверхности объекта и направлением на точку наблюдения. Часто условие (1), несколько усилив, записывают в виде

$$R_0 \gg \frac{l^2}{\lambda}, \tag{2}$$

справедливом для любых направлений распространения дифрагированной волны. При рассеянии волн на статистически неровной поверхности ситуация оказывается более сложной, поскольку неровная поверхность характеризуется не одним, а тремя параметрами, имеющими размерность длины: линейным размером рассеивающего участка, радиусом корреляции и среднеквадратичной высотой неровностей. В связи с этим возникает вопрос, каким линейным размером или какой комбинацией их определяется зона Фраунгофера в данном случае? Этот вопрос представляет не только теоретический интерес, но имеет и практическое значение. Дело в том, что исследование рассеянного поля в зоне Фраунгофера особенно важно потому, что эффект неровностей проявляется наиболее сильно именно в этой зоне [2]. Этим обстоятельством объясняется и естественное стремление экспериментаторов вести измерения рассеянного поля также в зоне Фраунгофера. Кроме того, расчеты рассеянного поля для зоны Фраунгофера значительно проще, нежели для зоны Френеля, что в известной степени облегчает сопоставление теории и эксперимента. Ответ на поставленный выше вопрос можно получить посредством анализа общего выражения для интенсивности рассеянного поля. Такой анализ целесообразно провести отдельно для малых и крупных по сравнению с длиной волны звука неровностей.

В случае малых неровностей потенциал скорости рассеянного поля в первом приближении метода возмущений определяется выражением

$$\psi_{\text{p}}(x, z) = \frac{-i\gamma}{\pi} \int\limits_S \zeta(x_1, y_1)\, e^{i(\alpha_0 x_1 + \beta_0 y_1)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R}\, dx_1 dy_1, \tag{3}$$

где $\zeta(x, y)$ — статистически однородная функция координат, описывающая смещение точек неровной поверхности относительно средней плоскости $z = 0$, $(\alpha_0, \beta_0, -\gamma_0)$ — компоненты волнового вектора падающей волны по координатным осям, $R = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2 + z^2}$ — расстояние между текущей точкой (x_1, y_1) на плоскости $z = 0$ и точкой наблюдения $(x, 0, z)$. Расположение точки наблюдения в плоскости xz не уменьшает общности получаемых результатов, но несколько упрощает вычисления.

Предположим, что линейные размеры рассеивающего участка велики по сравнению с длиной волны, но малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. В этом случае приближенно имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ikR}}{R} \simeq \frac{ikz}{R}\, e^{ikR}$$

$$R \simeq R_0 - x_1 \sin\theta + \frac{x_1^2 \cos^2\theta}{2R_0} + \frac{y_1^2}{2R_0}, \tag{4}$$

где $R_0 = \sqrt{x^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат, помещенного в центре рассеивающего участка, до точки наблюдения, θ — угол между направлением распространения рассеянной волны и осью z.

Подставляя выражение (4) в формулу (3) и удерживая в знаменателе только первый член ряда, получим

$$\psi_p(x, z) = \left(\frac{\gamma\gamma_0}{\pi R_0}\right) e^{ikR_0} \int\limits_S \zeta(x_1, y_1)\, e^{i(\alpha_0-\alpha)x_1 + i\beta_0 y_1} e^{\frac{ikx_1^2\cos^2\theta}{2R_0} + \frac{ik}{2R_0}y_1^2}\, dx_1 dy_1,$$

где $\alpha = k\sin\theta$, $\gamma = k\cos\theta$ — компоненты волнового вектора рассеянной волны.

Интенсивность рассеянного поля будет

$$\langle |\psi_p|^2 \rangle = \left(\frac{\sigma\gamma\gamma_0}{\pi R_0}\right)^2 \iint\limits_S N(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\, e^{i(\alpha_0-\alpha)(x_1-x_2)} \times$$
$$\times\, e^{i\beta_0(y_1-y_2) \times \frac{ik\cos^2\theta}{2R_0}(x_1^2-x_2^2) + \frac{ik}{2R_0}(y_1^2-y_2^2)}\, dx_1\, dy_1\, dx_2 dy_2, \tag{5}$$

где $\sigma^2 N(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \langle \zeta(x_1, y_1)\zeta(x_2, y_2)\rangle$ — корреляционная функция неровностей.

Переходя в формуле (5) к относительным координатам $\xi = x_1 - x_2$, $\eta = y_1 - y_2$ и координатам центра тяжести $2x = x_1 + x_2$, $2y = y_1 + y_2$, получим

$$\langle |\psi_p|^2 \rangle = \left(\frac{\sigma\gamma\gamma_0}{\pi R_0}\right)^2 \iint\limits_S N(\xi, \eta)\, e^{i(\alpha_0-\alpha)\xi + i\beta_0\eta} e^{\frac{ik\cos^2\theta}{R_0}x\xi + \frac{ik}{R_0}y\eta}\, d\xi d\eta dx dy. \tag{6}$$

Расстояние до зоны Фраунгофера находится из условий, при которых можно пренебречь квадратичными членами в показателе экспоненты в формуле (6). Заметим, что в этом приближении зависимость интенсивности рассеянного поля от расстояния R_0 имеет особенно простой вид:

$$\langle |\psi_p|^2 \rangle = \frac{SD}{R_0^2}, \tag{7}$$

где S — площадь рассеивающего участка и

$$D = \left(\frac{\sigma\gamma\gamma_0}{\pi}\right)^2 \int\limits_S N(\xi, \eta)\, e^{i(\alpha_0-\alpha)\xi + i\beta_0\eta} d\xi\, d\eta$$

есть индикатрисса рассеянного поля. Экспериментальное подтверждение соотношения (7) служит прямым доказательством того, что точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера. Поскольку коэффициент корреляции $N(\xi, \eta)$ существенно спадает при $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$, где ξ_0, η_0 — радиусы корреляции по осям x и y соответственно, то возможность пренебрежения квадратичными членами в формуле (6) определяется неравенствами

$$\frac{k\xi_0 X \cos^2\theta}{R_0} \ll \pi, \quad \frac{k\eta_0 Y}{R_0} \ll \pi, \tag{8}$$

где X и Y — линейные размеры рассеивающего участка по оси x и y соответственно. Если линейные размеры рассеивающего участка, а также радиусы корреляции по обеим осям координат примерно одинаковы, то полагая $X = Y \equiv l$, $\xi_0 = \eta_0 \equiv \rho_0$ и приняв $\cos\theta = 1$, можно записать соотношения (8) в виде одного неравенства

$$R_0 \gg \frac{2l\rho_0}{x}. \tag{9}$$

При экспериментах по рассеянию звука на дне и взволнованной поверхности океана обычно $\rho_0 \ll l$ и, следовательно, условие (9) является значительно более слабым, нежели условие (2). Аналогичное условие имеет место при рассеянии волн на периодически неровных поверхностях, но там вместо радиуса корреляции входит пространственный период неровностей [3]. Соотношение вида (9) для периодических поверхностей получило экспериментальное подтверждение [4].

При расположении точки наблюдения вблизи направления зеркального отражения ($\theta \simeq \theta_0$) первому из условий (8) можно дать весьма наглядную физическую трактовку. Учитывая, что при крупномасштабных неровностях ($k\xi_0 \gg 1$) угловая ширина индикатриссы рассеяния равна $\Delta\theta_р = 4 / k\xi_0 \cos\theta_0$, а угловой размер рассеивающего участка равен $\Delta\theta_с = X \cos\theta_0 / R_0$, имеем

$$\frac{\Delta\theta_с}{\Delta\theta_р} \ll \frac{\pi}{4}. \tag{10}$$

Другими словами, точка наблюдения будет находиться в зоне Фраунгофера, если угол, под которым виден из точки наблюдения рассеивающий участок, много меньше угловой ширины индикатриссы рассеяния. В тех случаях, когда приемная система обладает направленностью, величина $\Delta\theta_с$ соответствует угловой ширине характеристики направленности. Легко показать, что при расположении точки наблюдения в плоскости yz формула (9) по-прежнему будет справедлива, если под $\Delta\theta_с$ и $\Delta\theta_р$ понимать соответственно угловую ширину характеристики направленности приемной системы и индикатриссы рассеяния в плоскости yz.

Перейдем к случаю рассеяния звука на поверхности с крупными плавными неровностями. При тех же предположениях относительно соотношения между длиной волны звука, линейным размером рассеивающего участка и расстоянием до точки наблюдения интенсивность рассеянного поля в приближении Кирхгофа можно представить в виде [5]

$$\langle|\psi_р|^2\rangle = \left(\frac{kF}{2\pi R_0}\right)^2 \iint\limits_S \langle e^{-ig_z(\zeta_1-\zeta_2)}\rangle \cdot e^{-i(g_x\xi+g_y\eta)+\frac{ik\cos^2\theta}{R_0}x\xi+\frac{ik}{R_0}y\eta}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy, \tag{11}$$

где $g_x = \alpha - \alpha_0$, $g_y = -\beta_0$, $g_z = \gamma + \gamma_0$ и

$$kF = \left(-\alpha_0 \frac{g_x}{g_z} - \beta_0 \frac{g_y}{g_z} + \gamma_0\right); \quad \zeta_0 = \zeta(x_1, y_1); \quad \zeta_2 = \zeta(x_2, y_2).$$

При нормальном распределении двумерной величины $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ имеем $\langle e^{-ig_z(\zeta_1-\zeta_2)}\rangle = e^{-(g_z\sigma)^2[1-N(\xi,\eta)]}$. Очевидно, при крупных неровностях ($g_z\sigma \gg 1$) основной вклад в величину интеграла (9) дают малые значения ξ и η:

$$\xi \leqslant \frac{\sqrt{2}\xi_0}{g_z\sigma\sqrt{|N_{\xi\xi}(0)|}}, \quad \eta \leqslant \frac{\sqrt{2}\eta_0}{g_z\sigma\sqrt{|N_{\eta\eta}(0)|}},$$

где ξ_0 и η_0 — радиусы корреляции по осям x и y соответственно; $N_{\xi\xi}(0)$ и $N_{\eta\eta}(0)$ — вторые производные по безразмерным переменным (ξ/ξ_0) и (η/η_0) в нуле. Зона Фраунгофера в данном случае определяется условиями:

$$\frac{\sqrt{2}k\xi_0 X\cos^2\theta}{R_0 g_z\sigma\sqrt{|N_{\xi\xi}(0)|}} \ll \pi, \qquad \frac{\sqrt{2}k\eta_0 Y}{R_0 g_z\sigma\sqrt{|N_{\eta\eta}(0)|}} \ll \pi. \tag{12}$$

В случае гауссова коэффициента корреляции $N(\xi,\eta) = e^{-[(\xi/\xi_0)^2+(\eta/\eta_0)^2]}$ имеем $N_{\xi\xi}(0) = N_{\eta\eta}(0) = -2$ и условия (12) принимают более простой вид:

$$\frac{k\xi_0 X\cos^2\theta}{R_0 g_z\sigma} \ll \pi, \quad \frac{k\eta_0 Y}{R_0 g_z\sigma} \ll \pi. \tag{13}$$

Из соотношений (13) следует, во-первых, что при крупных неровностях зона Фраунгофера лежит значительно ближе к рассеивающему участку, чем при малых неровностях; во-вторых, расстояние R_0 не зависит от длины волны звука, так как $g_z = k(\cos\theta + \cos\theta_0)$, где θ_0 и θ — углы падения первичной и рассеянной волны.

Первое из условий (12) также сводится к неравенству (10), в котором величина $\Delta\theta_p$ представляет собой угловую ширину индикатриссы рассеянного поля при крупных плавных неровностях:

$$\Delta\theta_p = \frac{2\sqrt{2}g_z\sigma\sqrt{|N_{\xi\xi}(0)|}}{k\xi_0\cos\theta_0}. \tag{14}$$

Аналогичный критерий получается и при расположении точки наблюдения в плоскости yz.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Горелик. Колебания и волны. М., Физматгиз, 1959.
2. Ю. Ю. Житковский, Ю. П. Лысанов. О некоторых особенностях френелевой дифракции звука на взволнованной поверхности и дне океана. Изв. АН СССР, Физ. атмосферы и океана, 1969, 5, 9, 982—985.
3. Ю. П. Лысанов. Об одном приближенном решении задачи о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности. Акуст. ж., 1956, 2, 2, 182—187.
4. А. Н. Лепорский. Экспериментальное исследование дифракции акустических волн на периодических структурах. Акуст. ж., 1955, 1, 1, 48—57.
5. М. А. Исакович. Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности. Отчет. Физический ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1953.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
23 февраля 1970 г.