АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 2

УДК 534.24

О КОРРЕЛЯЦИИ ШУМОПОДОБНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ОТРАЖЕННОГО ОТ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Э. П. Гулин

Рассмотрена пространственно-временная корреляция шумоподобного сигнала, испытавшего отражение от случайной неровной поверхности раздела двух сред.

Дана оценка временного, пространственных и пространственно-временных масштабов корреляции при разных значениях параметра Рэлея. Рассчитаны параметр когерентности в зависимости от ширины полосы сигнала и параметра Рэлея и корреляция исходного сигнала с отраженным от поверхности.

Часто на практике приходится иметь дело с сигналами сложной формы, например, шумоподобными. Коррелятивные свойства таких сигналов после прохождения в среде со случайными параметрами, в частности, после отражения от неровной границы раздела двух сред, могут существенно изменяться. В работе [1] методом малых возмущений рассчитывалась пространственная корреляция узкополосного шумового сигнала, рассеянного абсолютно мягкой поверхностью с малыми квазигармоническими неровностями. В работе [2] аналогичные расчеты были выполнены в приближении Кирхгофа для случая высоких неровностей. Поскольку, однако, рассмотрение ограничивалось сигналами с узкополосным спектром, ряд существенных моментов остался невыясненным.

Нами получено в рамках приближения Кирхгофа выражение для пространственно-временной корреляционной функции отраженного сигнала, справедливое при любых значениях параметра Рэлея. Оно позволяет рассмотреть и случай достаточно широкополосного излучения. Ограничения сводятся к требованиям пологости неровностей, достаточной медленности их изменения (с тем, чтобы можно было пользоваться квазистатическим приближением) и малости углов рассеяния.

Исходное выражение для вычисления пространственно-временной корреляционной функции поля волны, отраженной от неровной границы раздела двух сред, легко получается из формулы Кирхгофа для немонохроматического излучения при учете приближенных граничных условий в результате усреднения по статистически независимым ансамблям реализаций излученного сигнала и случайной поверхности * (операцию усреднения будем в дальнейшем обозначать угловыми скобками $\langle\ \rangle$):

$$K_P(\mathbf{R}_1', \mathbf{R}_2', \mathbf{R}', \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) K_{P\omega}(\mathbf{R}_1', \mathbf{R}_2', \mathbf{R}', \Delta t, \omega)\, d\omega. \qquad (1)$$

Здесь $G(\omega)$ — частотный спектр мощности излученного сигнала, существенно отличный от нуля на интервале $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, $K_{P\omega}$ — корреляционная

* Предполагается, что излученный шумоподобный сигнал является стационарным случайным процессом, а возвышение поверхности $F(\mathbf{r}, t)$ — стационарная во времени и однородная в пространстве случайная функция со среднеквадратичным значением $\sqrt{\langle F^2 \rangle} = \sigma$ ($\mathbf{r} = \{x, y\}$ — радиус-вектор текущей точки на поверхности).

функция монохроматической волны, отраженной от неровной поверхности, $\mathbf{R}_1' = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{R}_2' = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ и $\mathbf{R}' = \{0, 0, z\}$ — координаты разнесенных точек наблюдения и источника излучения.

Функция $K_{P\omega}$ для случая точечного источника излучения была рассчитана в работе [3]. Ее можно представить в виде

$$K_{P\omega}(\mathbf{R}_1', \mathbf{R}_2', \mathbf{R}', \Delta t, \omega) = \frac{\exp(-i\omega\tau)\sin\psi_1 \sin\psi_2}{(z+Z_1)(z+Z_2)} \times$$

$$\times W(\psi_1, \omega) W(\psi_2, \omega) \tilde{Q}(\Delta\tilde{\mathbf{R}}, \Delta t, \omega), \tag{2}$$

где

$$\tilde{Q}(\Delta\tilde{\mathbf{R}}, \Delta t, \omega) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{s}, \omega) Q(\Delta\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{s}, \Delta t, \omega)\, d\mathbf{s}, \qquad \mathbf{s} = \{s_1, s_2\}, \tag{3}$$

$$M(\mathbf{s}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} N(\boldsymbol{\lambda}, \omega) \exp(-i\mathbf{s}\boldsymbol{\lambda})\, d\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_x, \lambda_y\}, \tag{4}$$

$$Q(\Delta\tilde{\mathbf{R}}, \Delta t, \omega) =$$

$$= \left\langle \exp\left\{-i2\frac{\omega}{c}\left[\sin\psi_1 \cdot F(\mathbf{r}, t) - \sin\psi_2 \cdot F(\mathbf{r} + \Delta\tilde{\mathbf{R}}, t + \Delta t)\right]\right\}\right\rangle, \tag{5}$$

$$N(\boldsymbol{\lambda}, \omega) = \exp\left\{-i\left[\frac{\lambda_x^2}{4}\left(\frac{1}{p_{x1}} - \frac{1}{p_{x2}}\right) + \frac{\lambda_y^2}{4}\left(\frac{1}{p_{y1}} - \frac{1}{p_{y2}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\lambda_x \lambda_y}{2}\left(\frac{1}{p_{xy1}} - \frac{1}{p_{xy2}}\right)\right]\right\},$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{R}} = \{\Delta\tilde{X}, \Delta\tilde{Y}\}, \qquad \Delta\tilde{X} = X_1 \frac{z}{z+Z_1} - X_2 \frac{z}{z+Z_2},$$

$$\Delta\tilde{Y} = Y_1 \frac{z}{z+Z_1} - Y_2 \frac{z}{z+Z_2},$$

$$p_x = \frac{\omega}{c} \frac{\sin^2\psi}{R(1 - \cos^2\psi \cdot \sin^2\varphi)}, \qquad p_y = \frac{\omega}{c} \frac{\sin^2\psi}{R(1 - \cos^2\psi \cdot \cos^2\varphi)}$$

$$p_{xy} = \frac{\omega}{c} \frac{2\sin^2\psi}{R\cos^2\psi \cdot \sin 2\varphi}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}, \quad R = \frac{2zZ}{(z+Z)\sin\psi}, \quad \psi = \arcsin\frac{z+Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + (z+Z)^2}},$$

$$\tau = \Delta t - \frac{\Delta R_0}{c}, \qquad \Delta R_0 = \frac{z+Z_1}{\sin\psi_1} - \frac{z+Z_2}{\sin\psi_2},$$

$W(\psi, \omega)$ — коэффициент отражения от границы раздела двух сред в отсутствие неровностей, который считается медленно меняющейся функцией угла скольжения ψ; индексы 1 и 2 соответствуют значениям параметров в разнесенных точках приема. При выводе формулы (2) были опущены члены, относительная величина которых порядка $\nu_{max} \cdot \sigma$, $\dfrac{\lambda c}{\omega_{min} \cdot \sin^2\psi}$, $\left[\dfrac{\omega_{min}}{c}\sin\psi \cdot \min(z, Z)\right]^{-1}$, где $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}|$, $\nu_{max} = 2\pi / \Lambda_{min}$, Λ_{min} — минимальный характерный пространственный период неровностей (за пре-

делами области $0 \leqslant |\mathbf{v}| \leqslant \nu_{max}$ составляющие пространственного энергетического спектра возвышений поверхности $S(\mathbf{v})$ пренебрежимо малы), причем $\lambda_{max} \simeq \nu_{max}$ при $\Phi_\omega^2 = 4\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\psi \cdot \sigma^2 \leqslant 1$ и $\lambda_{max} \simeq \nu_{max}\Phi_\omega$ при $\Phi_\omega^2 \gg 1$. Тем самым предполагается, что углы наклона неровностей и углы рассеяния падающей волны достаточно малы, а источник и точки наблюдения достаточно удалены от поверхности. Поскольку ограничения накладываются лишь на нижнюю частоту спектра излученного сигнала, можно рассматривать и случай достаточно широкополосного излучения.

При выполнении условия

$$\frac{c}{\omega_{min}}\frac{\lambda^2}{\sin^2\psi}\frac{z}{z+Z}\max\left(\Delta X, \Delta Y, \frac{\Delta Z}{\sin\psi}\right) \ll 1, \tag{6}$$

где ΔX, ΔY, ΔZ — компоненты вектора разнесения точек наблюдения $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_1' - \mathbf{R}_2'$, можно пренебречь квадратичными относительно λ_x и λ_y членами в показателе экспоненты (5), в результате чего из формул (3) — (5) получаем $N \simeq 1$, $M(\mathbf{s}, \omega) \simeq \delta(s_1)\delta(s_2)$, $\tilde{Q} \simeq Q$, и после нормировки * выражение (2) принимает такой вид **:

$$\Gamma_P(\Delta\mathbf{R}, \Delta t) = \frac{K_P(\mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}^1, \Delta t)}{\sqrt{K_P(\mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}_1^1, \mathbf{R}^1, 0)\, K_P^*(\mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}_2^1, \mathbf{R}^1, 0)}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, Q(\Delta\tilde{\mathbf{R}}, \Delta t, \omega)\exp(-i\omega\tau)\, d\omega. \tag{7}$$

Неравенство (6) накладывает ограничения сверху на величину пространственных сдвигов, тем не менее в большинстве случаев выражение (7) дает возможность оценить пространственно-временные масштабы корреляции отраженных от неровной поверхности сигналов.

Предположим, что излучается шумоподобный сигнал, имеющий спектр

$$G(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta}\left\{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\beta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{\beta^2}\right]\right\}, \tag{8}$$

причем $\exp(-\omega_0^2/\beta^2) \ll 1$ (в этом случае β — эффективная полуширина спектра). Интеграл (7) легко вычисляется, если задаться двумерным нормальным законом распределения возвышений поверхности ***. В результате мы получаем

$$\Gamma_P(\Delta\mathbf{R}, \Delta t) = \cos\left(\frac{\omega_0\tau}{1+B\delta^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+B\delta^2}}\exp\left[-\frac{\beta^2\tau^2}{4(1+B\delta^2)}\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{B}{1+B\delta^2}\right), \tag{9}$$

где $B(\Delta\mathbf{R}, \Delta t) = \frac{(\Phi_{01}-\Phi_{02})^2}{2} + \Phi_{01}\cdot\Phi_{02}[1-\Gamma_F(\Delta\tilde{\mathbf{R}}, \Delta t)]$, $\delta = \beta/\omega_0$,

$$\Phi_{01,2} = 2\frac{\omega_0}{c}\sigma\sin\psi_{1,2},$$

---

* Предполагается, что в пределах полосы, занимаемой излученным сигналом, коэффициент отражения W несущественно меняется с частотой.

** Строго говоря, функции Q и Γ_P могут зависеть не только от разнесения точек приема, но и от их координат. Для сокращения записи в аргументах Q и Γ_P оставлена лишь зависимость от разнесения точек приема, тем более, что чаще всего именно она определяет поведение пространственных корреляционных функций.

*** Заметим, что в силу четности характеристической функции $Q(\omega)$ при нормальном распределении результаты вычислений $\mathrm{Re}\,(\Gamma_P)$ не зависят от того, в комплексной или действительной форме представлен исходный сигнал.

Γ_F — нормированная пространственно-временная корреляционная функция возвышений поверхности. Введем в рассмотрение временные (τ_0 и $\Omega_0 = 2\pi / T$) и пространственные (a и $q = 2\pi / \Lambda$) масштабы корреляции неровностей. Величины τ_0 и a характеризуют быстроту убывания корреляции, а T и Λ — периоды осцилляций корреляционных функций *. Неровности будем считать изотропными. Переход к случаю неровностей, высота которых зависит лишь от одной координаты, например, от $u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, не составляет труда. Для этого следует заменить в (9) $\Delta \tilde{R} = \sqrt{(\Delta \tilde{X})^2 + (\Delta \tilde{Y})^2}$ на $\Delta \tilde{X} \cos \alpha + \Delta \tilde{Y} \sin \alpha$.

Для оценки интервалов корреляции в случае высоких неровностей ($\Phi_{01,2}^2 \gg 1$) разложим функцию $B(\Delta \mathbf{R}, \Delta t)$ в ряд Тейлора в окрестности $\Delta \mathbf{R} = 0$, $\Delta t = 0$ и ограничимся первыми членами разложения. Тогда в первом приближении

$$B(0, \Delta t) \simeq \frac{(\Delta t)^2 \Phi_0^2}{\tau_1^2},$$

$$B(\Delta \mathbf{R}, 0) \simeq \Phi_0^2 \left\{ \frac{(\Delta \tilde{R})^2}{a_1^2} \left[1 - \left(\frac{\Delta \Phi}{2\Phi_0} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\Delta \Phi}{2\Phi_0} \right)^2 \right\}, \qquad (10)$$

где

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2 \tau_0^2}{2}}}, \quad a_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{q^2 a^2}{2}}} \quad \Delta \Phi = \Phi_{01} - \Phi_{02},$$

$$\Phi_0 = \frac{\Phi_{01} + \Phi_{02}}{2}.$$

Временно́й интервал корреляции Δt_K (по спаду огибающей в e раз) можно оценивать по формуле

$$\Delta t_K \simeq \frac{2}{\beta} \left(1 + \frac{4\Phi_0^2}{\beta^2 \tau_1^2} \right)^{-1/2},$$

учитывая, что степенной множитель в формуле (9) не влияет существенно на быстроту спада корреляции. При условии $4\Phi_0^2 / \beta^2 \tau_1^2 \ll 1$ мы имеем $\Delta t_K \simeq 2 / \beta$. В данном случае временны́е корреляционные функции отраженного от поверхности и исходного сигналов совпадают. При излучении волны, близкой к монохроматической, когда полоса сигнала значительно у́же, чем расширение спектра при отражении от неровной поверхности, получим $\Delta t_K \simeq \tau_1 / \Phi_0$. Согласно формуле (9) с ростом Δt имеет место некоторое уменьшение частоты осцилляций: $\Delta \omega \simeq -2\omega_0 \delta^2 \Phi_0^2 (\Delta t / \tau_1)^2$. При $\Delta t \lesssim 2 / \beta$ изменение частоты не превышает величины $8\Phi_0^2 / \omega_0^2 \tau_1^2$.

Оценим пространственные масштабы корреляции сигнала при разнесении приемников по разным направлениям. При разнесении по фронту волны ($\Delta R_0 \equiv 0$) корреляция в области $B\delta^2 \ll 1$ спадает по экспоненциальному закону, а при $B\delta^2 \gg 1$ — по степенному закону. В случае $\delta \lesssim 1/2$ быстрота спада корреляции в e раз (по огибающей) определяется в основном экспоненциальным множителем; при этом интервалы корреляции можно найти из соотношения $B(\Delta \mathbf{R}, 0) \cdot (1 - \delta^2 / 2) \simeq 1$.

На достаточно большом удалении от источника можно перейти к угловой корреляции. При азимутальном разнесении (по углу φ) и при разне-

---

* В случае узкополосного спектра $S(\nu)$ (квазигармонические неровности) можно приближенно считать $\nu_{max} \simeq q$, если же спектр $S(\nu)$ имеет широкую полосу (негармонические случайные неровности), то $\nu_{max} \simeq n / a$, где n — множитель порядка единицы.

сении по углу места ψ угловые интервалы корреляции равны

$$\Delta\varphi_{\text{к}} \simeq \frac{a_1 \sin\psi}{z} \frac{1}{\Phi_0\sqrt{1-\delta^2/2}}, \quad \Delta\psi_{\text{к}} \simeq \frac{\Delta\varphi_{\text{к}} \sin\psi}{\sqrt{1+\dfrac{a_1^2 \sin^2\psi \cdot \cos^2\psi}{2z^2}}} \tag{11}$$

Соответствующие пространственные (линейные) интервалы корреляции определяются соотношениями $\Delta R_{\psi\text{к}} \simeq \Delta\psi_{\text{к}} \cdot \dfrac{z+Z}{\sin\psi}$ $\quad \Delta R_{\psi\text{к}} \simeq \Delta\psi_{\text{к}} \cdot \dfrac{z+Z}{\sin\psi}$,

Из формул (11) видно, что с расширением полосы частот сигнала масштабы корреляции несколько увеличиваются, но при $\delta \lesssim 1/2$ это увеличение несущественно.

При разнесении вдоль направления зеркального отражения от средней плоскости ($z = 0$), когда $\Delta\tilde{R} \equiv 0$, получаем

$$\Gamma_{\text{р}}(\Delta\mathbf{R}, 0) = \exp\left[-\frac{\beta^2}{4c^2}(\Delta R_0)^2\right] \cdot \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\Delta R_0\right).$$

В этом случае пространственный интервал корреляции $\Delta R_{\text{к}}$ равен произведению временнóго интервала корреляции излученного сигнала на скорость распространения: $\Delta R_{\text{к}} = 2c/\beta$ (если $\Delta R \simeq \Delta R_{\text{к}}$ не нарушается условие (6)).

При разнесении по горизонтали вдоль трассы распространения волны и по вертикали интервалы корреляции ($\Delta X_{\text{к}}$ и $\Delta Z_{\text{к}}$) соответственно равны

$$\Delta X_{\text{к}} \simeq \frac{2c}{\beta\cos\psi}(1+d_1^2)^{-1/2}, \quad \Delta Z_{\text{к}} \simeq \frac{2c}{\beta\sin\psi}(1+d_2^2)^{-1/2}, \tag{12}$$

где

$$d_1^2 = \frac{d^2}{\cos^2\psi}, \quad d_2^2 = \frac{d^2}{\sin^2\psi \cdot \mathrm{tg}^2\psi},$$

$$d^2 = \frac{4c^2\Phi_0^2}{\beta^2 a_1^2}\left(\frac{z}{z+Z}\right)^2\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\left(1+\frac{a_1^2\sin^2\psi\cdot\cos^2\psi}{2z^2}\right).$$

В случае достаточно широкополосного излучения (при $d_1^2, d_2^2 \ll 1$) $\Delta X_{\text{к}} \simeq 2c/\beta\cos\psi$, $\Delta Z_{\text{к}} \simeq 2c/\beta\sin\psi$. В случае узкополосного излучения ($d_1^2, d_2^2 \gg 1$) и при условии $a_1^2 \ll z^2$ из выражения (12) следуют формулы, полученные в работе [2]. Следует отметить, что выражения (11) и (12) справедливы для достаточно малых разнесений в вертикальной плоскости ($\Delta Z \ll z+Z$, $\Delta X \ll z+Z$).

При поперечном разнесении $\Delta Y_{\text{к}} \simeq \Delta R_{\varphi\text{к}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\varkappa}\sqrt{\sqrt{1+\varkappa^2}-1}$, где $\varkappa = \dfrac{\beta}{2c} \cdot \dfrac{a_1^2}{\Phi_0^2(1-\delta^2/2)} \cdot \dfrac{z+Z}{z} \cdot \dfrac{\sin\psi}{z}$. На достаточно большом удалении от источника, когда фронт волны на расстоянии порядка интервала корреляции можно приблизительно считать плоским (при $\varkappa^2 \ll 1$), $\Delta Y_{\text{к}} \simeq \Delta R_{\varphi\text{к}}$.

Заметим, что приведенными выше формулами можно пользоваться и в том случае, когда $F(\mathbf{r}) = F(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$, если заменить a_1 на $a_1/\cos\alpha$ при определении $\Delta X_{\text{к}}$, $\Delta X_{\text{к}}$, $\Delta\psi_{\text{к}}$ и на $a_1/\sin\alpha$ при определении $\Delta Y_{\text{к}}$ и $\Delta\varphi_{\text{к}}$.

Оценим границы применимости полученных выражений для пространственных интервалов корреляции. Подставляя эти выражения в формулу

(6), найдем, что при разнесении приемников по горизонтали достаточно потребовать выполнения неравенства $\frac{\omega_0}{\omega_{\min}} \cdot \frac{\sigma_{\nabla F}}{\sin\psi} \min\left(1, \frac{\sigma_{\nabla F} \cdot \operatorname{tg}\psi}{\delta}\right) \ll 1$, а при разнесении по вертикали—неравенства $\frac{\omega_0}{\omega_{\min}} \frac{\sigma_{\nabla F}}{\sin\psi \cdot \cos\varphi} \min\left(1, \frac{\sigma_{\nabla F} \cdot \operatorname{ctg}\psi}{\delta}\right) \ll$ $\ll 1$, где через $\sigma_{\nabla F}$ обозначено среднеквадратичное значение угла наклона неровностей. Приведенные неравенства уже были фактически использованы при выводе исходного выражения (2). Дополнительное ограничение накладывается лишь на углы скольжения в окрестности $\cos\psi = 0$ при узкополосном излучении $\left(\frac{\sigma_{\nabla F} \operatorname{ctg}\psi}{\delta} \gg 1\right)$ и разнесении по вертикали (в данном случае — вдоль зеркального луча). Вообще, для определения масштабов корреляции узкополосных сигналов при разнесении вдоль направления зеркального отражения от средней плоскости необходимо учитывать квадратичные члены разложения по λ_x и λ_y в показателе экспоненты (5).

Эффективные размеры области пространственно-временно́й корреляции отраженного сигнала будем также характеризовать временны́ми и пространственными масштабами корреляции ($\Delta t_{\text{к}}^{\text{п.в}}$, $\Delta \tilde{R}_{\text{к}}^{\text{п.в}}$, $\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}}$). Из выражения (5) видно, что убывание корреляции определяется в основном двумя экспоненциальными множителями. Если излучение близко к монохроматическому ($\delta \approx 0$), то спад корреляции описывается вторым множителем, причем масштабы корреляции отраженного сигнала целиком определяются масштабами пространственно-временно́й корреляции возвышенной поверхности и параметром Рэлея Φ_0 [3]. В случае достаточно широкополосного излучения (при d_1^2, $d_2^2 \ll 1$) первый множитель становится «острой» функцией, максимум при $\tau = \Delta t - \frac{\Delta R_0}{c} = 0$ и существенно убывающей при $\tau \simeq 2/\beta$. Область пространственно-временно́й корреляции определяется вторым экспоненциальным множителем, в котором следует положить $\Gamma_F(\Delta\tilde{\mathbf{R}}, \Delta t) = \Gamma_F\left(\frac{\Delta\tilde{R}}{a} \; \frac{\Delta R_0}{c\tau_0}\right)$ В пределах области корреляции обычно выполняется условие $\frac{\Phi_0 |\Delta R_0|}{c\tau_0} \ll 1$ (исключение составляет случай $\Delta\tilde{R} \approx 0$). Тогда масштабы пространственно-временной корреляции можно определить по формулам

$$\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}} \approx \Delta\tilde{R}_{\text{к}0}/\sqrt{1 - \delta^2/2}, \quad \Delta t_{\text{к}}^{\text{п.в}} = \frac{\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}}}{c}, \text{ где } \Delta\tilde{R}_{\text{к}0} = \Delta\tilde{R}_{\text{к}}$$

при $\delta = 0$, $\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}}$ — разнесение вдоль зеркального луча, соответствующее масштабу корреляции $\Delta\tilde{R}_{\text{к}}^{\text{п.в}}$ (например, при $\Delta R = \Delta X$, $\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}} = \Delta X_{\text{к}}^{\text{п.в}} \cos\psi$, при $\Delta R = \Delta Z$ $\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}} = \Delta Z_{\text{к}}^{\text{пк}} \sin\psi$).

При разнесении по фронту волны $\Delta t_{\text{к}}^{\text{п.в}} = \frac{2}{\beta} = \Delta t_{\text{к}}$. В остальных случаях $\Delta t_{\text{к}}^{\text{п.в}} > \Delta t_{\text{к}}$, $\Delta\tilde{R}_{\text{к}}^{\text{п.в}} > \Delta\tilde{R}_{\text{к}}$, т. е. область пространственно-временной корреляции шумоподобного сигнала шире областей пространственной и временной корреляций.

Для оценки пространственно-временной корреляции при разнесении вдоль направления зеркального отражения ($\Delta\tilde{R} \equiv 0$) следует уточнить выражение (5), учитывая при интегрировании наряду с линейными ква-

дратичные члены разложения по λ_x, λ_y. В результате, полагая для простоты $\delta^2 \ll 1$, получаем

$$\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}} \simeq \min\left[\frac{\sqrt{2}}{\Phi_0} c\tau_1, \quad \frac{\omega_0}{c}\sin^2\psi \frac{a_1^2}{\Phi_0^2}\frac{(z+Z)^2}{2z^2}\right], \quad \Delta t_{\text{к}}^{\text{п.в}} = \frac{\Delta R_{\text{к}}^{\text{п.в}}}{c}.$$

За исключением случая $Z/z \gg 1$ основную роль играет второй член в квадратных скобках, определяющий пространственный интервал корреляции монохроматической волны.

Представляет интерес рассмотреть также случай прямоугольного спектра шумоподобного излучения:

$$G(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_1, \quad |\omega| > \omega_2. \\ \dfrac{1}{2(\omega_2 - \omega_1)}, & \omega_1 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_2 \end{cases}$$

При такой форме спектра допустимо в приближении Кирхгофа рассматривать отражение от поверхности весьма широкополосного излучения

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq 1 \div 2, \text{ где } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \ \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

Пространственно-временная корреляционная функция Γ_P выражается в этом случае через интегралы вероятностей комплексных аргументов:

$$\Gamma_P(\Delta\mathbf{R}, \Delta t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{v_2 - v_1}\exp(-w^2)\,[\Phi(v_2 + iw) + \Phi(v_2 - iw) -$$

$$- \Phi(v_1 + iw) - \Phi(v_1 - iw)], \qquad \Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^v \exp(-t^2)\,dt,$$

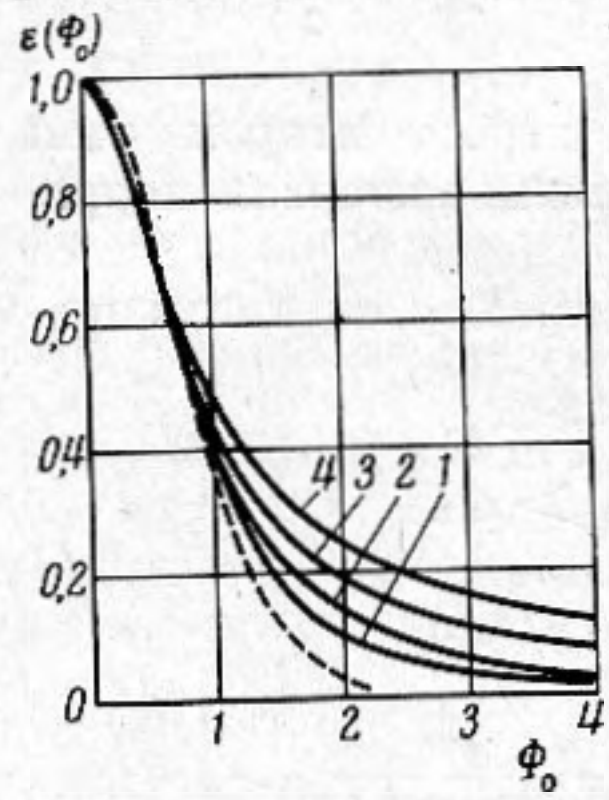
где $v_{1,2} = \sqrt{B}\omega_{1,2}/\omega_0$, $w = \omega_0\tau/2\sqrt{B}$. При разнесении по фронту волны,

$$\Gamma_P(\Delta\mathbf{R}, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Phi(v_2) - \Phi(v_1)}{v_2 - v_1}. \tag{13}$$

Оценка масштабов корреляции по формуле (13) при разных значениях $\delta = \Delta\omega/2\omega_0$ показывает, что с ростом δ наблюдается некоторое их увеличение. На уровне спада в l раз это увеличение не превышает 40% (значение, соответствующее $\delta \simeq 1$).

До сих пор мы рассматривали случай высоких неровностей, когда поле отраженной волны полностью нерегулярно. В общем случае поле отраженной волны P можно представить в виде суммы двух компонент — рассеянного поля p и невозмущенной части поля P_0. Соответственно корреляционную функцию поля P можно представить так: $K_P(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t_1, t_2) = \langle p_1 p_2^* \rangle + \langle P_{01} P_{02}^* \rangle$. При $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ и $t_1 = t_2$ K_P представляет сумму интенсивностей рассеянного поля $I_{\text{н}}$ (нерегулярная составляющая) и невозмущенной части поля $I_{\text{рег}}$ (регулярная составляющая). Полученные выше результаты относятся фактически к случаю $I_{\text{рег}} \ll I_{\text{н}}$ ($\Phi_0^2 \gg 1$). Однако вышеприведенными формулами можно пользоваться и в области $I_{\text{рег}} \gtrsim I_{\text{н}}$ (при $\Phi_0 \lesssim 1$) для оценки масштабов корреляции рассеянного поля, если заменить $\tau_1/\Phi_0\sqrt{1 - \delta^2/2}$ на τ_0, $a_1/\Phi_0\sqrt{1 - \delta^2/2}$ на a и затем устремить Φ_0 к нулю. Получающиеся при этом выражения дря пространственных интервалов корреляции совпадают с формулами работы [1].

Для невозмущенной части поля при любых Φ_0 масштабы корреляции определяются очевидными соотношениями $\Delta t_к \simeq \frac{2}{\beta}$, $\Delta R_к \simeq 2c/\beta$. При достаточно широкополосном излучении пространственные масштабы корреляции рассеянного поля и невозмущенной части поля близки, а при узкополосном излучении корреляция невозмущенной части поля спадает медленнее.



При азимутальном разнесении приемников по фронту волны для невозмущенной части поля сохраняется полная корреляция. В этом случае легко определить соотношение между $I_{рег}$ и $I_н$, которое можно характеризовать так называемым параметром когерентности

$$\varepsilon = \frac{I_{рег}}{I_{рег} + I_н} = \Gamma_P(\Delta\tilde{R} \gg \Delta\tilde{R}_к) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \Phi_0^2\delta^2}} \exp\left(-\frac{\Phi_0^2}{1 + \Phi_0^2\delta^2}\right). \qquad (14)$$

При $\Phi_0^2 \ll$ получаем $\varepsilon \simeq 1 - \Phi_0^2(1 + \delta^2/2)$, откуда видно, что с расширением полосы сигнала параметр когерентности несколько уменьшается (за счет роста интенсивности рассеянного поля). При $\Phi_0^2\delta^2 \gg 1$ получаем $\varepsilon \simeq \exp\left(-\frac{1}{\delta^2}\right) \cdot \frac{1}{\Phi_0\delta}$. В этой области с расширением полосы параметр когерентности нарастает.

В случае прямоугольного спектра излучения параметр когерентности описывается формулой (13), если положить в ней $B = \Phi_0^2$. На фигуре приведены зависимости $\varepsilon(\Phi_0)$ при разных значениях δ: пунктирная линия — $\delta = 0$, сплошная линия *1* — $\delta = 0{,}5$ (экспоненциальный спектр), линии *2*, *3*, *4* — соответственно $\delta = 0{,}75$, 0,9 и 1 (прямоугольный спектр). Заметное увеличение параметра когерентности при широкополосном излучении по сравнению со случаем монохроматического излучения на средней частоте ω_0 имеет место в области $\Phi_0 > 1$ при $\varepsilon < 0{,}5$. Существенно, что при $\delta = 0$ в области $\Phi_0 > 1$ параметр ε спадает с ростом Φ_0 по экспоненциальному закону, а в случае широкополосного излучения — по степенному закону ($\sim 1/\Phi_0$). Поэтому даже при $\Phi_0^2 \gg 1$ в широкополосном сигнале присутствует невозмущенная часть поля заметной интенсивности. Таким образом, при переходе к широкополосному излучению происходит некоторое усреднение флюктуаций, вызванных рассеянием на неровной поверхности.

Этот факт можно интерпретировать следующим образом. Очевидно, что когерентное сложение сигналов возможно при отражении от тех участков неровной поверхности, разность хода к которым не превышает пространственного интервала корреляции излученного сигнала $\Delta R_к = 2c/\beta$. При бóльшей разности хода сигналы складываются энергетически, что ведет к уменьшению глубины флюктуаций в отраженной волне (и, следовательно, к увеличению невозмущенной составляющей поля) по сравнению со случаем монохроматического излучения. Можно говорить также о «дроблении» неровностей по высоте, ведущем к уменьшению эквивалентного значения параметра Рэлея. Заметное увеличение невозмущенной части поля будет иметь место при условии $\Delta R_к = \frac{2c}{\beta} \gtrsim 2\sigma \sin\psi$, откуда, по порядку величины $\Phi_0 \gtrsim \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{1}{\delta}$. Эта оценка согласуется с полученными выше формулами.

В заключение покажем, что параметр когерентности ε характеризует уровень взаимной корреляции излученного шумоподобного сигнала $f(t)$ с отраженным от неровной поверхности P. Пользуясь исходным выражением для поля немонохроматического источника и выполняя операции, аналогичные проделанным при вычислении корреляционной функции Γ_F, получим

$$\Gamma_{fP} = \frac{\langle f(t) P^*(\mathbf{R}, t + \Delta t)\rangle}{\sqrt{\langle ff^*\rangle\langle PP^*\rangle}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\cdot Q_1(\omega)\exp\left[-i\omega\left(\Delta t - \frac{z+Z}{c\sin\psi}\right)\right]d\omega, \qquad (15)$$

где $Q_1(\omega) = \left\langle \exp\left(i2\frac{\omega}{c}\sin\psi\cdot F\right)\right\rangle$. Максимум Γ_{fP} достигается введением задержки на время распространения сигнала: $\Delta t = \frac{z+Z}{c\sin\psi}$. С другой стороны, выражение для параметра когерентности можно представить в виде

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) Q_1^2(\omega)\, d\omega. \qquad (16)$$

Сравнивая формулы (15) и (16) при нормальном распределении возвышений поверхности, получаем $\max \Gamma_{fP}(\Phi_0) = \varepsilon\left(\frac{\Phi_0}{\sqrt{2}}\right)$. В этом случае максимальное значение взаимнокорреляционной функции $P_{fP}(\Phi_0)$ получается из параметра когерентности путем уменьшения аргумента в $\sqrt{2}$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Чупров. О корреляции узкополосного шумового сигнала, рассеянного статистически шероховатой поверхностью. Акуст. ж., 1967, **13**, 1, 112—118.
2. Г. А. Алексеев. Рассеяние регулярных и шумовых сигналов неровной поверхностью. Радиотехн. и электрон., 1968, **13**, 9, 1683—1685.
3. Э. П. Гулин. Частотно-пространственно-временная корреляция волнового поля, рассеянного неровной поверхностью. Тр. Акуст. ин-та АН СССР, 1967, II, 49—70.

Акустический институт АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
1 августа 1969 г.