АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 2

УДК 534.24

МИНИМИЗАЦИЯ ТОЛЩИНЫ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ПРИ ЗАДАННОМ МОДУЛЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Н. И. Диденко, М. М. Мачевариани

Рассмотрена задача согласования среды, обладающей вещественным показателем преломления, с границей раздела, имеющей комплексный входной адмитанц. Согласование осуществляется с помощью неоднородного слоя минимальной возможной толщины с вещественным показателем преломления. Построена картина поведения оптимальных адмитанц-годографов. Показано, что с помощью подобного слоя произвольную среду с комплексным адмитанцем можно согласовать с внешней средой с заданным показателем преломления.

В работе [1] указано на возможность решения обратных задач оптимального поглощения волн в неоднородной среде путем сведения их к вариационной задаче Майера — Больца. Ниже, подобно тому, как это сделано в работе [1], находится строгое решение задачи оптимального согласования среды, обладающей вещественным показателем преломления n_0, с границей раздела, имеющей произвольный комплексный входной адмитанц. Искомый безразмерный (отнесенный к n_0) показатель преломления согласующего неоднородного слоя предполагается вещественным и определяется выражением

$$n^2 = \cos^2\theta_0 + Q(\tau). \tag{1}$$

Падение плоской монохроматической волны из среды с показателем преломления n_0 на неоднородный слой происходит под углом θ_0 (фиг. 1), $Q = Q(\tau)$ — функция, подлежащая определению.

Уравнения для реальной и мнимой частей адмитанца неоднородного слоя $G = p + iq$ в безразмерных координатах [1] имеют вид:

$$\frac{dp}{d\tau} = -2pq, \quad \frac{dq}{d\tau} = p^2 - q^2 - \cos^2\theta_0 - Q. \tag{2}$$

Здесь τ — приведенная толщина слоя $\tau = \omega \cdot z / c_0$, ω — частота падающей волны, c_0 — скорость ее распространения в среде с показателем преломления n_0.

Предположим, что входной адмитанц среды (или системы сред), на которой лежит неоднородный слой, известен, причем в начальный «момент» ($\tau = 0$)

$$p(0) = p_н, \quad q(0) = q_н, \tag{3}$$

и потребуем, чтобы модуль коэффициента отражения от слоя достигал заданного уровня, т. е. при некотором нефиксированном значении τ_l должно выполняться соотношение

$$\Phi_l \equiv \frac{[\cos\theta_0 - p(\tau_l)]^2 + q^2(\tau_l)}{[\cos\theta_0 + p(\tau_l)]^2 + q^2(\tau_l)} - \beta_l^2 = 0. \tag{4}$$

Здесь через β_l обозначен модуль коэффициента отражения. Условие физической осуществимости слоя $0 \leqslant m \leqslant Q \leqslant M$ удобно написать в виде равенства

$$\psi = (M - Q)(Q - m) - \nu^2 = 0, \tag{5}$$

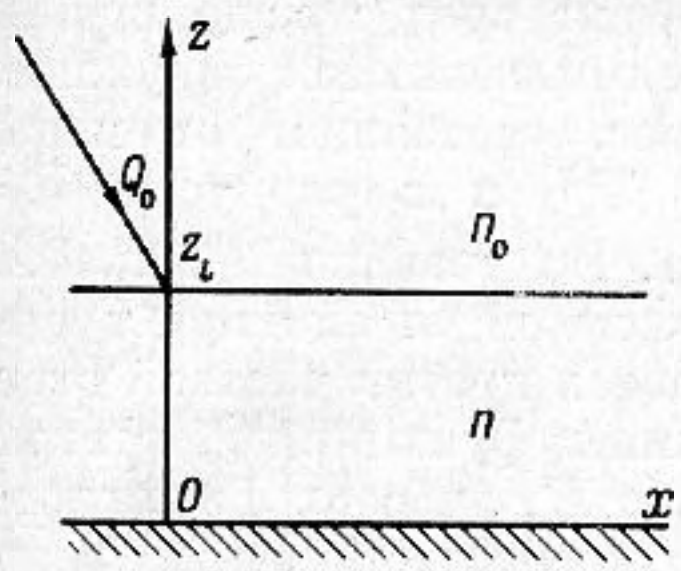
где $Q = Q(\tau)$ и $\nu = \nu(\tau)$ — функции управления, M и m — верхняя и нижняя границы возможных значений функции Q.

Требуется определить фазовые координаты $p(\tau)$ и $q(\tau)$, удовлетворяющие уравнениям (2) и начальным условиям (3), и функции управления $Q(\tau)$ и $\nu(\tau)$, связанные равенством (5), так, чтобы при выполнении условия (4) функционал

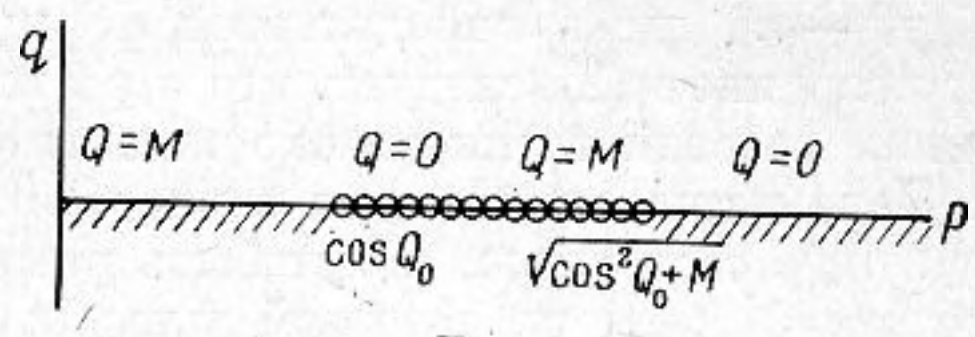
$$I = \tau_l \tag{6}$$

принимал минимальное значение.

Сформулированная задача отличается от рассмотренной в работе [1] формой краевого условия при $\tau = \tau_l$. В силу этого большинство необхо-



Фиг. 1



Фиг. 2

димых условий стационарности, полученных в этой работе, справедливы и для рассматриваемой задачи. В частности, уравнения для множителей Лагранжа λ_p, λ_q имеют вид

$$\frac{d\lambda_p}{d\tau} = 2q\lambda_p - 2p\lambda_q, \qquad \frac{d\lambda_q}{d\tau} = 2p\lambda_p + 2q\lambda_q. \tag{7}$$

Однако условия при $\tau = \tau_l$ для них будут иными:

$$\lambda_p(\tau_l) = \chi \frac{4\cos\theta_0(\cos^2\theta_0 + q^2 - p^2)}{[(\cos\theta_0 + p)^2 + q^2]^2}\Bigg|_{\tau=\tau_l},$$

$$\lambda_q(\tau_l) = -\chi \frac{8pq\cos\theta_0}{[(\cos\theta_0 + p)^2 + q^2]^2}\Bigg|_{\tau=\tau_l}, \tag{8}$$

где χ множитель Лагранжа, входящий в соотношение

$$H_\lambda\big|_{\tau=\tau_l} = \left(\lambda_p(\tau)\frac{dp}{d\tau} + \lambda_q(\tau)\frac{dq}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=\tau_l} = 1.$$

Из условий стационарности следует, что функция $Q(\tau)$ должна быть кусочно-непрерывна и принимать поочередно максимальное и минимальное значения. Это означает, что искомый оптимальный неоднородный слой должен состоять из последовательности чередующихся между собой однородных слоев с максимальным и минимальным значением функции $Q(\tau)$.

Значения переменной τ, при которых происходит скачкообразное изменение функции Q, определяются в соответствии с принципом максимума Понтрягина из уравнения [1]:

$$K = \frac{\partial H_\lambda}{\partial Q} = 0,$$

где K — так называемая функция переключения. Сами значения Q на тех или иных интервалах изменения τ находятся в зависимости от знака K на этих интервалах:

$$Q = m, \text{ если } K < 0 \text{ и } Q = M, \text{ если } K > 0.$$

В обоих случаях уравнения для фазовых координат [1] могут быть проинтегрированы в конечном виде.

При этом мы получаем

$$p + iq = \frac{p_j + iq_j - in \operatorname{tg} \tau n}{1 - i \dfrac{p_j + iq_j}{n} \operatorname{tg} \tau n}. \tag{9}$$

Здесь (p_j, q_j) точка на плоскости адмитанца, соответствующая нулевому значению τ на любом подынтервале, внутри которого Q остается неизменной.

Как легко видеть из последней формулы, для сред с вещественным показателем преломления, фазовыми траекториями являются окружности $(p - p_0)^2 + q^2 = R^2$, с центром на оси абсцисс, отстоящем от начала координат на расстояние $p_0 = (p_j^2 + q_j^2 + n^2) / 2p_j$ и с радиусом $R = \sqrt{p_0^2 - n^2}$, где n определяется формулой (1). Из уравнений для фазовых координат (2) следует, что с ростом независимой переменной τ «движение» фазовой точки по окружности совершается против часовой стрелки. Параметры окружности зависят от значений функции Q, которые, как отмечалось выше, могут быть равными либо M, либо m. Геометрическое место точек на фазовой плоскости (p, q), соответствующих значениям τ, при которых происходит скачкообразное изменение функции Q, будем называть линиями переключения. Построение этих линий производится следующим образом. В соответствии с принципом максимума Понтрягина функция Q может изменяться с M на m в области $q < 0$ и с m на M в области $q > 0$. Можно также легко показать, что оптимальный адмитанц — годограф, отвечающий решению системы (2) при $Q = M$, пересекает ось $q = 0$ в тех точках, в которых выполняется неравенство $M > p^2 - \cos^2 \theta_0$, а при $Q = m$ там, где $m < p^2 - \cos^2 \theta_0$.

Соответствующая ситуация для $M = 2$, $m = 0$ проиллюстрирована на фиг. 2.

Система уравнений для множителей Лагранжа (7) также, как и (2), легко интегрируется.

$$\lambda_q + i\lambda_p = \frac{\lambda_{qj} + i\lambda_{pj}}{1 + \operatorname{tg}^2 \tau_n} \left(1 - i \frac{p_j + iq_j}{n} \operatorname{tg} \tau n\right)^2. \tag{10}$$

Использование (10) с заменой τ на $-\tau$ (интегрирование уравнений (7) в обратном направлении) приводит к следующему выражению для функции K:

$$K = -\frac{\chi}{1 + \operatorname{tg}^2 \tau n} \left\{ \lambda_{ql} \left[\left(1 - \frac{q_l}{n} \operatorname{tg} \tau n \right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{p_l}{n} \operatorname{tg} \tau n \right)^2 \right] - \lambda_{p_l} 2 \frac{p_l}{n} \operatorname{tg} \tau n \left(1 - \frac{q_l}{n} \operatorname{tg} \tau n \right) \right\},$$

где $p_l = p(\tau_l)$, $q_l = q(\tau_l)$, $\lambda p_l = \lambda_p(\tau_l)$, $\lambda_{q_l} = \lambda_q(\tau_l)$.

Откуда, учитывая условия трансверсальности (8), легко получить выражение для корней функции K, т. е. для тех значений τ, при которых происходит скачкообразное изменение Q:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} \tau n}{n} \right)_{1,2} = \frac{\cos^2 \theta_0 - q_l^2 - p_l^2 \pm \sqrt{(\cos^2 \theta_0 - q_l^2 - p_l^2)^2 + 4q_l^2 \cos^2 \theta_0}}{2q_l \cos \theta_0} \tag{11}$$

Подставляя найденное из (11) значение переменной τ в уравнение для фазовых координат (с соответствующей заменой в нем τ на $-\tau$), после несложных алгебраических преобразований получим выражение для первой линии переключения, она оказывается эллипсом:

$$\left(\frac{p-\cos\theta_0\left(\frac{1+\beta_l}{1-\beta_l}\right)\left(1+\frac{Q}{2\cos\theta_0}\right)}{\left(\frac{1+\beta_l}{1-\beta_l}\right)\frac{Q}{2\cos\theta_0}}\right)^2+\left(\frac{q}{\frac{Q}{2\cos\theta_0}}\right)^2=1. \qquad (12)$$

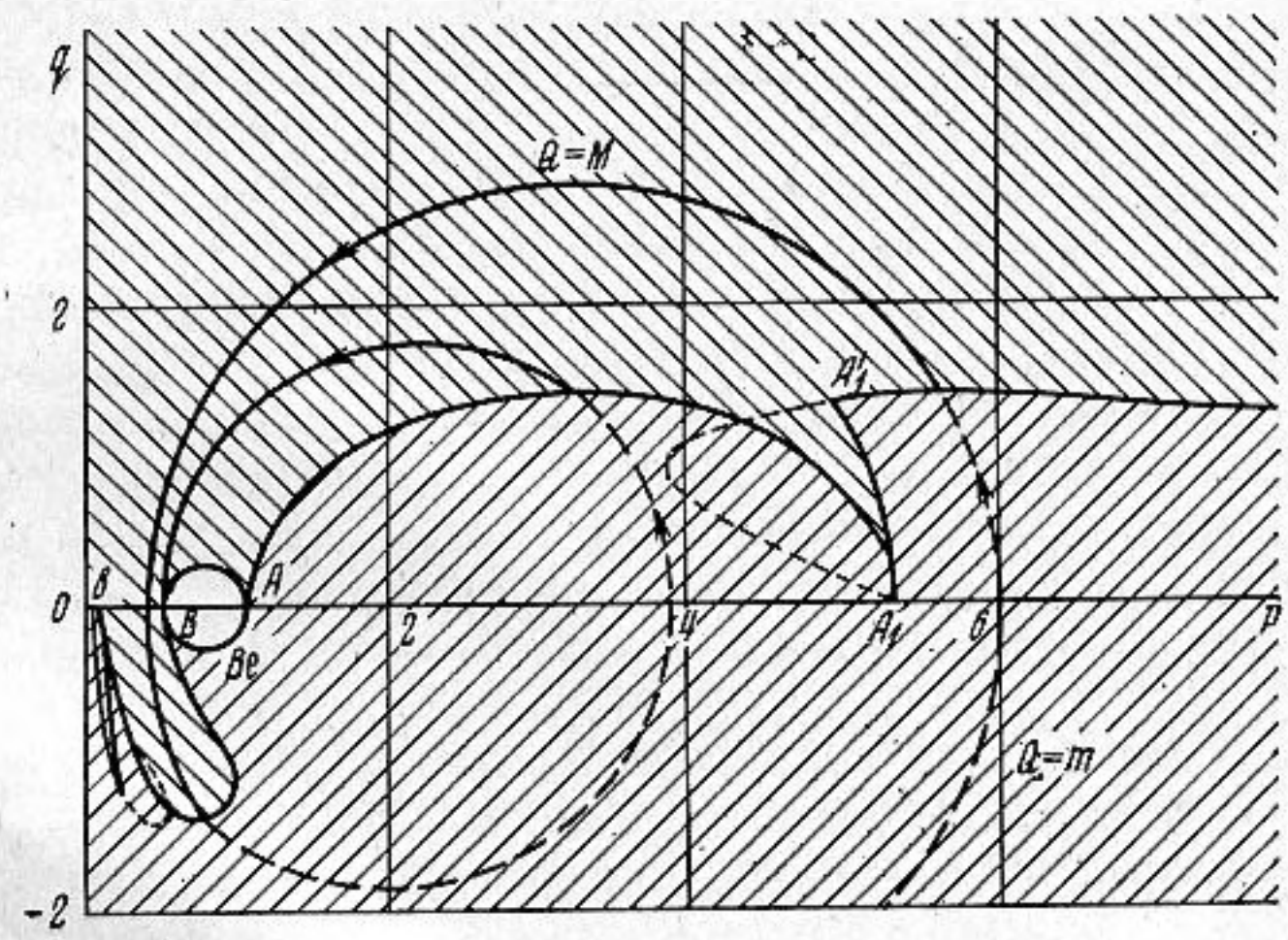
Последнее соотношение получено для случая, когда перед корнем в формуле (11) взят знак плюс. Случай отрицательного радикала приводит к экстремальным, но не к оптимальным адмитанц-годографам.

Аналогичным путем можно получить, что абсцисса и ордината i-ой линии переключения выражаются через абсциссу и ординату $i-1$-ой линии переключения по формулам

$$p_i=\frac{q_{i-1}^2+n^2}{p_{i-1}}, \qquad q_i=-q_{i-1}. \qquad (13)$$

Под n^2 в последнем соотношении понимается то значение показателя преломления, с которым фазовая точка двигалась от $i-1$ до i-й линии переключения.

При использовании формул (12) и (13) была построена картина поведения оптимальных адмитанц-годографов для случаев нормального



Фиг. 3

и косого падения и различных значений M и m. При построении было учтено, что последующие линии переключения пересекаются с предыдущими. Однако из правил переходов, вытекающих из принципа максимума, следует, что эти пересекающиеся части следует отбросить и, окончательно, получаем следующую картину поведения оптимальных траекторий (фиг. 3). Здесь $\theta_0=45°$, $\beta_l=0.2$, $0\leqslant Q\leqslant 2$. Отрезок A_1A_1' — представляет собой дугу окружности с $Q=M$, проходящую через точку A_1.

По условиям задачи значения фазовых координат (p_l, q_l) лежат на окружности $\beta_l=\text{const}$. Функция $Q[p, q]$ на плоскости (p, q) строится следующим образом. $Q[p, q]$ равна M выше линии $\ldots B_1BAA_1\ldots$, которая состоит из четных линий переключения, расположенных ниже оси абсцисс слева от окружности β_l и из нечетных, лежащих справа от этой окружности и выше оси абсцисс.

Ниже линии $\ldots B_1BAA_1\ldots$ $Q[p, q]$ равна m. На фиг. 3 эта ситуация показана разной штриховкой. Там же приведена одна из оптимальных фазовых траекторий. Зная координаты точек пересечения дуг экстремальных адмитанц-годографов с линиями переключения, из формулы (9) можно определить искомые толщины однородных слоев.

При согласовании сред с вещественным адмитанцем ($q_н = 0$) можно получить выражения для граничных значений толщин оптимального неоднородного слоя. Так, если $p_н$ попадает в точку A_1, то $z_l = \lambda_M / 4 = c_0 / (4\sqrt{\cos^2\theta_0 + M \cdot f})$, (четвертьволновый слой). Здесь f — частота падающей волны.

Из полученной картины поведения оптимальных траекторий видно, что с помощью подобного неоднородного слоя с вещественным показателем преломления можно согласовать с данной средой с показателем преломления n_0 практически любую среду с произвольным комплексным адмитанцем, исключая случаи чисто мнимого адмитанца, причем неоднородным слоем минимальной толщины и из имеющихся в наличии материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Лурье, М. М. Мачевариани. Минимизация толщины неоднородного слоя при заданном коэффициенте отражения монохроматической волны. Журнал прикл. механики и технической физики. 1969, 1, с. 44—50.

Ленинград

Поступила в редакцию
15 октября 1970 г.