АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 2

УДК 534.231

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

В. Т. Ляпунов

Рассматривается ослабление амплитуды изгибных волн, распространяющихся в пластине с периодическими препятствиями. Показано, что при отсутствии потерь в бесконечной пластине с такими препятствиями максимальное ослабление меньше, чем на пластине с одиночным препятствием. Для препятствий типа ребер жесткости получены простые приближенные расчетные формулы в предположении диффузности поля изгибных волн в возбуждаемой секции пластины. Отмечено удовлетворительное согласие расчетов с экспериментальными данными Хекла.

В работах [1, 2], посвященных исследованию передачи изгибных вибраций по стержням и пластинам с периодическими препятствиями отмечается, что по мере удаления от места возбуждения конструкции перепад вибраций наблюдается лишь на одном-двух первых препятствиях, а далее ослабления вибраций практически не происходит. Авторы указанных работ дают разные объяснения этому факту. Мюллер, теоретически исследуя одномерные системы при гармоническом возбуждении, убедился, что ослабление вибраций ограничивается взаимным преобразованием изгибных волн в продольные на каждом препятствии. Однако теоретические выводы были применены им для качественного объяснения эксперимента на пластинах при широкополосном возбуждении, что некорректно. Хекл позднее показал, что при шумовом возбуждении пластины ослабление вибраций после нескольких препятствий ограничивается не преобразованием типов волн, а прохождением энергии изгибных волн без ослабления на частотах, близких к резонансным частотам препятствия. При этом препятствия уподоблялись фильтрам с одинаковыми пространственно-частотными характеристиками, и виброизоляция, достигаемая применением нескольких ребер жесткости, оказалась практически равной виброизоляции, создаваемой одиночным ребром. Настоящая статья основана на представлениях, изложенных в работе Хекла.

Часто необходимо знать уровень вибраций не только в последней (задемпфированной) секции пластины, но также и в секциях, промежуточных между первой (возбуждаемой) и задемпфированной. Оценка уровней вибраций промежуточных секций является целью настоящей статьи. Порядок решения подобной задачи предложен Борисовым и Тартаковским [3], но при большом числе препятствий вычисления становятся настолько громоздкими, что в большинстве случаев расчеты выполнить практически невозможно. Необходимо получить более простые, хотя бы и приближенные, выражения.

Рассмотрим бесконечную пластину с бесконечным числом препятствий, периодически расположенных в одном направлении. Дальнейшее упрощение получим, предположив, что расстояние между соседними препятствиями больше длины изгибной волны в пластине. Пренебрежем также потерями колебательной энергии в пластине и в препятствиях. Для нахождения постоянной распространения g, представляющей отнесенный к длине пролета натуральной логарифм отношения амплитуд вибраций в соответственных точках соседних пролетов, необходимо знать модули и фазы

коэффициентов прохождения и отражения изгибных волн для одиночного препятствия на бесконечной пластине. При отсутствии потерь коэффициенты отражения R и прохождения T изгибных волн на произвольном тонком препятствии [4] связаны следующими соотношениями: $|T|^2 + |R|^2 = 1$, $T = |T| \exp(i\gamma)$, $R = -i|R| \exp(i\gamma)$. Предположим, что исследуемые вибрации представляют собой волны, стоячие вдоль препятствий и бегущие в поперечном направлении. Тогда в соответствии с работой [2] для гармонической изгибной волны постоянная распространения g определяется из уравнения

$$\operatorname{ch}(gl) = \frac{\cos(K_x l - \gamma)}{|T|}, \tag{1}$$

где l — длина пролета, K_x — проекция волнового вектора изгибной волны на направление нормали к препятствиям. Из уравнения (1), как известно, следует существование областей полного прохождения при $|T| \geqslant |\cos(K_x l - \gamma)|$ и областей ослабления (запирания) амплитуды изгибных волн, если $|T| < |\cos(K_x l - \gamma)|$. При шумовом возбуждении ослабление уровня вибраций в широкой полосе спектра ограничивается относительной величиной Q_0 энергии, прошедшей беспрепятственно в областях прозрачности. Если спектральная плотность энергии вибраций в возбуждаемой секции не зависит от частоты или изменяется медленно, относительную величину энергии, приходящейся на области прозрачности, можно оценить как отношение ширины частотной полосы прозрачности $\Delta\omega_0$ к суммарной ширине частотных полос $\Delta\omega_s$ прозрачности и запирания, т. е. $Q_0 = \Delta\omega_0/\Delta\omega_s$.

Предположим вначале, что $|T| \ll 1$ (обобщение на случай $|T| \to 1$ будет показано ниже). Условие прозрачности $|T| \geqslant |\cos(K_x l - \gamma)|$ будет выполняться лишь вблизи нулевых значений косинуса, при этом его аргумент изменяется в узких пределах.

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \nu_1 \leqslant (K_x l - \gamma) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \nu_2, \tag{2}$$

где n — целое число, включая нуль, а величины $\nu_{1,2} \ll \pi/2$. Отсюда находим, что $\nu_1 \simeq \nu_2 \simeq |T|$. При малых значениях $|T|$ его фаза изменяется медленно, и в пределах узкой полосы прозрачности ее можно считать постоянной. Для определения ширины полосы прозрачности получаем уравнение $(K_{x2} - K_{x1})l = 2|T|$. Умножая это равенство на $(K_{x2} + K_{x1})$, и приближенно полагая в пределах полосы прозрачности $K_{x2} + K_{x1} \simeq 2k_x$, получим $\Delta\omega_0 \simeq 4|T|K_x C_L h / (\sqrt{12}l)$, где C_L, h — скорость продольных волн в материале и толщина пластины. Величину частотной полосы $\Delta\omega_s$, включающей, как область прозрачности, так и запирания, найдем из равенства $(K_{x4} - K_{x3})l = \pi$. Аналогично предыдущему получаем $\Delta\omega_s \simeq 2\pi K_x C_L h / (\sqrt{12}l)$.

Таким образом, при малых значениях коэффициента прохождения $Q_0 \simeq 2|T|/\pi$. Если же $|T| \to 1$, при определении ширины полосы прозрачности следует учесть погрешность, получающуюся при замене $\sin\nu \simeq \nu$. При $|T| \to 1$ величина $\nu \to (\pi/2 - 0)$ и из (2) можно приближенно получить $\nu \simeq |T| \cdot \pi / 2$. Теперь относительную величину энергии, прошедшей беспрепятственно в областях прозрачности, можем определить по формуле $Q_0 = |T|/\alpha$, где коэффициент α изменяется в пределах от 1 при $|T| \to 1$ до $\pi / 2$ при $|T| \ll 1$.

Окончательно для максимального перепада уровней вибраций между возбуждаемой и промежуточными секциями пластины без потерь мы получаем следующую оценку:

$$\Delta L_1 \simeq 10 \lg \frac{\alpha}{\langle T \rangle}. \tag{3}$$

Как известно [5], перепад уровней вибраций между возбуждаемой и задемпфированной секциями при $\langle T^2 \rangle \ll 1$ можно оценивать по формуле

$$\Delta L_2 \simeq 10 \lg \frac{2}{\langle T^2 \rangle}. \tag{4}$$

В формулах (3) и (4) осреднение $\langle\rangle$ модуля коэффициента прохождения производится в полосе частот спектрального анализа, охватывающей несколько полос прозрачности и запирания. В случае диффузного поля изгибных волн в возбуждаемой секции осреднение необходимо производить также и по углу падения θ изгибных волн на препятствия. Обычно после осреднения по углу падения волн частотная зависимость становится монотонной, и дальнейшего осреднения по частоте не требуется. Поэтому будем вычислять $\langle T \rangle$ и $\langle T^2 \rangle$ по формулам

$$\langle T \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |T| \, d\theta, \qquad \langle T^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |T|^2 \, d\theta. \tag{5}$$

Для того чтобы оценить насколько быстро перепад вибраций между первой и промежуточными секциями достигает своего максимального значения ΔL_1, необходимо определить вклад Q_1 энергии изгибных волн, прошедших через первое препятствие в областях запирания, т. е. при $|T| < |\cos(K_x l - \gamma)|$. В соответствии с определением постоянной распространения для отношения амплитуд вибраций в соседних пролетах W_n и W_{n+1} имеем выражение $|W_{n+1}/W_n| = |\exp(gl)|$. Обращаясь к уравнению (1), получим $|W_{n+1} / W_n| = |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$, где $z = \cos(K_x l - \gamma)/|T|$. Для простоты рассмотрим область запирания, в которой $\cos(K_x l - \gamma) > 0$. Тогда в правой части последнего равенства можно опустить знак плюс и скобки, означающие абсолютную величину стоящего в них выражения, так как в такой области запирания $z > 1$ и $z - \sqrt{z^2 - 1} > 0$. При шумовом возбуждении вклад Q_1 полосы запирания в энергию вибраций второй секции может быть определен по формуле

$$Q_1 = \frac{1}{\Delta \omega_s} \int_{\Delta\omega_s - \Delta\omega_0} (z - \sqrt{z^2 - 1})^2 \, d\omega. \tag{6}$$

Как и раньше, в пределах полосы запирания мы пренебрегаем изменением величин $|T|$, γ и $\sqrt{\omega}$ по сравнению с изменением $\cos(K_x l - \gamma)$. В результате интегрирования мы получаем $Q_1 \simeq 2|T|/3\pi$. Таким образом, вклад области запирания в энергию вибраций за первым препятствием по крайней мере в три раза меньше энергии, прошедшей в области прозрачности. Следовательно, перепад уровней вибраций на первом препятствии меньше максимального перепада между возбуждаемой и промежуточными секциями лишь на величину порядка 2 *дб*. Таким образом, практически после первых двух препятствий перепад уровней вибраций должен достигать максимального значения.

Зная зависимость коэффициента прохождения от угла падения изгибной волны на препятствие, по формулам (3) — (5) можно получить необходимые оценки перепадов. Однако вследствие сложности этой зависимости часто требуется численное интегрирование, что неоправданно громоздко, ввиду приближенности получаемого результата. Для конкретных типов препятствий, например, ребер жесткости, целесообразно выполнить интегрирование приближенно. В литературе [2, 5] для этого случая известны успешные попытки приближенно оценить величину ΔL_2. Вычислим перепад вибраций ΔL_1 для ребер жесткости. Угловая и частотная зависимости коэффициента прохождения изгибной волны через ребро жесткости на пластине характеризуются двумя максимумами, соответ-

ствующими изгибным и крутильным резонансам ребра. Хекл [2] оценил прохождение колебательной энергии вследствие изгибных резонансов ребра. Никифоров [5] показал, в каких случаях прохождением энергии вблизи крутильных резонансов ребра не следует пренебрегать, и получил весьма простые выражения, учитывающие оба фактора. Следуя Никифорову, не будем пренебрегать прохождением энергии вблизи крутильных резонансов ребер.

Коэффициент прохождения изгибной волны через ребро жесткости на пластине может быть определен по формуле [4]

$$|T|^2 = \left[1 + \left(\frac{A-B}{1+AB}\right)^2\right]^{-1}, \tag{7}$$

где

$$A = \frac{k_x}{k'} + 4\frac{k_x}{k_\text{р}^2\mu}[1-(k_y/k_\text{в})^4]^{-1},$$

$$B = -\frac{k'}{k_x} + \frac{4}{k_x k_\text{р}^2 \mu r^2}[1-(k_y/k_s)^2]^{-1},$$

$k_\text{р}$, k' — волновые числа бегущей и неоднородной изгибных волн пластины, $k_\text{в}$, k_s — волновые числа изгибных и крутильных колебаний ребра, μ — отношение массы единицы длины ребра к массе единицы площади пластины, r — радиус инерции поперечного сечения ребра.

Ограничимся рассмотрением массивных ребер $k_\text{р}\mu \gg 1$. Поскольку прохождение изгибных волн через массивные ребра значительно лишь в узких областях углов падения, соответствующих $k_\text{р} \sin\theta \simeq k_\text{в}$ и $k_\text{р}\sin\theta \simeq k_s$, его принято вычислять отдельно, как прохождение за счет изгиба ребра $T_\text{в}$ и за счет кручения ребра T_s. Как обычно, будем полагать $k_\text{р} \simeq k_x \simeq k'$, так как $k_s^2 < k_\text{в}^2 \ll k_\text{р}^2$. С учетом сделанных приближений для тяжелых ребер можем написать

$$|T_S|^2 \simeq \left[1 + \left(\frac{k_\text{р}^2\mu r^2}{2}\right)^2 (1 - k_\text{р}^2 \sin^2\theta/k_s^2)^2\right]^{-1},$$

$$|T_B|^2 \simeq \left[1 + \left(\frac{k_\text{р}\mu}{2}\right)^2 (1 - k_\text{р}^4 \sin^4\theta/k_\text{в}^4)^2\right]^{-1}. \tag{8}$$

Интегрируя по углу θ квадраты модулей коэффициента прохождения, получим, аналогично работе [5] с незначительными уточнениями, следующие выражения:

$$\langle T_S^2\rangle \simeq \frac{2k_S}{k_\text{р}^4\mu r^2}, \quad \langle T_B^2\rangle \simeq \frac{k_B}{k_\text{р}^2\mu}. \tag{9}$$

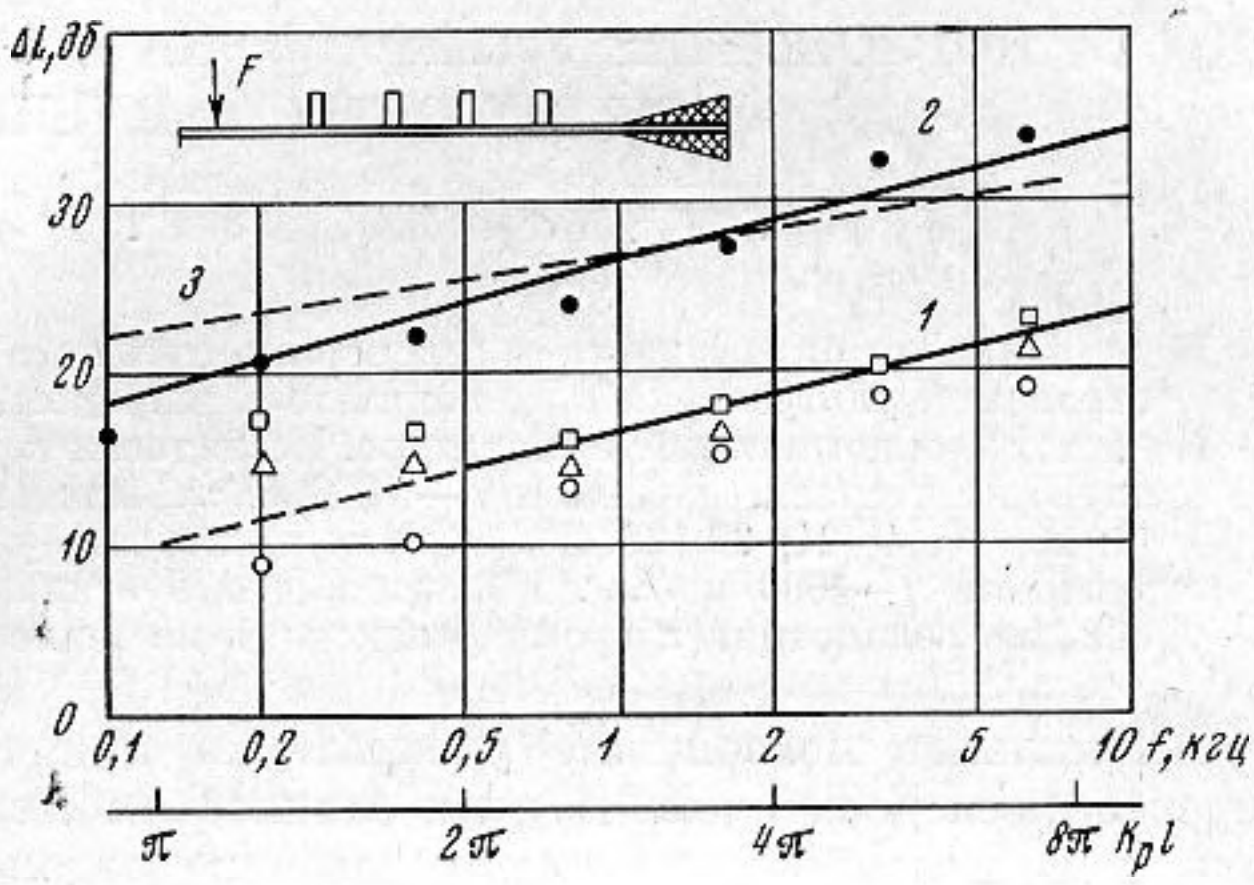
Переходя к интегрированию модулей коэффициента прохождения, видим, что расчет даже приближенных выражений сводится к эллиптическим и гиперэллиптическим интегралам, которые через элементарные функции не выражаются [6]. Поэтому, дополнив подынтегральные выражения множителями k_y / k_s и $(k_y / k_\text{в})^3$ соответственно, сведем эти интегралы к псевдоэллиптическим. Допустимость такого перехода оправдывается приближенностью решения и тем обстоятельством, что при $k_\text{р}\mu \gg 1$ величина интеграла определяется весьма узкой областью углов, в которой искажающее влияние этих множителей невелико. В результате интегрирования получим

$$\langle T_S\rangle \simeq \langle T_S^2\rangle \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\langle T_S^2\rangle},$$

$$\langle T_B\rangle \simeq \langle T_B^2\rangle \frac{2}{\pi} \ln \frac{k_\text{р}}{k_B\langle T_B^2\rangle}, \tag{10}$$

где $\langle T_s^2 \rangle$ и $\langle T_в^2 \rangle$ уже вычислены по формулам (9). Имея $\langle T^2 \rangle = \langle T_в^2 \rangle + \langle T_s^2 \rangle$ и $\langle T \rangle = \langle T_в \rangle + \langle T_s \rangle$, с помощью выражений (3) и (4) можно оценивать перепады уровней вибраций между возбуждаемой, промежуточными и задемпфированной секциями пластины. При этом в формуле (3) следует принимать $\alpha = 1$, так как для ребер жесткости величина $\langle T \rangle$ определяется значениями $|T|$, близкими к единице.

На фигуре произведено сравнение полученных результатов с экспериментом Хекла [2] на алюминиевой пластине толщиной 0,08 *см* с четырьмя стальными ребрами сечением 2,5 × × 1,25 *см*, ширина пластины равнялась 100 *см*, а расстояние между ребрами —12,5 *см*. При точечном шумовом возбуждении крайней секции Хеклом были измерены в октавных полосах частот перепады вибраций между возбуждаемой и четырьмя остальными секциями. Кривые *1* и *2* представляют результаты расчета величин ΔL_1 и ΔL_2 соответственно по предлагаемым формулам. Кривой *3* и зачерненными кружками представлены результаты расчета и эксперимента Хекла для перепада вибраций между возбуждаемой и задемпфированной секциями. Учет прохождения энергии вследствие кручения ребер приводит, как уже показано Никифоровым [5], к несколько более лучшему согласованию с экспериментом на низких частотах (кривая *2*).



Остановимся подробнее на согласовании кривой *1* с экспериментом. Кружками, треугольниками и квадратами представлены экспериментальные данные Хокла о перепаде вибраций на одном, двух и трех ребрах соответственно. На частотах выше 500 *гц* по мере удаления от возбудителя измеренный перепад вибраций быстро приближается к расчетной кривой, характеризующей предельный перепад вибраций в бесконечной ребристой пластине без потерь. На более низких частотах, 200 и 400 *гц*, перепад вибраций на двух и трех ребрах превышает расчетные значения. По-видимому это обусловлено влиянием неоднородных волн, которое еще мало сказывается в первой секции, так как $K_p l > \pi$, но становится заметным после нескольких ребер, поскольку расстояние между соседними ребрами на этих частотах еще не превышает длины изгибной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Müller. Biegewellen — Dämmung an symmetrischen und exzentrischen Sperrmassen. Frequenz, 1957, 11, 10—11, 325—351.
2. M. Heckl. Wave propagation an beam — plate systems. J. Acoust. Soc. America, 1961, 33, 5, 640—651.
3. Л. П. Борисов, Б. Д. Тартаковский. Распространение изгибных волн по пластине с тонкими препятствиями. Акуст. ж., 1965, 11, 3, 306—312.
4. В. Т. Ляпунов. Изоляция изгибных волн в пластинах произвольным препятствием. Акуст. ж., 1968, 14, 4, 572—576.
5. А. С. Никифоров. О прохождении изгибных волн через виброзадерживающую массу. Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1968, 63, 249—256.
6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, М., Физматгиз, 1958.

Ленинград

Поступила в редакцию
16 марта 1969 г.