

УДК 534.611

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЛИНИЙ РЕГРЕССИИ И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ОТНОШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

С. Г. Гершман, Ю. И. Тужилкин, П. Г. Тюрин

Получены выражения для линий регрессии и корреляционных отношений процессов, связанных некоторыми частными видами статистической зависимости. Введены понятия τ -подобных процессов и коэффициентов корреляционного отношения. Описано аналоговое устройство для получения линий регрессии и измерения корреляционного отношения. Приводятся результаты экспериментов.

В настоящее время в различных областях физических исследований широко используется корреляционный анализ случайных процессов, основанный на измерении корреляционной или нормированной корреляционной функции изучаемых процессов. Такой анализ эффективен лишь при наличии между процессами прямолинейной корреляции [1, 2]. В ряде случаев, например, при исследованиях в области нелинейной акустики, при изучении процессов в нелинейных четырехполюсниках, в различных областях радиотехники экспериментатору приходится сталкиваться со статистическими процессами, связанными криволинейной корреляцией. Нормированная корреляционная функция при этом может оказаться близкой к нулю, несмотря на высокую степень зависимости между процессами. В таких условиях более адекватной, чем коэффициент корреляции, мерой статистической зависимости между процессами является корреляционное отношение [1, 2] одного из процессов к другому.

Будем рассматривать лишь стационарные, по крайней мере в широком смысле, и стационарно связанные процессы. Пусть $w(x, y, \tau)$ — плотность совместного распределения вероятностей процессов $X(t)$ и $Y(t - \tau)$, причем система координат выбрана так, что, аналогично определению, данному в работе [1], будем называть корреляционным отношением процесса Y к процессу X величину

$$P_{yx}(\tau) = \frac{1}{\sigma_y} [\langle \varphi_y^2(x, \tau) \rangle]^{1/2} = \frac{1}{\sigma_y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y^2(x, \tau) w(x) dx \right]^{1/2}, \quad (1)$$

где $\sigma_y = \langle Y \rangle$, $w(x)$ — плотность распределения вероятностей процесса X , а

$$\varphi_y(x, \tau) = \langle Y | X = x \rangle = \frac{1}{w(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y w(x, y, \tau) dy \quad (2)$$

— линия регрессии процесса Y по X .

Подобно корреляционному отношению случайных величин [1], корреляционное отношение случайных процессов $P_{yx}(\tau)$ может изменяться от нуля, если $\varphi_y(x, \tau) \equiv 0$, до единицы, если при некотором значении временной задержки τ процесс Y представляет собой однозначную функцию

X , причем $P_{yx}(\tau) \geq |R_{yx}(\tau)|$; знак равенства здесь имеет место тогда и только тогда, когда корреляция между Y и X прямолинейна. Кроме того, корреляционное отношение $P_{yx}(\tau)$ обладает своего рода «инвариантностью» к широкому классу преобразований процесса X , именно $P_{yx}(\tau) = P_{yf(x)}(\tau)$, какова бы ни была однозначная функция $f(x)$, такая, что имеет место равенство

$$\langle \varphi_y(x, \tau) | f(x) \rangle = \varphi_y(x, \tau).$$

Это выполняется, в частности, для любой монотонной (двузначной) функции f . Свойства корреляционного отношения делают его более гибким инструментом исследования случайных процессов, чем коэффициент корреляции. В практических приложениях наряду с корреляционным отношением могут представлять интерес и линии регрессии, поскольку эти последние аппроксимируют статистическую зависимость между исследуемыми процессами однозначной зависимостью по критерию наименьших квадратов.

При изучении четырехполюсников с гистерезисом, как показано в работе [3], полезно рассматривать также линии

$$\varphi_y^+(x, \tau) = \left\langle Y | x, \frac{dX}{dt} > 0 \right\rangle, \quad \varphi_y^-(x, \tau) = \left\langle Y | x, \frac{dX}{dt} < 0 \right\rangle,$$

где X — процесс на входе, Y — процесс на выходе четырехполюсника. Эти линии нам представляется удобным называть условными линиями регрессии.

При измерении корреляционного отношения случайных процессов, как видно из формул (1) и (2), основная трудность заключается в нахождении линии регрессии, так как при этом необходимо провести множество операций нахождения условного среднего уже для одного фиксированного значения временной задержки между процессами. Кроме того, требуется произвести операции нахождения дисперсии одного из процессов и дисперсии линии регрессии, причем последняя операция, очевидно, может быть проведена лишь последовательно с нахождением линии регрессии. Для сравнения отметим, что измерение значения нормированной корреляционной функции при некоторой фиксированной задержке требует проведения всего трех операций усреднения, и все эти операции могут быть проведены параллельно.

Покажем, что существует некоторый широкий класс статистических зависимостей между процессами, процедура нахождения зависимости корреляционного отношения которых от задержки может быть существенно упрощена. Для этого вычислим выражения для линий регрессии и корреляционных отношений процессов, связанных некоторыми частными видами статистической зависимости, представляющими интерес с практической точки зрения.

Пример 1. Нормальные процессы $X_1(t)$ и $X_2(t - \tau)$ с нулевым средним. Функция плотности совместного распределения вероятностей процессов X_1 и X_2 имеет известный [4] вид

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \tau) = & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2(\tau)}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R^2(\tau))} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2R(\tau)x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где σ_1 и σ_2 — дисперсии, $R(\tau)$ — коэффициент корреляции X_1 и X_2 . Из формул (1), (2) и (3) получим известный [1] результат

$$\varphi_{x_2}(x_1, \tau) = R(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1, \quad P_{x_2x_1}(\tau) = |R(\tau)|. \quad (4)$$

(Здесь и в дальнейшем при вычислении интегралов мы пользовались таблицами [5]). Итак линии регрессии в этом случае прямолинейны, а кор-

реляционное отношение совпадает с модулем коэффициента корреляции. Условные линии регрессии X_2 по X_1 , имеют вид [3]

$$\begin{aligned}\varphi_{x_2^+}(x_1, \tau) &= R(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 - \frac{2\sigma_1}{\omega\sqrt{2\pi}} \frac{dR(\tau)}{d\tau}, \\ \varphi_{x_2^-}(x_1, \tau) &= R(\tau) \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 + \frac{2\sigma_1}{\omega\sqrt{2\pi}} \frac{dR(\tau)}{d\tau},\end{aligned}\quad (5)$$

где ω — среднеквадратическая частота энергетического спектра X_1 . Интересно, что при $x_1 = 0$ условные линии регрессии представляют собой с точностью до постоянных множителей производную по задержке от корреляционной функции процессов X_2 и X_1 .

Пример 2. Процессы $X_1(t)$ и $Z_2(t - \tau) = X_2^2(t - \tau) - \sigma_2^2$. Процесс Z_2 представляет собой, как видно из его определения, результат двухполупериодного квадратичного детектирования процесса X_2 и вычитания постоянной составляющей. Функция плотности совместного распределения вероятностей процессов X_1 и Z_2 может быть найдена из распределения (3) с помощью известных правил [4]. Она имеет вид:

$$\begin{aligned}w(x_1, z_2, \tau) &= \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2[1-R^2(\tau)]} \left(\frac{z_2 + \sigma_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_1^2}{\sigma_1^2}\right)\right\} \operatorname{ch}\left\{\frac{R(\tau)x_1\sqrt{z_2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2[1-R^2(\tau)]}\right\}}{2\pi\sqrt{[1-R^2(\tau)](z_2 + \sigma_2^2)}}\end{aligned}\quad (6)$$

и из определений (1), (2) и формулы (6) получим

$$\varphi_{z_2}(x_1, \tau) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} R^2(\tau) (x_1^2 - \sigma_1^2); \quad P_{z_2 x_1}(\tau) = R^2(\tau). \quad (7)$$

Итак, линии регрессии Z_2 по X_1 , представляют собой параболы, пересекающие ось x_1 в точках σ_1 и $-\sigma_1$, а корреляционное отношение Z_2 к X_1 совпадает с квадратом коэффициента корреляции X_2 и X_1 . Аналогичный результат для корреляционного отношения квадрированного нормального процесса к нормальному процессу получен в работе [6].

Пример 3. Процессы $X_1(t)$ и $V_2(t - \tau) = 1/2[X_2^2(t - \tau) - \hat{X}_2^2(t - \tau)]$. Здесь $\hat{X}_2(t - \tau)$ — процесс $X_2(t - \tau)$, подвергнутый преобразованию Гильберта. V_2 представляет собой, как можно показать, высокочастотную часть процесса Z_2 .

Представим линию регрессии V_2 по X_1 , в виде

$$\varphi_{v_2}(x_1, \tau) = \frac{1}{2} \langle X_2^2 | x_1 \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{X}_2^2 | x_1 \rangle. \quad (8)$$

Для вычисления условных средних в формуле (8) необходимо найти функции плотности совместного распределения вероятностей X_1 и \hat{X}_2^2 и X_1 и \hat{X}_2 . Первая из этих функций может быть построена по формуле (3), вторая — на основании функции плотности распределения вероятностей X_1 и \hat{X}_2 , которая, как известно [4], имеет вид

$$\begin{aligned}w(x_1, \hat{x}_2, \tau) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\hat{R}^2(\tau)}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2[1-\hat{R}^2(\tau)]} \left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\hat{R}(\tau)x_1\hat{x}_2}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\},\end{aligned}\quad (9)$$

где $\hat{R}(\tau)$ — преобразование Гильберта от $R(\tau)$. С помощью известных [4] правил из распределений (3) и (9) получим

$$w(x_1, \hat{x}_2^2, \tau) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2[1 - \hat{R}^2(\tau)]} \left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \operatorname{ch} \left\{ \frac{\hat{R}(\tau) x_1 \sqrt{\hat{x}_2^2}}{\sigma_1 \sigma_2 [1 - \hat{R}^2(\tau)]} \right\}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{[1 - \hat{R}^2(\tau)] \hat{x}_2^2}}, \quad (10)$$

$$w(x_1, \tau) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2[1 - R^2(\tau)]} \left[\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \operatorname{ch} \left\{ \frac{R(\tau) x_1 \sqrt{x_2^2}}{\sigma_1 \sigma_2 [1 - R^2(\tau)]} \right\}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{[1 - R^2(\tau)] x_2^2}},$$

и из равенств (8), (10), и определений (1) и (2) найдем

$$\varphi_{v_2}(x_1, x_2^2, \tau) = \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_1^2} [R^2(\tau) - \hat{R}^2(\tau)] (x_1^2 - \sigma_1^2); \quad P_{v_2 x_1}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{2} |R^2(\tau) - \hat{R}^2(\tau)|. \quad (11)$$

Итак, линии регрессии V_2 по X_1 представляют собой параболы, пересекающие ось x_1 в точках σ_1 и $-\sigma_1$. Заметим, что функция $1/2[R^2(\tau) - \hat{R}^2(\tau)]$ представляет собой высокочастотную часть $\hat{R}^2(\tau)$.

Пример 4. Процессы $X_1(t)$ и $U_2(t - \tau) = 1/2[X_2^2(t - \tau) + \hat{X}_2^2(t - \tau)] - \sigma_2^2$. Процесс U_2 , как можно показать, представляет собой низкочастотную часть процесса Z_2 и с точностью до постоянного слагаемого $-\sigma_2^2$ равен половине квадрата огибающей X_2 . Линия регрессии и корреляционное отношение U_2 к X_1 могут быть найдены с помощью процедуры, аналогичной использованной в предыдущем примере. Они имеют вид:

$$\varphi_{u_2}(x_1, \tau) = \frac{\sigma_2^2}{2\sigma_1^2} [R^2(\tau) + \hat{R}^2(\tau)] (x_1^2 - \sigma_1^2); \quad P_{u_2 x_1}(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{2} [R^2(\tau) - \hat{R}^2(\tau)]. \quad (12)$$

Линии регрессии U_2 по X_1 представляют собой параболы, пересекающие ось x_1 в точках σ_1 и $-\sigma_1$. Функция $R^2(\tau) + \hat{R}^2(\tau)$ представляет собой низкочастотную часть $R^2(\tau)$ и равна квадрату огибающей нормированной корреляционной функции $R(\tau)$ процессов X_1 и X_2 .

Пример 5. Процессы $X(t) = \cos(\omega t + \psi)$ и $Y(t - \tau) = \cos[n(\omega t + \psi) + \theta]$, где ψ — случайная фаза, распределенная равномерно в $(0, 2\pi)$, $\theta = n\omega\tau + \eta$.

Легко видеть, что $\langle Y^2 \rangle = 1/2$. Перепишем Y в виде

$$Y(t - \tau) = \cos \theta \cos n(\omega t + \psi) - \sin \theta [\pm \sqrt{1 - \cos^2 n(\omega t + \psi)}]. \quad (13)$$

По формуле Муавра

$$\begin{aligned} \cos n(\omega t + \psi) &= 2^{n-1} x^n - n 2^{n-3} x^{n-2} + \frac{n}{2} C_{n-3}^1 2^{n-5} x^{n-4} - \\ &- \frac{n}{3} C_{n-4}^1 2^{n-7} x^{n-6} + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где $x = \cos(\omega t + \psi)$. Обозначим через $p_n(x)$ полином n -ой степени, стоящий в правой части тождества (14). Из формулы (13) имеем

$$\varphi_y(x, \tau) = \langle Y | x \rangle = \cos \theta \langle p_n(x) | x \rangle - \sin \theta \langle \pm \sqrt{1 - p_n^2(x)} | x \rangle.$$

Очевидно, что первое из условных средних, стоящих в последнем выражении, равно $p_n(x)$, т. к. $p_n(x)$ — однозначная функция x . Второе условное среднее равно нулю, т. к. однозначная функция $\sqrt{1 - p_n^2(x)}$ принимает с равной вероятностью знак плюс или минус. Поэтому

$$\varphi_y(x, \tau) = \cos \theta p_n(x) = \cos(n\omega\tau + \eta) p_n(x). \quad (15)$$

Вычислим теперь корреляционное отношение Y к X . Из определения (1) и формулы (15)

$$P_{yx}(\tau) = |\cos \theta| \frac{1}{\sigma_y} \sqrt{\langle p_n^2(x) \rangle}.$$

Для нахождения подкоренного выражения положим $\theta = 0$. В этом случае, как следует из выражения (13), Y становится однозначной функцией X и корреляционное отношение должно быть равно единице, откуда

$$\langle p_n^2(x) \rangle = \sigma_v^2 = \frac{1}{2}, \quad (16)$$

и

$$P_{yx}(\tau) = |\cos \theta| = |\cos(n\omega\tau + \eta)|.$$

Пример 6. Процессы $X(t) = \cos(\omega t + \psi)$ и

$$S(t - \tau) = \sum_i a_i \cos[n_i(\omega t + \psi) + \theta_i],$$

где ψ — случайная фаза, распределенная равномерно в $(0, 2\pi)$, $\theta_i = n_i\omega\tau + \eta_i$. Можно показать, что $\langle S^2 \rangle = \sigma_s^2 = \frac{1}{2} \sum_i a_i^2$.

Из определения (2) и формулы (15) получим

$$\varphi_s(x, \tau) = \sum_i a_i \langle \cos[n_i(\omega t + \psi) + \theta_i] | x \rangle = \sum_i a_i \cos \theta_i p_{n_i}(x). \quad (17)$$

Подставляя последнее выражение в определение (1), найдем

$$\begin{aligned} P_{sx}(\tau) &= \frac{1}{\sigma_s} \sqrt{\langle [\sum_i a_i \cos \theta_i p_{n_i}(x)]^2 \rangle} = \\ &= \frac{1}{\sigma_s} \left[\sum_i a_i^2 \cos^2 \theta_i \langle p_{n_i}^2(x) \rangle + 2 \sum_i a_i a_j \cos \theta_i \cos \theta_j \langle p_{n_i}(x) p_{n_j}(x) \rangle \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

С помощью формулы (14) и простых тригонометрических преобразований можно показать, что $p_{n_i}(x) p_{n_j}(x) = \frac{1}{2} [p_{n_i+n_j}(x) + p_{n_i-n_j}(x)]$. С дру-

гой стороны, известно [1], что среднее значение линии регрессии равно нулю, и из выражения (14) следует, что $\langle p_n(x) \rangle = 0$. Пользуясь последним равенством и формулой (16), получим

$$P_{sx}(\tau) = \frac{1}{\sigma_s} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i a_i^2 \cos^2 \theta_i} = \left[\sum_i a_i^2 \right]^{-1/2} \left[\sum_i a_i^2 \cos^2(n_i\omega\tau + \eta_i) \right]^{1/2}.$$

Подводя итог, заметим, что корреляционные функции пар процессов, рассмотренных в примерах [2-4], тождественно равны нулю, поскольку, как видно из выражений для соответственных линий регрессии, эти процессы линейно независимы. То же относится и к парам процессов, рассмотренным в примерах 5 и 6, если соответственные n и n_i четны. Если же n или некоторые из n_i нечетны, то корреляционные функции рассмотренных в примерах 5 и 6 пар процессов не равны тождественно нулю, так как в таком случае имеет место вклад линейной зависимости в зависимость между этими процессами (см. (14), (15) и (17)), однако, корреляционные функции меньше по абсолютной величине соответствующих корреляционных отношений, поскольку упомянутые зависимости все же нелинейны.

Обратим внимание на структуру выражений для линий регрессий, полученных в примерах 1-5. Каждое из них может быть представлено в виде

$$\varphi(x, \tau) = f_{\tau_0}(\tau) \varphi(x, \tau_0), \quad (19)$$

где $f_{\tau_0}(\tau)$ — коэффициент подобия, не зависящий от x , $\varphi(x, \tau_0)$ — линия регрессии при любом τ_0 таком, что $\varphi(x, \tau_0) \neq 0$. Пару процессов, линия

регрессии первого из которых по второму удовлетворяет условию (19), мы будем называть τ — подобными процессами. Из определения (1) и выражения (19) легко увидеть, что если процессы X и Y τ — подобны, то

$$P_{yx}(\tau) = P_{yx}(\tau_0) |f_{\tau_0}(\tau)| = P_{yx}(\tau_0) \left| \frac{\varphi_y(x_0, \tau)}{\varphi_y(x_0, \tau_0)} \right|, \quad (20)$$

каково бы ни было x_0 , такое, что $\varphi_y(x_0, \tau_0) \neq 0$. Из формулы (20) следует, что процедура нахождения зависимости корреляционного отношения от задержки может быть существенно упрощена, если исследуемые процессы τ — подобны. Действительно, для этого оказывается достаточно измерить значения корреляционного отношения для любого τ_0 , такого, что $P_{yx}(\tau_0) \neq 0$, и найти зависимость от задержки значения регрессии при одном произвольном x_0 , таком, что $\varphi_y(x_0, \tau_0) \neq 0$.

Если в выражении (20) отбросить знак модуля, можно получить более информативную, чем корреляционное отношение, характеристику статистической зависимости между τ — подобными процессами

$$F_{yx}(\tau, \tau_0) = P_{yx}(\tau_0) \frac{\varphi_y(x_0, \tau)}{\varphi_y(x_0, \tau_0)},$$

которую мы назовем коэффициентом корреляционного отношения. Эта величина, равная по модулю корреляционному отношению, может изменяться, подобно коэффициенту корреляции от -1 до 1 . В частности, если корреляция между процессами X и Y прямолинейна, то, очевидно,

$$F_{yx}(\tau, \tau_0) = R_{yx}(\tau) \operatorname{sign} \{R_{yx}(\tau_0)\}.$$

Представляет интерес вопрос о том, насколько широк класс τ — подобных процессов. Как уже отмечалось, к нему принадлежат, в частности, процессы, рассмотренные в примерах 1—5. Очевидно, также, что τ — подобны все процессы, корреляция между которыми прямолинейна. Докажем следующее утверждение: если процессы $X(t)$ и $Y(t - \tau)$ τ — подобны, то процессы $\Xi(t) = \Phi[X(t)]$ и $Y(t - \tau)$ также τ — подобны, какова бы ни была функция Φ . Действительно, из τ — подобия X и Y следует, что $\varphi_y(x, \tau) = f_{\tau_0}(\tau) \varphi_y(x, \tau_0)$. Тогда процесс Y может быть представлен в виде

$$Y(t - \tau) = f_{\tau_0}(\tau) \varphi_y[X(t), \tau_0] + Z(t, \tau), \quad (21)$$

где $Z(t, \tau)$ — некоторый процесс, такой, что

$$\langle Z|x \rangle \equiv 0. \quad (22)$$

Пользуясь представлением (21), найдем теперь линию регрессии процесса Y по $\Xi = \Phi[X]$:

$$\varphi_y(\xi, \tau) = f_{\tau_0}(\tau) \langle \varphi_y[X, \tau_0] | \Phi[X] = \xi \rangle + \langle Z|\xi \rangle.$$

Второе условное среднее в последнем выражении, очевидно, тождественно равно нулю, так как какое бы значение ξ мы не выбрали, оно достигается в моменты, когда процесс X достигает некоторых значений x_i , таких, что $\Phi(x_i) = \xi$, и из тождества (22) мы получим $\langle Z|\xi \rangle = \langle Z|x_i \rangle = 0$. Поэтому

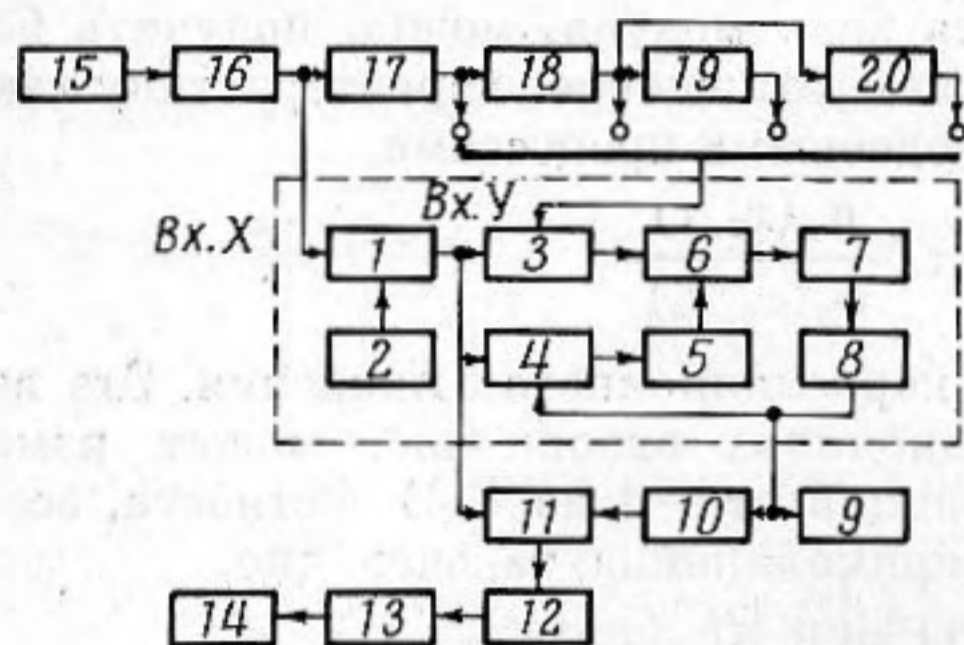
$$\varphi_y(\xi, \tau) = f_{\tau_0}(\tau) \langle \varphi_y[X, \tau_0] | \Xi = \xi \rangle, \quad (23)$$

и т. к. $\langle \varphi_y[X, \tau_0] | \xi \rangle$ не зависит от τ , процессы Ξ и Y τ — подобны. Замечательно, что коэффициент подобия линии регрессии Y по $\Phi[X]$ инвариантен, как следует из формулы (23), к виду преобразования Φ .

Изложенное позволяет заключить, что класс τ — подобных процессов, по-видимому, достаточно широк и представляет определенный практический интерес. Следует отметить, что существуют и не τ — подобные процессы, таковы, например, процессы, рассмотренные в примере 6.

Экспериментальная проверка некоторых из полученных выше, а также в работе [3] результатов была проведена с помощью установки, блок-схема которой изображена на фиг. 1. Электрические напряжения, представ-

ляющие реализации исследуемых процессов подавались на входы X и Y регрессометра (на фиг. 1 обведен штриховой линией), состоящего из дифференциального амплитудного дискриминатора 1, устройства установки уровня дискриминации 2, линейных пропускателей 3 и 4, инвертора 5, сумматора 6, интегрирующего устройства 7 и усилителя постоянного тока 8. Дискриминатор 1 мог работать как в режиме (I), при котором он генерирует стандартные импульсы всякий раз, когда напряжение на входе X достигает уровня дискриминации x_1 , так и в режиме (II), когда стандартные импульсы генерируются только в моменты, когда напряжение на входе X достигает уровня дискриминации, возрастая (убывая). Покажем, что, в зависимости от того, в каком из режимов, (I) или (II), работает дискриминатор, входное напряжение регрессометра практически пропор-



Фиг. 1

ционально значению при данном уровне дискриминации x_1 линии регрессии или соответствующей условной линии регрессии поступающего на вход Y процесса по процессу, поступающему на вход X .

В режиме (I) нахождения значения регрессии процесса $Y(t)$, подающегося на вход Y , по процессу $X(t)$, подающемуся на вход X регрессометр работает следующим образом. Дискриминатор I генерирует короткие однополярные прямоугольные импульсы стандартной амплитуды и длительности в мо-

менты t_i достижения напряжением $X(t)$ некоторого уровня дискриминации x_1 , устанавливаемого устройством 2. С выхода дискриминатора 1 эти импульсы поступают на первые входы линейных пропускателей 3 и 4. На второй вход пропускателя 3 (вход Y) подается напряжение $Y(t)$; на второй вход пропускателя 4 подается с выхода усилителя постоянного тока 8 некоторое медленно изменяющееся напряжение $u_8(x_1)$. В результате на выходах пропускателей 3 и 4 образуются импульсы стандартной длительности, амплитуды которых, соответственно, будут

$$u_3(t_i) = K_3 Y(t_i) = K_3 Y|X = x_1,$$

$$U_4(t_i) = K_4 U_8(x_1),$$

где K_3 и K_4 — коэффициенты передачи пропускателей 3 и 4. Выходной эффект пропускателя 4 инвертируется инвертором 5, и затем складывается в сумматоре 6 с выходным эффектом пропускателя 3, в результате чего на выходе сумматора 6 в моменты t_i образуются импульсы стандартной длительности, амплитуды которых

$$U_6(t_i) = K_3 Y|x_1 - K_4 K_5 U_8(x_1),$$

где K_5 — коэффициент передачи инвертора 5. Обозначим $\Omega(x_1)$ среднюю частоту импульсов, генерируемых дискриминатором 1 при данном уровне дискриминации x_1 .

Очевидно, если исследуемые процессы $Y(t)$ и $X(t)$ стационарные и эргодические, результат усреднения по времени выходного эффекта сумматора 6 может быть представлен в виде

$$U_7(x_1) = K_7 \Omega(x_1) [K_3 \langle Y|x_1 \rangle - K_4 K_5 U_8(x_1)],$$

где K_7 — постоянная, определяемая параметрами интегратора 7 и стандартной длительностью импульсов дискриминатора 1. Выходное напряжение интегратора 7, усиленное в K_8 раз усилителем постоянного тока 8, выше мы обозначили как $U_8(x_1)$. Для $U_8(x_1)$ можно написать уравнение

$$U_8(x_1) = K_8 K_7 \Omega(x_1) [K_3 \langle Y|x_1 \rangle - K_4 K_5 U_8(x_1)],$$

откуда

$$U_8(x_1) = \frac{K_3}{K_4 K_5} \langle Y | x_1 \rangle \frac{K_4 K_5 K_7 K_8 \Omega(x_1)}{1 + K_4 K_5 K_7 K_8 \Omega(x_1)}. \quad (24)$$

В области значений x_1 , где выполняется условие $K_4 K_5 K_7 K_8 \Omega(x_1) \gg 1$, которая может быть как угодно расширена увеличением коэффициентов K_4 — K_8 , выходное напряжение регрессометра, как видно из выражения (24), практически пропорционально значению регрессии $Y(t)$ по $X(t)$ при данном x_1 . Заметим, что если K_4 , K_5 , K_7 достаточно велики, то в области значений x_1 , где выполняется условие $K_4 K_5 K_7 \Omega(x_1) \gg 1$, для нахождения значения регрессии можно обойтись и без усилителя δ , подавая выходное напряжение интегратора 7 непосредственно на второй вход пропускателя 4 .

В режиме (II) нахождения значения условной регрессии дискриминатор I генерирует стандартные импульсы лишь в моменты t_i^+ (t_i^-), когда напряжение $X(t)$ достигает уровня дискриминации x_1 , возрастая (убывая); в остальном регрессометр работает аналогично и выходное напряжение его оказывается пропорциональным значению при данном x_1 условной линии регрессии

$$\left\langle Y | x_1, \frac{dX}{dt} > 0 \right\rangle \left(\left\langle Y | x_1, \frac{dX}{dt} < 0 \right\rangle \right).$$

Уровень дискриминации дискриминатора I мог быть изменяем линейно со временем с помощью устройства 2 . Скорость изменения выбиралась достаточно малой, так что за время, равное времени усреднения интегратора 7 , уровень дискриминации оставался практически постоянным. При этом линия регрессии или условная линия регрессии могла быть зарегистрирована самописцем 9 в виде записи зависимости выходного напряжения регрессометра от времени.

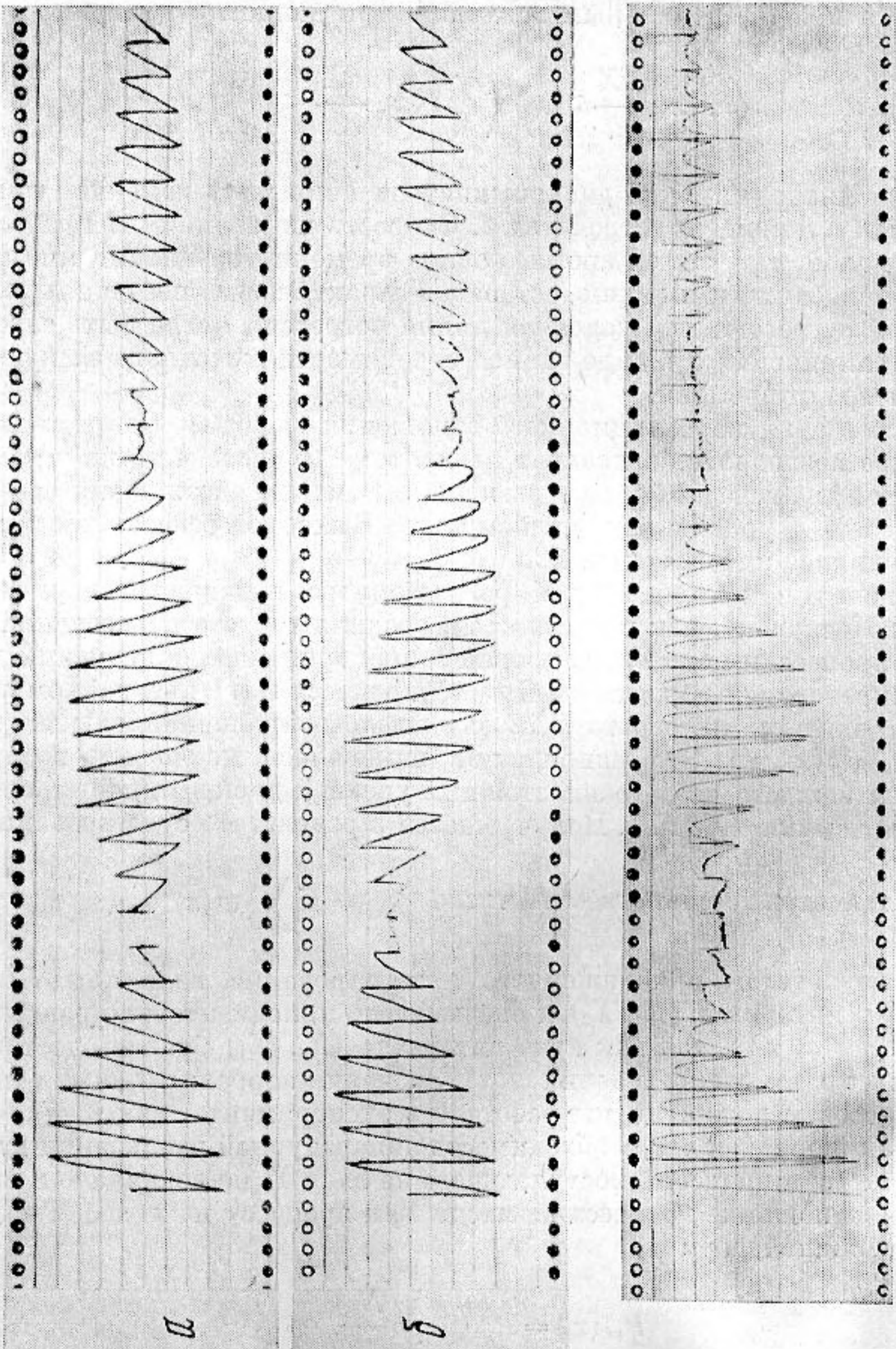
Для измерения корреляционного отношения выходное напряжение регрессометра возводилось в квадрат квадратом 10 , после чего из него в линейном пропускателе 11 брались выборки в моменты достижения напряжением на входе X уровня дискриминации x_1 . Выходной эффект пропускателя 11 усреднялся интегратором 12 .

При экспериментах на вход X регрессометра подавались нормальные процессы. Поскольку, как известно [4], средняя частота пересечений нормальным процессом некоторого уровня x пропорциональна значению плотности распределения вероятностей $w(x)$ процесса $X(t)$ при данном x , выходное напряжение интегратора 12 оказывалось пропорциональным величине $w(x_1) \varphi_y^2(x_1, \tau_j)$. Это напряжение измерялось цифровым вольтметром 13 для каждого из 33 равностоящих уровней дискриминации x_1 в некотором интервале (X_1, X_2) . Получавшееся в результате суммирования от-

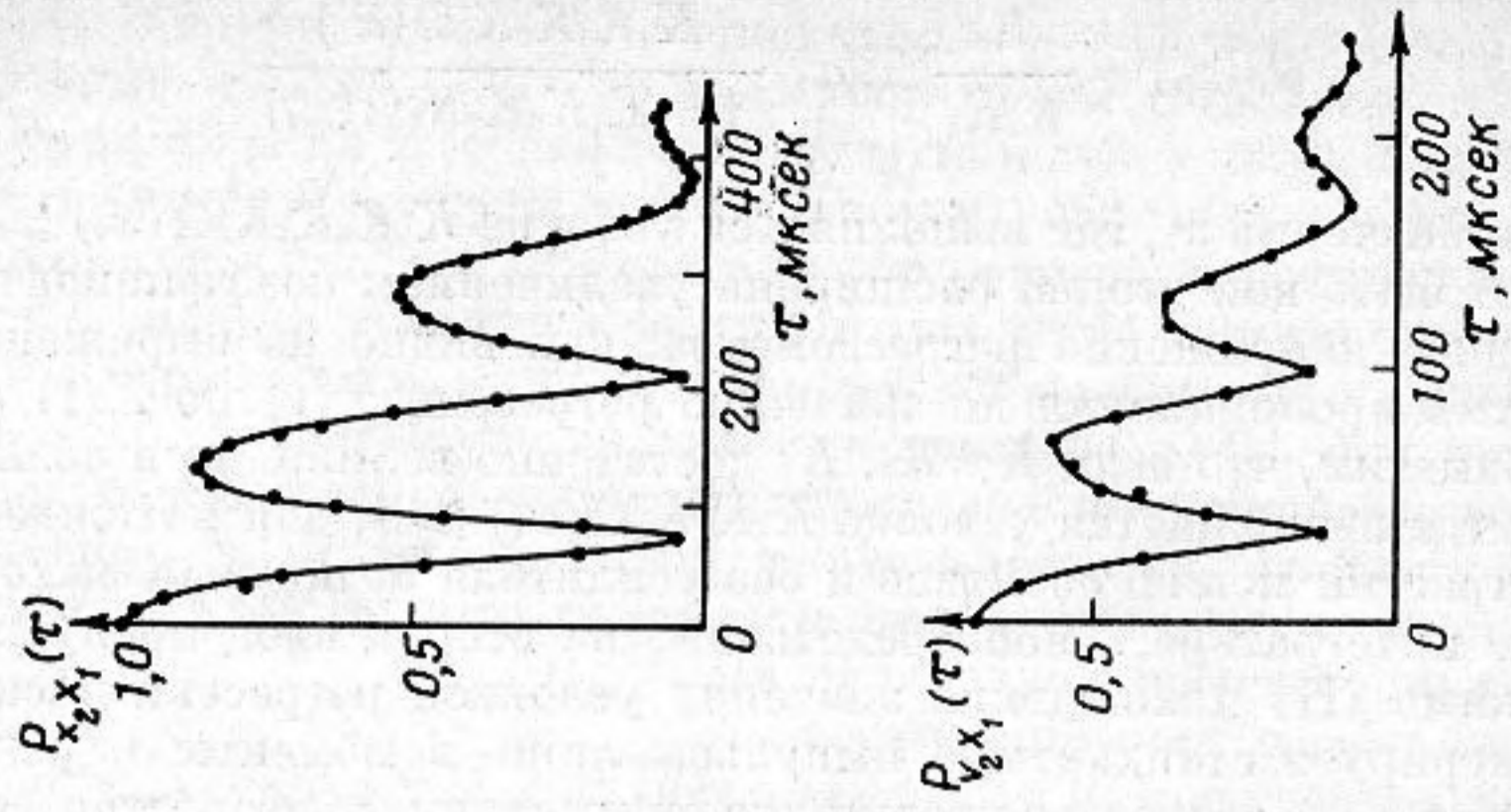
счетов вольтметра 13 счетчиком 14 число $N_j = K \sum_{i=1}^{33} w(x_i) \varphi_y^2(x_i, \tau_j)$ яв-

лялось результатом приближенного интегрирования величины $Kw(x) \cdot \varphi_y^2(x, \tau_j)$ в интервале (X_1, X_2) и оказывалось приблизительно равным величине $K \langle \varphi_y^2(x, \tau_j) \rangle$, так как края интервала (X_1, X_2) брались достаточно близкими к краям распределения $w(x)$. Значения корреляционных отношений процессов, с которыми мы работали в эксперименте, при $\tau = 0$ было известно априори, так что необходимости аппаратной реализации нахождения дисперсии процесса, поступающего на вход Y , не возникало и корреляционное отношение процесса на входе Y , к процессу на входе X находилось по очевидной формуле

$$P_{yx}(\tau_j) = P_{yx}(0) \sqrt{\frac{N_j}{N_0}}.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

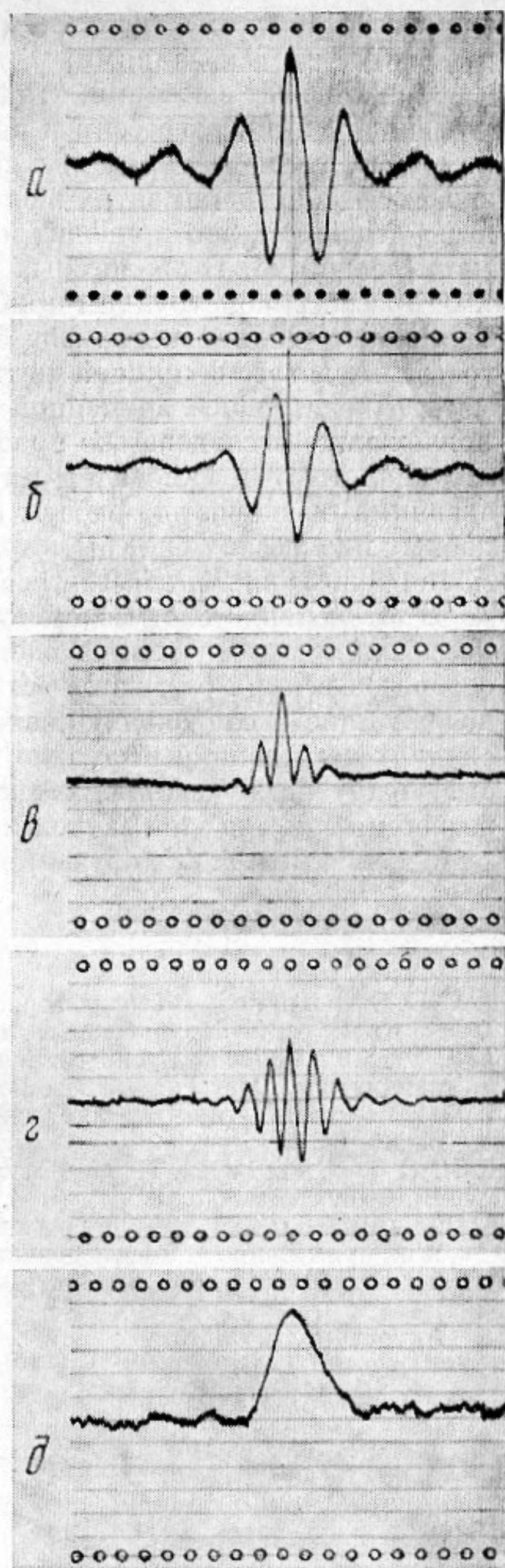
В качестве источника нормального стационарного шумового напряжения 15 был использован шумовой генератор ШГУ. Шумовое напряжение $X_1(t)$ в октавной полосе 2,5—5 кГц (фильтр 16) подавалось на вход X регрессометра и на вход линии задержки 17. С выхода линии задержки напряжение $X_1(t - \tau_j)$ поступало либо непосредственно на вход Y регрессометра, или через двухполупериодный квадратичный детектор 18, или через детектор 18 и фильтр 19, прозрачный в полосе частот 5—10 кГц, или через детектор 18 и фильтр 20, прозрачный в полосе 0—2,5 кГц. Таким образом эксперименты проводились с парами процессов, рассмотренными в примерах 1, 2, 3 и 4.

При каждом данном значении задержки τ_i , возраставшей ступенями по 10 мксек, начиная от 0 мксек, уровень дискриминации изменялся в интервале от $-2\sigma_1$ до $2\sigma_1$, со скоростью σ_1 в минуту. Выходное напряжение регрессометра регистрировалось самописцем. Полученные таким образом семейства линий регрессии и условных линий регрессии представлены на фиг. 2, 1а и 1б — соответственно семейства линий регрессии и условных линий регрессии для случая, рассмотренного в примере 1. 2 — семейство линий регрессии для случая, рассмотренного в примере 2. Для получения условных линий регрессии регрессометр переключался в режим (II).

Зависимость корреляционного отношения от задержки для случаев, рассмотренных в примерах 1 и 3, представлена на фиг. 3, 1 и 2 соответственно.

Записи зависимости линии регрессии и условных линий регрессии от задержки при фиксированном x_1 для случая, рассмотренного в примере 1, а также линий регрессии для случаев, рассмотренных в примерах 2, 3 и 4, представлены на фиг. 4, соответственно а, б, в, г, и д. Для получения этих записей задержки

между исследуемыми процессами изменялись в интервале около (-2 мсек, 2 мсек) со скоростью $0,47$ мсек/мин, уровень дискриминации x_1 устанавливался для записи а, в равным σ_1 , для записей в, г, д — равным 0 (при получении записи в регрессометр работал в режиме (II)), и самописец регистрировал зависимость выходного напряжения регрессометра от времени. Как следует из формул (4), (7), (11), (12), (16), кривые а, в, г и д фиг. 4, представляют собой с точностью до постоянного множителя функции от задержки коэффициента корреляционного отношения процессов, рассмотренных, соответственно, в примерах 1, 2, 3 и 4. Кривая в, фиг. 4, представляет собой (см. формулу (5)) производную по задержке от корреляционной функции процессов, рассмотренных в примере 1. Эксперимен-



Фиг. 4

тальные результаты (фиг. 2—4) удовлетворительно согласуются с теоретическими предсказаниями.

Не вызывает сомнений, что весьма совершенным инструментом для нахождения линии регрессии и измерения корреляционного отношения может быть универсальная или специализированная ЭЦВМ. Тем не менее, зачастую, в экспериментах желательно применять более простые аналоговые устройства, что приводит, однако, к существенному возрастанию времени обработки. В аналоговых коррелометрах с этим обычно мирятся во имя простоты конструкции приборов, но при регрессионном анализе время измерения увеличивается еще более, чем на порядок, так как линия регрессии является функцией двух переменных — значений одного из процессов и относительной временной задержки между процессами. Однако, если подлежащие исследованию процессы τ -подобны, скорость обработки сигналов аналоговыми измерителями корреляционного отношения может быть сравнима со скоростью работы аналоговых коррелометров. Свойства τ -подобных процессов могут быть также использованы для упрощения алгоритмов нахождения линий регрессии и корреляционных отношений на ЭЦВМ.

В заключение следует отметить, что регрессионный анализ процессов, несмотря на относительную сложность его аппаратной реализации, целесообразен всякий раз, когда есть основания предполагать, что процессы, подлежащие исследованию, связаны нелинейной зависимостью. В таких случаях регрессионный анализ позволяет не только найти меру зависимости между исследованными процессами, но и оценить с помощью линии регрессии сам вид этой зависимости, что дает возможность экспериментатору судить о механизме изучаемого им явления.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Теория вероятности, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.
3. К. Г. Кирьянов. Исследования систем по зависимости условного среднего от параметров. Известия ВУЗов, Радиофизика, 1967, 10, 11, стр. 1523—1530.
4. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, М., Советское радио, 1966.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблица интегралов, сумм и произведений, М., Физматгиз, 1962.
6. Н. С. Райбман, А. Т. Терехин. Дисперсионные методы случайных функций и их применение для исследования нелинейных объектов управления. Автоматика и телемеханика, 1965, 26, 3, стр. 500—506.

Акустический институт
АН СССР,
Москва

Поступила в редакцию
28 июня 1971 г.