АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 3

УДК 534.222.2

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНОЙ И ДВУХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

З. А. Гольдберг, Р. В. Гребнева

Рассматривается взаимодействие продольной волны накачки и двух поперечных волн, поляризованных перпендикулярно плоскости, в которой лежат волновые векторы. Установлены инкремент и условия, необходимые для усиления поперечных волн. Учитывается обратное влияние поперечных волн на продольную. Получено решение со стационарными амплитудами взаимодействующих волн.

Согласно нелинейным уравнениям движения изотропного твердого тела, продольные и поперечные волны должны взаимодействовать между собой. Если частоты и волновые векторы трех волн удовлетворяют условию

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \tag{1}$$

то возможно так называемое резонансное взаимодействие, в результате которого амплитуды одних волн эффективно растут за счет других. Когда волновые векторы имеют одинаковое направление, то условия (1) допускают резонансное взаимодействие трех продольных или трех поперечных волн. Случай параметрического усиления двух продольных волн продольной волной накачки рассмотрен в работе [1], резонансное же взаимодействие поперечных волн, согласно нелинейным уравнениям движения, невозможно [2]. Если $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ не совпадают по направлению, то для резонансного взаимодействия необходимо, чтобы волна ω, $\mathbf{k}$ была продольной, а остальные две либо обе поперечные, либо одна поперечная, а другая — продольная [3]. И в этих случаях из нелинейных уравнений движения следует, что, несмотря на выполнение условий (1), поперечная волна, поляризованная перпендикулярно плоскости волновых векторов, не взаимодействует ни с двумя продольными волнами, ни с продольной и поперечной волнами, если последняя поляризована в плоскости волновых векторов. Эти выводы подтверждаются экспериментом [4].

Частные случаи нелинейного резонансного взаимодействия продольной волны накачки и двух параметрически усиливаемых поперечных волн рассматривались в работах [1, 5] в связи с изучением вопроса о возможности создания параметрического усилителя ультразвука. Однако для определения оптимальных параметров такого усилителя необходимо иметь соответственное решение в общем случае.

Ниже анализируется в общем случае резонансное взаимодействие продольной и двух поперечных волн, поляризованных перпендикулярно плоскости волновых векторов с учетом обратного влияния поперечных волн на продольную.

Пусть при продольной волне накачки ω, $\mathbf{k}$ $(0, 0, k)$ обе поперечные волны будут поляризованы по оси OY. В этом случае проекции вектора деформации будут: $u_z = u_z(z, t)$, $u_y = u_y(x, z, t)$, $u_x \equiv 0$. Соответственно исходные уравнения примут вид [2]

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}-\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)=\Gamma\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\varkappa\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\beta\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\Gamma\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\frac{\partial u_y}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{2}(\Gamma-\varkappa)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{1}{2}(\Gamma+\varkappa)\frac{\partial^2 u_y}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial x}. \tag{3}$$

Здесь ρ_0 — плотность недоформированного тела, μ — модуль сдвига,

$$\Gamma=\alpha+\frac{A}{2}+B,\ \varkappa=K-\frac{2}{3}\mu+B,\ \beta=3\alpha+2A+6B+2C,\ \alpha=K+\frac{4}{3}\mu,$$

K — модуль сжатия, A, B, C,— модули третьего порядка.

Применяя метод медленно изменяющихся амплитуд (см., например, работу [5]) при следующих граничных условиях:

$$z=0;\quad u_z=U\cos\omega t,\quad u_y=P\cos\omega_1 t, \tag{4}$$

получим

$$u_z=U\cos(\omega t-kz),$$

$$u_y=P\left[\operatorname{ch}az\cos(\omega_1 t-\mathbf{k}_1\mathbf{r})+\sqrt{\frac{k_{1z}}{k_{2z}}}\operatorname{sh}az\cos(\omega_2 t-\mathbf{k}_2\mathbf{r})\right], \tag{5}$$

причем

$$a=\frac{Uk}{4\mu\sqrt{k_{1z}k_{2z}}}(\varkappa k_{1x}{}^2-\Gamma k_{1z}k_{2z}). \tag{6}$$

Из соотношений (1) и (6) следует, что для резонансного взаимодействия с усилением волны сигнала (ω_1, $\mathbf{k}_1$) необходимо, чтобы k_{1z} и k_{2z} имели одинаковый с k знак. Другими словами, углы между вектором $\mathbf{k}$ и векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ должны быть меньше 90°. Можно также показать, что эти углы должны быть больше угла φ, определяемого соотношением $1+\sin\varphi/\cos\varphi=c_l/c_t$, где c_l и c_t — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно.

При $k_{1z}=k_{2z}$ решение (5) — (6) соответствует результатам, полученным в работе [5]. Другой частный случай с двумя поперечными волнами, бегущими вдоль оси OZ в противоположных направлениях, рассматривался в работах [6, 7]. Соответственный результат для величины a можно получить из формулы (6), положив $k_{1x}=0$. Ввиду того что k_{1z} и k_{2z} имеют разные знаки, величина a оказывается мнимой, поэтому усиления не будет. Последнее обстоятельство, как показано в работе [8], не учтено в работе [6], что привело к ошибочному выводу о наличии усиления. Не получится усиления и в окончательном результате работы [7], если учесть, что в силу условий (1) отношение вводимых в работе [7] коэффициентов поглощения должно быть равно минус единице.

Пока мы не учитывали влияния поперечных волн на продольную волну накачки. Однако, согласно уравнению (3), это обратное воздействие существует. Сохраняя прежние граничные условия (4), будем искать решение для продольной волны в виде u_z+u_z', где u_z' обусловлено поперечными волнами. Подставляя в левую часть уравнения (3) u_z+u_z', а в правую — выражение для u_y, определяемое соотношением (5), и решая полученное уравнение, найдем

$$u_z+u_z'=U\left[1-\frac{\mu k_{1z}P^2}{4\alpha kU^2}(\operatorname{ch}2az-1)\right]\cos(\omega t-kz).$$

Согласно этому выражению, амплитуда волны накачки по мере распространения уменьшается. При решении уравнения (3) мы пренебрегли слагаемым $\beta \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\partial u_z}{\partial z}$, учет которого, как хорошо известно, означает учет высших гармоник продольной волны, появляющихся в процессе нелинейного искажения формы последней [9].

Естественно ожидать, что в результате описанного выше взаимодействия продольной и двух поперечных волн в конце концов на некотором расстоянии z_0 установится режим, при котором амплитуды взаимодействующих волн будут оставаться постоянными. Как будет видно из дальнейшего, существование режима со стационарными амплитудами возможно лишь при наличии диссипации энергии продольной волны. Поэтому введем в левую часть уравнения (3) слагаемое $-\frac{2\gamma\rho_0 c_l^3}{\omega^2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial t\, \partial z^2}$ которое, как можно показать, учитывает диссипацию энергии продольной волны, характеризующуюся коэффициентом поглощения γ [3]. Решая уравнение (3), дополненное этим членом, получим следующее решение со стационарными амплитудами:

$$u_z' = U_0 \cos(\omega t - kz),\ u_y = P_0 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) + Q_0 \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}).$$

Связь между амплитудами определяется соотношениями

$$-U_0 = U,\ P_0 Q_0 = -\frac{\gamma}{a} \frac{c_l^2}{c_t^2} \frac{kU^2}{\sqrt{k_{1z} k_{2z}}}. \qquad (7)$$

В установившемся режиме исходная волна накачки компенсируется продольной волной, «рожденной» поперечными волнами. При этом решение удовлетворяет и уравнению (2). При учете диссипации энергии поперечных волн мы не получили бы в стационарном режиме полной компенсации продольной волны накачки, т. к. наличие ее было бы необходимо для восполнения диссипируемой энергии поперечных волн.

Согласно формуле (7), чем больше γ, тем больше должны быть $P_0 Q_0$. Дело в том, что при данных P_0 и Q_0 амплитуда $U_0 \sim \frac{1}{\gamma}$. Поэтому, чтобы при бо́льшем γ существовало равенство $|U_0| = |U|$, необходимо и бо́льшее значение $P_0 Q_0$.

Отметим еще, что мы пренебрегли затуханием исходной продольной волны накачки. Учет поглощения можно осуществить, подставив в соотношение (7) фактическое значение амплитуды U в точке z_0.

Оценим расстояние z_0, которое необходимо пройти взаимодействующим волнам для достижения режима со стационарными амплитудами. Приближенно считая, что рост амплитуд поперечных волн все время происходит согласно формулам (5) — (6), из условия

$$P^2 \sqrt{\frac{k_{1z}}{k_{2z}}} \operatorname{ch} az_0 \operatorname{sh} az_0 = P_0 Q_0$$

получим

$$z_0 = \frac{1}{2a} \operatorname{Ar\,sh} \left(2 \cdot \frac{\gamma}{a} \frac{c_l^2}{c_t^2} \frac{k}{k_{1z}} \frac{U^2}{P^2} \right).$$

Поскольку по мере приближения к значениям P_0, Q_0 скорость возрастания амплитуд поперечных волн должна уменьшаться, действительное значение расстояния стабилизации будет больше z_0. При $\frac{k_{1z} k_{2z}}{k_{1x}^2} = \frac{\varkappa}{\Gamma} = \delta$ инкремент $a = 0$, а $z_0 \to \infty$. Согласно известным данным [9], для большинства веществ δ имеет порядок единицы, например, для железа «Армко» $\delta \approx 2$. При отклонении отношения $k_{1z}k_{2z} / k_{1x}^2$ от величины δ в ту или другую сторону значение инкремента a возрастает, а z_0 уменьшается. Однако следует помнить, что, согласно применяемому методу $\frac{a}{k_i} \ll 1$, т. е. результаты, полученные для a и z_0, не годятся, например, при $k_{2z} \to 0$.

В заключение отметим, что возможна и другая постановка вопроса, когда при двух вазимодействующих волнах находится третья волна суммарной или разностной частоты, рожденная двумя первыми [9—11], причем амплитуда третьей волны считается много меньше амплитуд взаимодействующих волн. Если амплитуды первых двух волн рассматривать как постоянные величины первого порядка, то в следующем приближении можно получить выражение для третьей волны, амплитуда которой при выполнении условий (1) растет по мере распространения взаимодействующих волн. Чтобы установить связь решений, получаемых таким способом и методом медленно изменяющихся амплитуд, рассмотрим одну из простейших задач: взаимодействие продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль оси OZ при граничных условиях (4).

В линейном приближении взаимодействующие волны описываются выражениями

$$u_z = U\cos(\omega t - kz), \quad u_{y1} = P\cos(\omega_1 t - k_1 z).$$

Уравнение (2) для рассматриваемой задачи примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_{y2}}{\partial z^2} = \Gamma\left(\frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial z^2}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\frac{\partial u_{y1}}{\partial z}\right), \tag{8}$$

где u_{y2} относится к возникающей второй поперечной волне. Решая уравнение (8) при условиях (1), получим

$$u_{y2} = -\frac{\Gamma UPkk_1}{4\mu} z\cos(\omega_2 t + k_2 z). \tag{9}$$

Границы применимости этого решения определяются неравенством

$$|u_{y2}| \ll |u_{y1}| \text{ или } \left|\frac{\Gamma Ukk_1 z}{4\mu}\right| \ll 1. \tag{10}$$

Решение этой же задачи, полученное методом медленно изменяющихся амплитуд, как следует из формул (5) и (6), имеет вид

$$u_y = u_{y1} + u_{y2} = P\Big[\cos a_1 z\cos(\omega_1 t - k_1 z)\Big] -$$

$$-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\sin a_1 z\cos(\omega_2 t + k_2 z), \ a_1 = \frac{\Gamma Uk}{4\mu}\sqrt{k_1 k_2}. \tag{11}$$

При условии (10), означающем $a_1 z \ll 1$, решения (9) и (11) полностью соответствуют друг другу. При сравнении формул (9) и (11) выясняются преимущества метода медленно изменяющихся амплитуд. Так, выражение (11) справедливо и тогда, когда амплитуда второй поперечной волны достигает порядка первой. Кроме того, как отмечалось выше, в рассматриваемом случае отсутствует параметрическое усиление сигнала. Это видно и из решения (11), согласно которому амплитуда волны сигнала не может превысить значения, определяемого граничным условием (4). Такого вывода не может быть получено из формулы (9) в силу условия (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. N. S. Shiren. Ultrasonic traveling-wave parametric amplification. Proceed. IEEE, 1965, **53**, 10, 1540—1546.
2. З. А. Гольдберг. О взаимодействии плоских продольных и поперечных упругих волн. Акуст. ж., 1960, **6**, 3, 307—310.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
4. F. R. Rollins, L. H. Taylor, P. H. Todd. Ultrasonic study of three-phonon interactions. II. Experimental results. Phys. Rev., 1964, **136**, 3A, 597—601.
5. Е. А. Заболотская, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов. Параметрический усилитель ультразвука. Акуст. ж., 1966, **12**, 2, 188—191.
6. Н. С. Степанов. К вопросу о взаимодействии продольных и поперечных волн. Акуст. ж., 1967, **13**, 2, 270—275.
7. Arthur E. Lord, Jr. Backward — wave parametric interaction between longitudinal and transwerse elastic waves. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, 1967, **14**, 4, 160—164.
8. Л. М. Павличенко. Дипломная работа. КазГУ, Алма-Ата, 1969.
9. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
10. G. L. Jones, D. R. Kobett. Interaction of elastic waves in an isotropic solid. J. Acoust. Soc. America, 1963, **35**, 1, 5—10.
11. R. W. Dixon. Acoustic nonlinear frequency mixing detected using optical Bragg diffraction. Appl. Phys. Letters, 1967, **11**, 11, 340—344.

Казахский государственный
университет им. С. М. Кирова
Алма-Ата

Поступила в редакцию
1 марта 1971 г.