АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 3

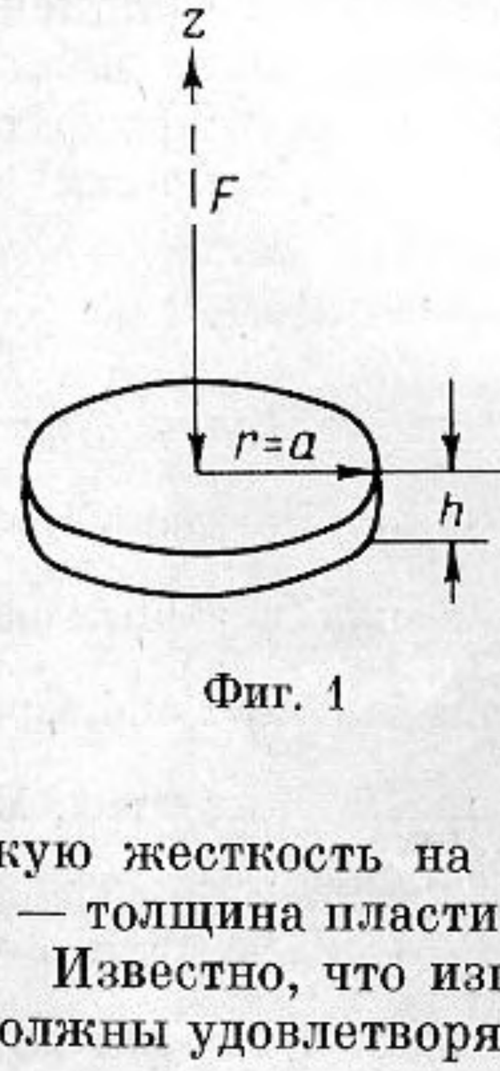
УДК 534.8.081.7

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛАСТИН

Ю. В. Зеленев, Л. М. Электрова

Рассматриваются изгибные колебания полимерных пластин, защемленных и свободно опертых по контуру, выведены формулы для определения динамического модуля упругости и тангенса угла механических потерь полимерного материала пластин в обоих случаях, получен предельный переход от формул динамики к формулам статики для защемленной пластины. Установлены границы применимости формул статики для динамических режимов деформирования в условиях вынужденных нерезонансных изгибных колебаний полимерных пластин.

Одним из наиболее распространенных методов исследования динамических механических свойств полимеров является метод вынужденных нерезонансных колебаний при различных видах деформаций [1, 2]. При этом для стеклообразного физического состояния измерения производятся в режиме изгибных колебаний круглых пластин, опертых или защемленных по контуру и нагруженных в центре, а при обработке экспериментальных данных обычно используются известные формулы [3] для расчета модулей упругости, полученных для статических режимов деформирования идеально упругих твердых тел [4], так как решение задачи о колебаниях вязко-упругих пластин отсутствует.



Фиг. 1

Рассмотрим задачу о вынужденных изгибных колебаниях круглой полимерной пластинки, возбуждаемой гармонической силой $Fe^{-i\omega t}$, приложенной в ее центре при $r=0$ (множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опускаем). Рассматриваемая пластинка (фиг.) радиуса a имеет плотность ρ и цилиндрическую жесткость на изгиб $D=Eh^3/12\,(1-\sigma^2)$, где E — модуль Юнга, h — толщина пластинки, σ — коэффициент Пуассона.

Известно, что изгибные колебания, распространяющиеся по пластинке, должны удовлетворять уравнению

$$\Delta^2\zeta-k^4\zeta=0, \tag{1}$$

где ζ — смещение частиц пластинки в направлении оси z,

$$k=\sqrt[4]{\frac{\omega^2\rho h}{D}} \tag{2}$$

— волновое число изгибных волн (ω — круговая частота).

В нашем случае осесимметричной задачи решение однородного уравнения (1) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\zeta(r)=a_1J_0(kr)+a_2Y_0(kr)+a_3I_0(kr)+a_4K_0(kr), \tag{3}$$

где $J_0(kr)$ и $Y_0(kr)$ — цилиндрические функции Бесселя первого рода, $I_0(kr)$ и $K_0(kr)$ — цилиндрические функции Бесселя второго рода. Будем рассматривать два случая:

1. Пластинка зажата по контуру. В этом случае граничные условия имеют вид [5] $\left.\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right|_{r=a}=0, \quad \zeta|_{r=a}=0.$

2. Свободно опертая пластинка. Для этого случая граничные условия будут:

$$\left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}-\frac{\sigma}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right|_{r=a}=0, \quad \zeta|_{r=a}=0.$$

В центре пластинки, в точке приложения силы F, должны выполняться условия конечности смещения ζ и равенства силы F величине внутреннего поперечного усилия пластины в этой точке. Решение задачи с граничными условиями для первого случая, но без учета потерь в материале пластинки было рассмотрено Тютекиным [6] и Кореневым [7]; ими получена полная система уравнений для определения коэффициентов a_1, a_2, a_3 и a_4 в уравнении (3). Окончательное решение уравнения изгибных колебаний зажатой по контуру пластинки после определения коэффициентов имеет вид

$$\zeta=\left(\frac{AI_1(ka)+BI_0(ka)}{I_0(ka)J_1(ka)+I_1(ka)J_0(ka)}\right)J_0(kr)+$$
$$+\left(\frac{AJ_1(ka)-BJ_0(ka)}{I_0(ka)J_1(ka)+I_1(ka)J_0(ka)}\right)I_0(kr)-$$
$$-\frac{F}{8k^2D}\left[Y_0(kr)+\frac{2}{\pi}K_0(kr)\right], \tag{4}$$

где

$$A=\frac{F}{8k^2D}\left[Y_0(ka)+\frac{2}{\pi}K_0(ka)\right], \qquad B=\frac{F}{8k^2D}\left[Y_1(ka)+\frac{2}{\pi}K_1(ka)\right].$$

Чтобы получить зависимость ζ от потерь, надо рассмотреть знаменатель выражения (4) с использованием функции Бесселя от комплексного аргумента ka, т. е. представить волновое число в виде

$$k=k_0+i\alpha. \tag{5}$$

Воспользовавшись асимптотическими представлениями функций Бесселя, справедливыми при $ka\gg 1$, подставив выражение (5) в знаменатель формулы (4), и взяв производную от модуля ζ, можно найти условие резонанса:

$$k_0a=\pi,\ 3\pi\ldots(2n-1)\pi. \tag{6}$$

Найдем значения величин k_0 и α в выражении (5), принимая во внимание выражение (2) и полагая в нем $E^*=E'+iE''=E'(1+i\,\mathrm{tg}\,\delta)$, где $\mathrm{tg}\,\delta=\frac{E''}{E'}$ — тангенс угла механических потерь полимерной пластинки [8]. При этом мы получим

$$k_0=\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\sigma^2)\cos\delta}{h^2E'}}\cos\frac{\delta}{4}, \tag{7}$$

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{12\omega^2\rho(1-\sigma^2)\cos\delta}{h^2E'}}\sin\frac{\delta}{4}. \tag{8}$$

Подстановка в формулу (6) для $n = 1$ выражения (7) дает формулу для вычисления динамического модуля упругости полимерной пластинки на частоте первого резонанса $f_р$:

$$E' = \frac{4{,}8 f_р^2 \rho a^4 (1-\sigma^2)}{h^2 \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\delta}{4}\right)^2 \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \delta}}, \tag{9}$$

где $\sigma \infty 0{,}5$ для резин, $\sigma \infty 0{,}35$ для твердых полимеров и резин в стеклообразном состоянии [3]. Если учесть в выражении (4) соотношение (6) и воспользоваться асимптотическим представлением бесселевых функций при $ka \gg 1$, ограничиваясь первыми членами в их разложении, то можно получить следующее выражение для резонансного смещения зажатой по контуру пластинки в точке приложения силы ($r = 0$):

$$\zeta = \frac{0{,}017 F a^2}{D i \,\mathrm{sh}\, \alpha a}. \tag{10}$$

Принимая во внимание формулы (8) и (9) и рассматривая абсолютную величину смещения, выражение (10) можно переписать в виде

$$\frac{\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\delta}{4}\right)^2 \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \delta}}{\mathrm{sh}\left(3{,}16\, \mathrm{tg} \frac{\delta}{4}\right)} = \frac{|\zeta| h \rho f_р^2 a^2}{0{,}0425 |F|}. \tag{11}$$

Из этого выражения по измеренному отношению $|\zeta / F|$ может быть определен тангенс угла механических потерь; определив $\mathrm{tg}\, \delta$ и зная резонансную частоту $f_р$, можно вычислить и динамический модуль Юнга материала полимерной пластинки по формуле (9).

Рассмотрим теперь случай свободно опертой пластинки. Если произвести такие же выкладки, что и для случая зажатой пластинки, то можно получить выражение для определения динамического модуля упругости свободно опертой пластинки из полимерного материала, отличающееся от аналогичного выражения для зажатой пластинки лишь численным множителем:

$$E' = \frac{15{,}6 a^4 f_р^2 \rho (1-\sigma^2)}{h^2 \left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\delta}{4}\right)^2 \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \delta}}. \tag{12}$$

Величина резонансного смещения в точке приложения силы в этом случае будет

$$\zeta = \frac{F a^2 (1 + 0{,}054\sigma)}{45 i D \,\mathrm{sh}\, i\alpha a}, \tag{13}$$

а тангенс угла механических потерь свободно опертой полимерной пластинки может быть определен из следующего выражения:

$$\frac{\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{\delta}{4}\right)^2 \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \delta}}{\mathrm{sh}\left(2{,}35\, \mathrm{tg} \frac{\delta}{4}\right)} = \frac{|\zeta| h \rho f_р^2 a^2}{(0{,}017 + 0{,}008\sigma) |F|}. \tag{14}$$

На основании полученных решений для $\zeta(r)$ в случае зажатой и свободно опертой пластин можно обосновать частотную границу применимости формул статики для расчета динамического модуля упругости (E'), при измерениях на приборе ДИП [2], в котором реализуется режим вынужденных нерезонансных изгибных колебаний круглых полимерных пластин, зажатых или опертых по контуру и возбуждаемых в центре периодической силой.

Предварительно проверим, переходит ли формула (4), полученная для случая изгибных колебаний зажатой по контуру пластины при низких частотах, в формулу статики. Если положить $k=0$ и осуществить предельный переход в выражении (4) путем раскрытия неопределенностей по правилу Лопиталя, то можно убедиться, что выражение (4) преобразуется к виду:

$$\zeta|_{k\to 0}=\frac{F}{16\pi D}(a^2-r^2)+\frac{F}{8\pi D}r^2\ln\frac{r}{a}. \tag{15}$$

В точке возбуждения, т. е. при $r\to 0$, второй член этого уравнения стремится к нулю, следовательно:

$$(0)=\frac{Fa^2}{16\pi D}. \tag{16}$$

Это выражение совпадает с формулой Тимошенко для прогиба упругой пластинки, находящейся под действием центрально приложенной силы. По величине этого прогиба и производится расчет динамического модуля упругости (E') при измерениях на приборе ДИП.

Определим, до каких частот возможно пользоваться формулой статики при обработке результатов измерений, полученных на этом приборе. Найдем отношение амплитуды смещения изгибных колебаний полимерной пластинки в точке приложения силы к величине прогиба этой пластинки, определяемого формулой Тимошенко,

$$\varkappa=\frac{2\pi}{(ka)^2}\left\{\frac{\left[Y_0(ka)+\frac{2}{\pi}K_0(ka)\right][I_1(ka)+J_1(ka)]+\left[Y_1(ka)+\frac{2}{\pi}K_1(ka)\right][I_0(ka)-I_0(ka)]}{I_0(ka)\cdot J_1(ka)+I_1(ka)J_0(ka)}\right\}. \tag{17}$$

Ниже приведена зависимость $\varkappa$ от безразмерной величины ka. Определяются границы применимости формулы (17). Поскольку для $ka\leqslant 1{,}6$ величина $\varkappa\approx 1$, нами использованы значения $\varkappa$ лишь для $ka\geqslant 1{,}6$. Как видно, использование формулы статики для определения E' в случае зажатых по контуру полимерных пластин возможно до значений $ka=1{,}8$.

ka	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$\varkappa$	1,00	1,05	1,14	1,35	1,62	1,92	2,32	2,74

Для измерений на приборе ДИП используются образцы диаметром 25 *мм* и толщиной 1 *мм*. Используя формулу (7), можно оценить частоту, до которой возможно применять формулы статики в случае такого размера полимерных пластин. Например, для резин с $E'\sim 10^8$ *дин/см²* она составляет ~ 30 *гц*, для твердых полимеров и резин в стеклообразном состоянии с $E'\sim 10^{10}$ *дин/см²* эта частота не превосходит 300 *гц*.

При $ka>2$ вычисления динамических механических характеристик полимеров нужно производить по формулам, полученным в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Александров, Ю. С. Лазуркин. Высокоэластическая деформация полимеров. Ж. эксп. и теор. физ., 1939, 9, 1249—1260.
2. Г. М. Бартенев, Ю. В. Зеленев, А. Б. Айвазов, И. П. Бородин. Резина — конструкционный материал современного машиностроения. М., «Химия», 1967, 200—205.
3. Ю. С. Лазуркин. Исследование механических свойств полимеров в стеклообразном состоянии (докт. дисс.). М., Ин-т физ. проблем АН СССР, 1954.
4. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963, 84—85.
5. Рэлей. Теория звука, т. 1. М., ГТТИ, 1955, 375—378.
6. В. В. Тютекин. Изгибные колебания круглой упругой пластинки, нагруженной в центре. Акуст. ж., 1960, 4, 3, 388—391.
7. Б. Г. Коренев. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960, 40—44.
8. Дж. Ферри. Вязко-упругие свойства полимеров. М., ИЛ, 1963, 25—26.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 2 декабря 1970 г.