

УДК 534.26

## СИНТЕЗ АКУСТИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ (СФЕРОИДАЛЬНОЙ) ПОВЕРХНОСТЬЮ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛНОВЫХ РАЗМЕРОВ

А. А. Клеицев

Исследуется строгое решение задачи синтеза акустической антенны с криволинейной поверхностью. Исходным уравнением служит интегральное уравнение Фредгольма первого рода, ядром которого является функция Грина. Найдены условия существования и единственности строгого решения. При больших волновых размерах антенны решение получается с помощью преобразования Ватсона.

Настоящая работа является дальнейшим развитием метода собственных функций в синтезе антенн [1], [2] применительно к акустической задаче. По известной пространственной диаграмме направленности  $R(\theta, \varphi)$  ( $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы сферической системы координат) мы будем искать распределение чувствительности  $P_s$  на криволинейной поверхности ( $S$ ) акустической антенны, находящейся в жидкой среде\*. Воспользовавшись интегральной формулой Гельмгольца, сведем задачу синтеза к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$R(\theta, \varphi) = \frac{R}{e^{ikR}} \frac{1}{4\pi} \int_S P_s(Q) \frac{\partial}{\partial n} G_1 dS, \quad (1)$$

$$R(\theta, \varphi) = \frac{R}{e^{ikR}} \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} P_s(Q) G_2 dS, \quad (2)$$

где  $G_1$  и  $G_2$  — функции Грина, причем функция  $G_1$  исчезает на поверхности интегрирования, а у функции  $G_2$  обращается в ноль на  $S$  нормальная производная,  $S$  — замкнутая криволинейная поверхность с непрерывной нормалью  $n$ ,  $Q$  — точка поверхности  $S$ ,  $R$  — расстояние от начала координатной системы до точки наблюдения. Зададим внешнюю поверхность антенны в форме вытянутого сфероида (сферическая поверхность представляет частный случай сфероидальной). В системе вытянутых сфероидальных координат  $\xi, \eta, \varphi$  с межфокусным расстоянием  $2h_0$  [4]:

$$1 \leq \xi < \infty; \quad -1 \leq \eta \leq +1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \eta = \cos \theta$$

поверхность описывается координатой  $\xi_0$ . Воспользуемся разложением функций Грина  $G_1$  и  $G_2$  по вытянутым сфероидальным волновым функ-

\* Синтез плоской антенны подробно описан в работе [3].

циям из работы [4]:

$$G_1(\xi, \eta, \varphi; \xi', \eta', \varphi') = 2ik \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0,m}}{N_{m,n}(C)} S_{m,n}(C, \eta) S_{m,n}(C, \eta') \times \\ \times \cos m(\varphi - \varphi') \left[ R_{m,n}^{(1)}(C, \xi') R_{m,n}^{(3)}(C, \xi) - \frac{R_{m,n}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)}(C, \xi_0)} R_{m,n}^{(3)}(C, \xi) R_{m,n}^{(3)}(C, \xi') \right] \quad (3)$$

$$G_2(\xi, \eta; \varphi; \xi', \eta', \varphi') = 2ik \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 - \sigma_{0,m}}{N_{m,n}(C)} \times \\ \times S_{m,n}(C, \eta) S_{m,n}(C, \eta') \cos m(\varphi - \varphi') \left[ R_{m,n}^{(1)}(C, \xi') R_{m,n}^{(3)}(C, \xi) - \right. \\ \left. - \frac{R_{m,n}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)}(C, \xi_0)} R_{m,n}^{(3)}(C, \xi) R_{m,n}^{(3)}(C, \xi') \right], \quad (4)$$

где  $\xi, \eta, \varphi$  — сферические координаты точки наблюдения;  $\xi', \eta', \varphi'$  — координаты точечного источника,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число,  $\lambda$  — длина

звуковой волны в жидкой среде,  $C = \frac{2\pi}{\lambda} h_0$  — волновой размер,

$N_{m,n}(C)$  — нормирующий множитель для угловых сферических функций  $S_{m,n}(C, \eta)$ ,  $R_{m,n}^{(1)}(C, \xi')$  и  $R_{m,n}^{(3)}(C, \xi)$  — радиальные сферические функции первого и третьего родов соответственно  $\delta_{0,m} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0 \\ 0 & \text{при } m>0 \end{cases}$

Нетрудно видеть из формул (3) и (4), что при  $\xi' = \xi_0$  функции  $G_1$  и  $\frac{\partial}{\partial n} G_2$  обращаются в ноль ( $dn = h_\xi \cdot d\xi'$ ,  $h_\xi$  — масштабный множитель ко-

ординаты  $\xi$ ) и что функции  $\frac{\partial G_1}{\partial n}$  и  $G_2$  — являются симметричными вырож-

денными ядрами интегральных уравнений (1) и (2), если суммирование по  $n$  и  $m$  — конечно. Оборвем суммирование в формулах (3) и (4) на значениях индексов  $n$  и  $m$ , при которых погрешность решения уравнений (1) и (2) будет пренебрежимо мала [5]. Это возможно сделать, так как ряды (3) и (4) при  $m$  и  $n > C$  быстро сходятся. Выражения для функций Грина  $G_1$  и  $G_2$  можно упростить, учтя асимптотику радиальных функций 3-го рода  $R_{m,n}^{(3)}(C, \xi)$  при больших  $\xi$  [4]:

$$R_{m,n}^{(3)}(C, \xi) \underset{C\xi \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{i^{-n-1}}{C\xi} e^{iC\xi}, \quad \frac{e^{iC\xi}}{C\xi} \simeq \frac{e^{ikR}}{kR} \quad (5)$$

Тогда вместо уравнений (1) и (2) мы будем иметь:

$$R(\eta, \varphi) = \frac{1}{4\pi k} \int_S P_s(Q) \frac{\partial}{\partial n} G_1^{(1)} dS \quad (6)$$

$$R(\eta, \varphi) = \frac{1}{4\pi k} \int_S \frac{\partial}{\partial n} P_s(Q) G_2^{(1)} dS, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_1^{(1)} &= 2k \sum_n \sum_m A_{m,n}^{(1)} S_{m,n}(C, \eta) S_{m,n}(C, \eta') \cos m(\varphi - \varphi') \\ G_2^{(1)} &= 2k \sum_n \sum_m A_{m,n}^{(2)} S_{m,n}(C, \eta) S_{m,n}(C, \eta') \cos m(\varphi - \varphi') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$A_{m,n}^{(1)} = \frac{i^{-n}}{N_{m,n}(C)} (2 - \delta_{0,m}) \frac{1}{R_{m,n}^{(3)}(C, \xi_0)} [R_{m,n}^{(1)}(C, \xi') \cdot R_{m,n}^{(3)}(C, \xi_0) - R_{m,n}^{(1)}(C, \xi_0) R_{m,n}^{(3)}(C, \xi')] \quad (9)$$

$$A_{m,n}^{(2)} = \frac{i^{-n}}{N_{m,n}(C)} (2 - \delta_{0,m}) \frac{1}{R_{m,n}^{(3)'}(C, \xi_0)} [R_{m,n}^{(1)}(C, \xi') R_{m,n}^{(3)'}(C, \xi_0) - R_{m,n}^{(1)'}(C, \xi_0) R_{m,n}^{(3)}(C, \xi')] \quad (10)$$

В результате уравнения (1) и (2) окончательно примут вид:

$$R(\eta, \varphi) = \frac{h_0(\xi_0^2 - 1)}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Phi^{(1)}(\eta', \varphi') K^{(1)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') d\tau' d\varphi' \quad (11)$$

$$R(\eta, \varphi) = \frac{h_0(\xi_0^2 - 1)}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Phi^{(2)}(\eta', \varphi') K^{(2)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') d\eta' d\varphi', \quad (12)$$

где  $\Phi^{(1)}(\eta', \varphi') = P_s(Q) \Phi^{(2)}(\eta', \varphi') = \frac{\partial}{\partial \xi'} P_s(Q) |_{\xi' = \xi_0}$ .

Ядра интегральных уравнений (11) и (12) в свою очередь будут

$$K^{(1)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') = \sum_n \sum_m \frac{\partial}{\partial \xi'} A_{m,n}^{(1)} S_{m,n}(C, \eta') \times \\ \times S_{m,n}(C, \eta) \cos m(\varphi - \varphi') |_{\xi' = \xi_0} \quad (13)$$

$$K^{(2)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') = \sum_n \sum_m A_{m,n}^{(2)} S_{m,n}(C, \eta') S_{m,n}(C, \eta) \cos m(\varphi - \varphi') |_{\xi' = \xi_0} \quad (14)$$

Для подобных ядер можно получить полное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода [5]:

$$\Phi^{(1),(2)}(\eta, \varphi) - \lambda^{(1),(2)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \Phi^{(1),(2)}(\eta', \varphi') \times \\ \times K^{(1),(2)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') d\eta' d\varphi' = R(\eta, \varphi), \quad (15)$$

где индекс (1) относится к уравнению Фредгольма 1-го рода (11), индекс (2) — к уравнению (12). Решение будем искать в виде:

$$\Phi^{(1),(2)}(\eta, \varphi) = R(\eta, \varphi) + \sum_n \sum_m B_{m,n} S_{m,n}(C, \eta) \cos m\varphi. \quad (16)$$

Подставляя это выражение в формулу (15) мы получаем

$$\sum_n \sum_m B_{m,n}^{(1),(2)} S_{m,n}(C, \eta) \cos m\varphi - \lambda^{(1),(2)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \sum_n \sum_m \bar{A}_{m,n}^{(1),(2)} \times \\ \times S_{m,n}(C, \eta) S_{m,n}(C, \eta') \cos m(\varphi - \varphi') R(\eta', \varphi') d\eta' d\varphi' -$$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda^{(1),(2)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_m \sum_n \sum_t \sum_s \bar{A}_{m,n}^{(1),(2)} S_{m,n}(C, \eta) S_{m,n}(C, \eta') \times \right. \\
 & \left. \times B_{s,t}^{(1),(2)} S_{s,t}(C, \eta') \cos s\varphi' \right] d\eta' d\varphi' = 0, \quad (17)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{A}_{m,n}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \xi'} A_{m,n}^{(1)} |_{\xi=\xi_0'}$ ,  $\bar{A}_{m,n}^{(2)} = A_{m,n}^{(2)}$ . Воспользуемся ортогональностью угловых сфероидальных функций  $S_{m,n}(C, \eta)$  по индексу  $n$  и тригонометрических функций  $\cos m(\varphi - \varphi')$  — по индексу  $m$ . Для этого умножим левую и правую части уравнения (17) на  $S_{p,r}(C, \eta)$  и  $\cos p\varphi$  и проинтегрируем по  $\eta$  и  $\varphi$  в пределах от  $-1$  до  $1$  и от  $0$  до  $2\pi$  соответственно. Тогда мы получим (после сокращения на нормирующие множители функций  $S_{p,r}(C, \eta)$  и  $\cos p\varphi$ ):

$$\begin{aligned}
 & B_{p,r}^{(1),(2)} - \lambda^{(1),(2)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \bar{A}_{p,r}^{(1),(2)} S_{p,r}(C, \eta') \cos p\varphi' R(\eta', \varphi') d\eta' d\varphi' - \\
 & - \lambda^{(1),(2)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \sum_t \sum_s \bar{A}_{p,r}^{(1),(2)} S_{p,r}(C, \eta') \cos p\varphi' B_{s,t}^{(1),(2)} \times \\
 & \times S_{s,t}(C, \eta') \cos s\varphi' d\eta' d\varphi' = 0. \quad (18)
 \end{aligned}$$

В последнем, третьем члене левой части уравнения (18) можно еще раз воспользоваться ортогональностью угловых функций, тогда:

$$\begin{aligned}
 & B_{p,r}^{(1),(2)} - \lambda^{(1),(2)} B_{p,r}^{(1),(2)} \beta_{p,r;p,r}^{(1),(2)} = \lambda^{(1),(2)} f_{p,r}^{(1),(2)} \quad (19) \\
 & \left( \begin{array}{l} p = 0, 1, 2, \dots, \alpha \\ r \geq p; r = 0, 1, \dots, \gamma \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$f_{p,r}^{(1),(2)} = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \bar{A}_{p,r}^{(1),(2)} S_{p,r}(S, \eta') \cos p\varphi' R(\eta', \varphi') d\eta' d\varphi',$$

$$\beta_{p,r;p,r}^{(1),(2)} = N_{p,r}(C) \pi \bar{A}_{p,r}^{(1),(2)} \quad (p > 0), \quad \beta_{0,r;0,r}^{(1),(2)} = N_{0,r}(C) 2\pi \bar{A}_{0,r}^{(1),(2)} \quad (p = 0).$$

Определитель системы (19) имеет вид:

$$\Delta(\lambda^{(1),(2)}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda^{(1),(2)} \beta_{0,0;0,0}^{(1),(2)} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 - \lambda^{(1),(2)} \beta_{0,1;0,1}^{(1),(2)} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda^{(1),(2)} \beta_{\alpha,\gamma;\alpha,\gamma}^{(1),(2)} & \dots \end{vmatrix}$$

Собственные числа ядер  $K^{(1),(2)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi')$  находятся путем решения уравнения  $\Delta(\lambda^{(1),(2)}) = 0$ . По известным собственным функциям ядер  $K^{(1),(2)}(\eta, \varphi, \eta', \varphi')$  (функции  $S_{m,n}(C, \eta)$  и  $\cos m\varphi$ ) мы можем найти коэффициенты Фурье диаграммы направленности  $R(\eta, \varphi)$  [6]:

$$a_{p,r} = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} R(\eta, \varphi) S_{p,r}(C, \eta) \cos p\varphi d\eta d\varphi. \quad (20)$$

Если бесконечный ряд  $\sum_r \sum_p a_{p,r} \lambda_{p,r}^{(1),(2)}$  расходится, то наше уравнение не имеет решения класса  $L_2$  [6]. Если же этот ряд сходится, то существует одна (в силу полноты собственных функций ядра)  $L_2$ -функция, удовлетворяющая нашему уравнению, причем ее можно вычислить как предел в среднем [6]:

$$\Phi^{(1),(2)}(\eta, \varphi) = \lim_{r,p \rightarrow \infty} \sum_r \sum_p a_{p,r} \lambda_{p,r}^{(1),(2)} S_{p,r}(C, \eta) \cos p\varphi. \quad (21)$$

Выберем в качестве исходной диаграммы направленности угловую характеристику рассеяния плоской волны идеальным абсолютно мягким сфероидом  $R_1(\eta, \varphi)$ , определяемую равенством [7]:

$$R_1(\eta, \varphi) = -\frac{2}{ik} \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0,m}}{N_{m,n}(C)} S_{m,n}(C, \eta_1) S_{m,n}(C, \eta) \frac{R_{m,n}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{m,n}^{(3)}(C, \xi_0)} \cos m\varphi,$$

где  $\eta_1$  — угловая сфероидальная координата волнового вектора падающей волны,  $\xi_0$  — радиальная координата внешней поверхности рассеивателя.

Вычислим коэффициенты Фурье  $a_{p,r}$  в соответствии с формулой (20):

$$a_{p,r} = -\frac{4\pi}{ik} S_{p,r}(C, \eta_1) \frac{R_{p,r}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{p,r}^{(3)}(C, \xi_0)}.$$

В силу наличия однородного граничного условия на поверхности рассеивателя функции  $\Phi^{(1)}(\eta, \varphi)$  при  $\xi = \xi_0$  равна (с обратным знаком) давлению в падающей плоской волне единичной амплитуды:

$$\begin{aligned} & -\frac{4\pi}{ik} \sum_{r \geq p} \sum_{p=0}^{\infty} S_{p,r}(C, \eta_1) \frac{R_{p,r}^{(1)}(C, \xi_0)}{R_{p,r}^{(3)}(C, \xi_0)} \lambda_{p,r} S_{p,r}(C, \eta) \cos p\varphi = \\ & = -2 \sum_{r \geq p} \sum_{p=0}^{\infty} i^{-r} (2 - \delta_{0,p}) \frac{S_{p,r}(C, \eta_1)}{N_{p,r}(C)} S_{p,r}(C, \eta) R_{p,r}^{(1)}(C, \xi_0) \cos p\varphi. \end{aligned}$$

Из этого равенства нетрудно получить точные значения собственных чисел  $\lambda_{p,r}$ :

$$\lambda_{p,r} = \frac{i^{1-r} (2 - \delta_{0,p}) k R_{p,r}^{(3)}(C, \xi_0)}{2\pi N_{p,r}(C)}.$$

Если волновой размер  $C$  поверхности  $S$  синтезируемой антенны удовлетворяет условию  $C \gg 1,0$ , то для расчета функций  $\frac{\partial}{\partial \xi'} G_1$  и  $G_2$  можно воспользоваться преобразованием Ватсона. Разложение  $\frac{\partial}{\partial \xi'} G_1$  и  $G_2$  по сфероидальным функциям напишем в обозначениях работы [8]:

$$\begin{aligned} G(\xi_0, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= A_{\Omega} \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} i^{-n} (2 - \delta_{0,m}) (2n + 1) \times \\ & \times \frac{\Gamma(n + 1 - m)}{\Gamma(n + 1 + m)} P S_n^m(\eta; C^2) \cos m(\varphi - \varphi') \frac{1}{\Omega S_n^{m(3)}(\xi_0; C)} \times \\ & \times [S_n^{m(4)}(\xi_0; C) S_n^{m(3)'}(\xi_0; C) - S_n^{m(4)'}(\xi_0; C) S_n^{m(3)}(\xi_0; C)] \quad (22) \end{aligned}$$

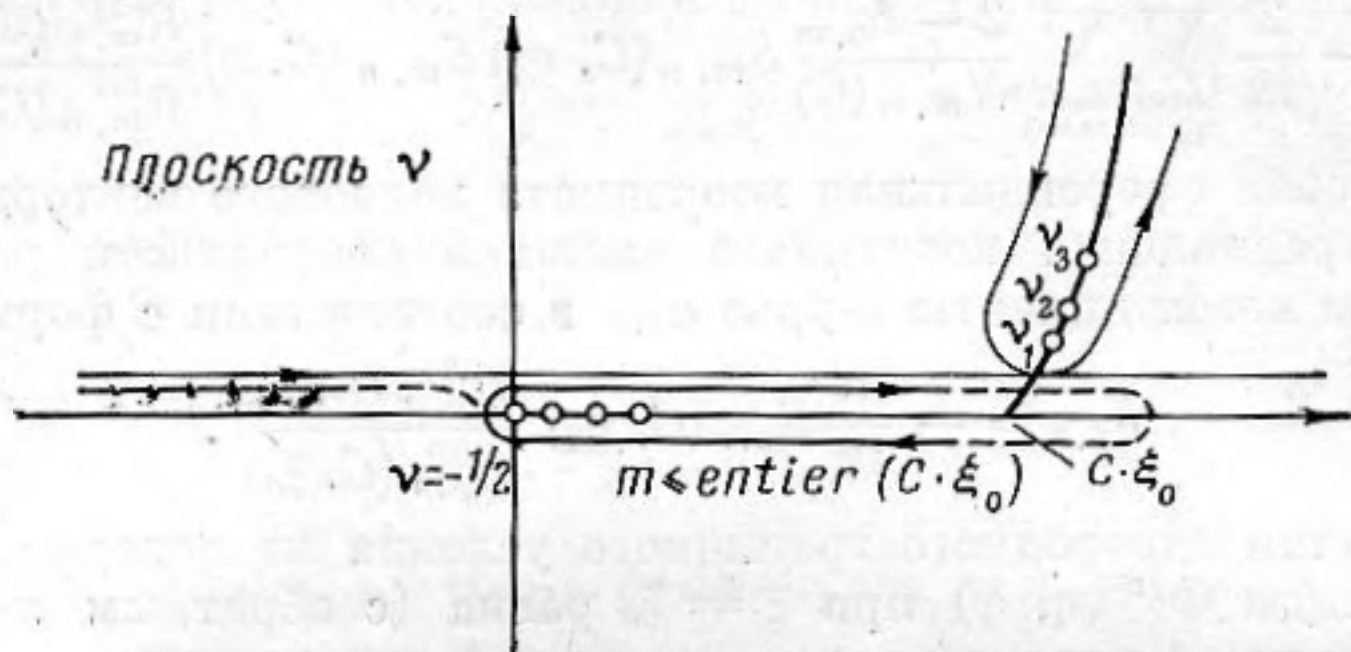
где  $A_{\Omega} = -\frac{k}{2}$ ,  $\Omega = 1$  для  $\frac{\partial}{\partial \xi'} G_1^{(1)}$  и  $A_{\Omega} = \frac{k}{2}$ ,  $\Omega = \frac{\partial}{\partial \xi_0}$

для  $G_2^{(1)}$ ,  $\Gamma(n + 1 - m)$  — гамма-функция,  $S_n^{m(3)}(\xi_0; C)$  — радиальная функция 3-го рода,  $P S_n^m(\eta; C^2)$  — угловая сфероидальная функция.

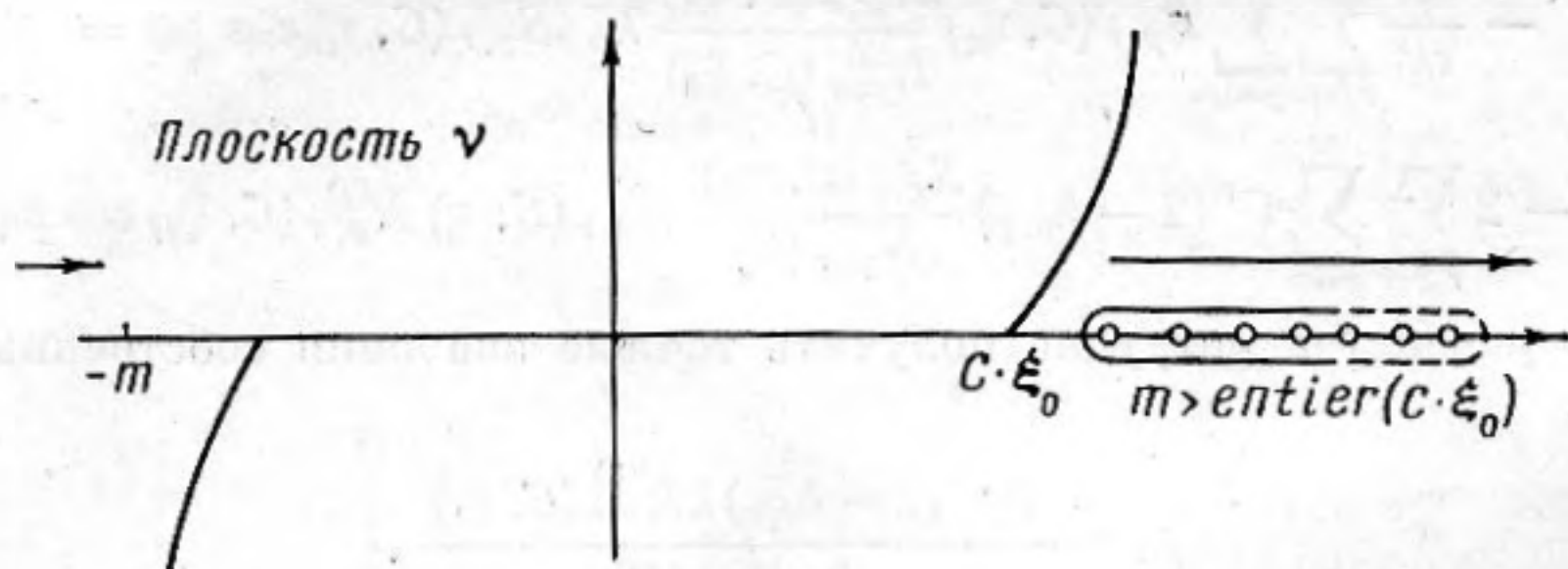
Представим ряд (22) в виде бесконечной суммы контурных интегралов на комплексной  $\nu$ -плоскости одного из индексов:

$$G(\xi_0, \eta, \varphi, \eta', \varphi') = \frac{i \cdot A_\Omega}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0,m}) \cdot \cos m(\varphi - \varphi') \oint e^{-i \frac{\pi}{2} \nu} \times \\ \times (2\nu + 1) \frac{\Gamma(\nu + 1 - m)^2}{\Gamma(\nu + 1 + m)} \frac{PS_\nu^m(-\eta; C^2)}{\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0; C)} PS_\nu^m(\eta'; C^2) \times \\ \times [S_\nu^{m(4)}(\xi_0; C) S_\nu^{m(3)}(\xi_0; C) - S_\nu^{m(4)'}(\xi_0; C) S_\nu^{m(3)'}(\xi_0; C)] d\nu. \quad (23)$$

Всем контурам присвоим соответствующие им индексы  $m$ . Значение каждого из интегралов в отдельности равно сумме вычетов подынтегральной функции относительно простых полюсов, находящихся в целочисленных точках  $\nu = n$ . Как легко видеть из выражений (3), (4), контуры интегри-



Фиг. 1



Фиг. 2

рования не должны включать отрицательных целых  $n$ . Исходя из этого, проведем контур с индексом  $m = 0$  так, как показано на фиг. 1. Что же касается остальных контуров ( $m > 0$ ), то в отношении их поступим следующим образом:

- 1) контуры с индексами  $m \leq \text{entier}(S \cdot \xi_0)$  охватывают все целочисленные  $n \geq 0$ , т. е. они ничем не отличаются от контура  $m = 0$ ;
- 2) при  $m > \text{entier}(C \cdot \xi_0)$  контуры включают лишь целочисленные  $n \geq m$  (фиг. 2).

Искусственное вытягивание контуров интегрирования влево до точки  $\nu = -1/2$  в первом случае (фиг. 1) никак не скажется на величине интеграла, если вспомнить, что  $PS_n^m(\eta; C^2) = 0$  при  $n < m$ , поэтому:

$$\text{Res} \left\{ \frac{PS_\nu^m(-\eta; C^2)}{(-1)^m \sin \pi \nu} \right\}_{\nu=n} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} PS_n^m(\eta; C^2) & \text{при } n \leq m \\ 0 & \text{при } n < m \end{cases} \quad (24)$$

Произведя замену независимой переменной  $\nu = t - 1/2$ , найдем, опираясь на свойства  $\Gamma$ -функции и сфероидальных волновых функций, что подынтегральная функция нечетна относительно  $t = \nu + 1/2$  точно так-

же, как в задаче Зоммерфельда о дифракции электромагнитных волн на сфере [9]. Нечетность подынтегральной функции позволяет видоизменить контуры интегрирования следующим образом:

1) контуры с индексами  $m \leq \text{entier}(C \cdot \xi_0)$  превращаются в прямые, параллельные вещественной оси и лежащие в верхней полуплоскости  $v$ ; затем эти контуры деформируются в полуокружности бесконечно большого радиуса и петли, охватывающие полюсы  $v_s$  (фиг. 1), определяемые как корни уравнения:

$$\Omega S_{v_s}^{m(3)}(\xi_0; C) = 0; \quad (25)$$

2) контуры с индексами  $m > \text{entier}(C; \xi_0)$  преобразуются в две полу-прямые, ограниченные точками  $v = m$  и  $v = -m$  (фиг. 2).

Из асимптотических формул для  $S_v^{m(3)}(\xi_0; C)$  и  $S_v^{m(4)}(\xi_0; C)$  при  $C \cdot \xi \rightarrow \infty$  [8] следует, что при  $C \rightarrow \infty$  их можно представить в виде произведения двух функций:

$$\left. \begin{aligned} S_v^{m(3)}(\xi_0; C) &\xrightarrow{C \rightarrow \infty} \psi_v^{(3)}(\xi_0 C) F_3(m; v; C; \xi_0) \\ S_v^{m(4)}(\xi_0; C) &\xrightarrow{C \rightarrow \infty} \psi_v^{(4)}(\xi_0 C) F_4(m; v; C; \xi_0) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где  $\psi_v^{(3)}(\xi_0 C)$  и  $\psi_v^{(4)}(\xi_0 C)$  — сферические функции Ханкеля 1-го и 2-го рода соответственно,  $F_3(m; v; C; \xi_0)$  и  $F_4(m; v; C; \xi_0)$  — функции с особой точкой  $\xi_0 = 1$ , стремящиеся к 1, когда  $\xi_0$  стремится к  $\infty$  и не имеющие нулей на комплексной плоскости  $v$ . Нули функции  $\Omega S_v^{m(3)}(\xi_0; C)$  на плоскости нижнего индекса совпадают асимптотически ( $C \gg 1$ ) с нулями функции  $\Omega \psi_v^{(3)}(\xi_0 \cdot C)$ , а, следовательно, [10] и с нулями цилиндрической функции Ханкеля 1-го рода или ее производной. Контурные интегралы первого типа  $m \leq \text{entier}(C \cdot \xi_0)$  можно заменить суммой вычетов в полюсах и бесконечную сумму интегралов (23) представить в виде двух слагаемых:

$$\begin{aligned} G(\xi_0, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= -\pi A_\Omega \sum_{m=0}^{\text{entier}(C \cdot \xi_0)} (2 - \delta_{0,m}) \times \\ &\times \cos m(\varphi - \varphi') \sum_s \frac{2v_s + 1}{(-1)^m \sin \pi v_s} \frac{\Gamma(v_s + 1 - m)}{\Gamma(v_s + 1 + m)} \times \\ &\times PS_{v_s}^m(-\eta; C^2) \frac{PS_{v_s}^m(\eta'; C^2)}{e^{i \cdot \pi/2 \cdot v_s}} \left\{ \frac{Dv}{\frac{\partial}{\partial v} \Omega S_v^{m(3)}(\xi_0; C)} \right\}_{v=v_s} + \\ &+ \frac{i A_\Omega}{2} \sum_{m=\text{entier}(C \cdot \xi_0)+1}^{\infty} 2 \cdot \cos m\varphi \cdot \oint e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot v} (2v + 1) \times \\ &\times \frac{\Gamma(v + 1 - m)}{\Gamma(v + 1 + m)} \frac{PS_v^m(-\eta; C^2)}{(-1)^m \sin \pi v} \frac{PS_v^m(\eta'; C^2)}{\Omega S_v^{m(3)}(\xi_0; C)} \times \\ &\times [S_v^{m(4)}(\xi_0; C) S_v^{m(3)'}(\xi_0; C) - S_v^{m(4)'}(\xi_0; C) \cdot S_v^{m(3)}(\xi_0; C)] \cdot dv, \quad (27) \end{aligned}$$

где

$$D_v = \begin{cases} \text{при } \Omega = 1 \rightarrow S_v^{m(4)}(\xi_0; C) S_v^{m(3)'}(\xi_0; C) \\ \text{при } \Omega = \frac{\partial}{\partial \xi_0} \rightarrow -S_v^{m(4)'}(\xi_0; C) S_v^{m(3)}(\xi_0; C). \end{cases}$$

По аналогии со сферическими и цилиндрическими функциями Ханкеля радиальные сфероидальные функции медленно изменяются по абсолютной величине при  $|v| < C \cdot \xi_0$ , в то время, как при  $|v| > C \cdot \xi_0$  они быстро возрастают. В результате во втором слагаемом выражении (27) достаточно учесть несколько первых членов. При осесимметричной диаграмме направленности индекс  $m$  принимает только одно значение  $-m = 0$  и в разложении (27) остается ряд по волнам вычетов

$$G(\xi_0, \eta, \eta') = -\pi A_\Omega \sum_s \frac{2v_s + 1}{\sin \pi v_s} P S_{v_s}^0(-\eta; C^2) \times \\ \times \frac{P S_{v_s}^0(\eta'; C^2)}{e^{i \cdot \pi/2 \cdot v_s}} \left\{ \frac{Dv}{\frac{\partial}{\partial v} \Omega S_v^{(3)}(\xi_0, C)} \right\}_{v=v_s}.$$

Все сказанное выше может быть перенесено на антенну в форме сжатого сфероида, если только заменить  $C$  на  $-i \cdot C$  и  $\xi_0$  на  $i \cdot \xi_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Фрадин. К вопросу о точечном излучателе. ЖТФ, 1939, 9, 13, 1161—1174.
2. А. А. Пистолькорс. Применение функций Матье для расчета распределения поля в антенне по заданной диаграмме направленности. ДАН СССР, 1953, 89, 5, 849—852.
3. Е. Г. Зелкин. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. М., Госэнергоиздат, 1963.
4. К. Фламмер. Таблицы волновых сфероидальных функций. М., ВЦАН СССР, 1962.
5. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Изд-во ф.-м. лит. М., 1962.
6. Ф. Трикоми. Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.
7. А. А. Клещев, Л. С. Шейба. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 264—268.
8. J. Meixner und E. W. Schäfer. Mathieusche und Sphäroidfunktionen. Berlin, 1954.
9. А. Зоммерфельд. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., ИЛ, 1950.
10. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.

Ленинградский корабельностроительный институт

Поступила в редакцию  
28 марта 1971 г.