

УДК 534.282

СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОТИТЕЛЕЙ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ И ПЛАСТИНАХ

В. В. Тютюкин, А. П. Шкварников

Излагаются результаты разработки и экспериментального исследования широкополосных поглотителей, состоящих из совокупности резонансных элементов и наносимых на концы изгибно-колеблющихся стержней (края пластин). Приводится разработанный авторами метод синтеза таких поглотителей, поглощающих (не отражающих) падающие на них изгибные волны, и результаты их экспериментального исследования, проводившегося в диапазоне частот от 300 *гц* до 1000 *гц*. Показано, что при длине поглотителя, составляющей не более $\frac{1}{4}$ длины изгибной волны на нижней частоте диапазона, ширина полосы эффективного поглощения составляет 1,5—2 октавы. Экспериментальные значения коэффициента отражения хорошо согласуются с их теоретическими величинами. Приведены результаты расчета угловых характеристик изгибных поглотителей при различном числе составляющих их элементов.

В работе авторов [1] был рассмотрен метод ослабления резонансных продольных колебаний ограниченных стержней и пластин путем нанесения на их концы (края) специальных поглотителей, поглощающих (неотражающих) продольные волны. Была решена задача синтеза таких широкополосных поглотителей при определенном выборе параметров поглощающих элементов и проведено их экспериментальное исследование. Ниже рассматривается задача синтеза широкополосных поглотителей изгибных волн, предназначенных для ослабления резонансных изгибных колебаний ограниченных стержней и пластин и наносимых, в отличие от обычных вибродемпфирующих покрытий, не на всю поверхность стержня (пластины), а так же как и в работе [1], только на их концы (края).

Синтез поглотителей изгибных волн мы будем проводить для стержней прямоугольного сечения; результаты будут в определенной мере справедливы и для пластин при нормальном падении плоской изгибной волны на границу пластины с поглотителем. При этом мы будем считать, что выполняются следующие соотношения: $h_0 \ll H \ll \lambda$, где h_0 — толщина стержня, H — его ширина, λ — длина изгибной волны.

Под изгибным поглотителем мы будем понимать концевой участок исходного стержня с нанесенными на его поверхность диссипативными элементами, изменяющими волновые параметры исходного стержня. Если свойства этих элементов изменять по длине стержня, то весь поглотитель можно рассматривать как неоднородный стержень, свойства которого изменяются по его длине. Параметры поглотителя в этом случае будут зависеть от одной координаты x , направленной по длине стержня, а его свойства в некотором произвольном сечении x можно описать тремя безразмерными импедансами z_{11} , z_{12} , z_{22} , введенными авторами в рассмотрение в работе [2]. В этой работе было показано, что импедансы z_{11} , z_{12} , z_{22} удовлетворяют системе трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая в рассматриваемом случае приобретает вид:

$$z_{11}' = -2z_{12} + \psi(x)z_{11}^2 \quad z_{12}' = z_{22} + \psi(x)z_{11}z_{22} \quad z_{22}' = -\xi(x) - \psi(x)z_{12}^2. \quad (1)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по безразмерной координате $k_0 x$, где k_0 — волновое число изгибных волн в исходном стержне, а переменные коэффициенты $\psi(x)$ и $\xi(x)$ имеют значения:

$$\psi(x) = \frac{B_0}{B(x)}, \quad \xi(x) = \frac{m(x)}{m_0}, \quad \text{где } B(x) = \frac{E(x)h^3(x)}{12};$$

$$m(x) = \rho(x)h(x), \quad B_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12}; \quad m_0 = \rho_0 h_0,$$

$$E(x), h(x), \rho(x) \text{ и } E_0, h_0, \rho_0$$

— модуль Юнга, толщина и плотность в поглощающем и исходном стержнях, соответственно.

Для решения системы (1), при известных $\psi(x)$ и $\xi(x)$, необходимо задать еще начальные значения импеданцев на конце стержня ($x = 0$), то есть нагрузку на тыльном конце поглотителя. Мы в дальнейшем, для определенности, будем рассматривать только свободный конец стержня, чему соответствует начальное условие для системы (1):

$$z_{11}(0) = z_{12}(0) = z_{22}(0) = 0. \quad (2)$$

Если значения импеданцев $z_{11}(x)$, $z_{12}(x)$, $z_{22}(x)$ известны, то коэффициент отражения изгибной волны от границы стержень-поглотитель в сечении x , согласно работе [2], выражается формулой*:

$$R(x) = \frac{(1-i) - 2(1-i)z_{12}(x) - 2iz_{11}(x) + 2z_{22}(x) + (1-i)\Delta_z(x)}{-(1+i) + 2(1-i)z_{12}(x) - 2iz_{11}(x) - 2z_{22}(x) - (1+i)\Delta_z(x)}, \quad (3)$$

где $\Delta_z(x) = z_{11}(x)z_{22}(x) + z_{12}^2(x)$.

Систему (1) и (2) и соотношение (3) можно непосредственно использовать для решения задачи синтеза широкополосного поглотителя.

Для синтеза такого поглотителя, как видно из системы (1), можно использовать либо комплексную гибкость, либо комплексную плотность, либо то и другое вместе. Так же как в случае продольного поглотителя, мы в настоящей работе рассмотрим возможность синтеза изгибного поглотителя на основе только комплексной плотности, поскольку ее практическая реализация в исследуемых «стержневых» структурах может быть осуществлена весьма простым образом.

При синтезе изгибного поглотителя возникают те же задачи, что и при синтезе продольного поглотителя [1]: необходимо определить параметры элементов, создающих поглощение, а также распределение этих элементов вдоль стержня, создающее необходимое изменение свойств последнего и обеспечивающее достаточно сильное поглощение изгибных волн.

В качестве поглощающих элементов мы рассмотрим резонансные элементы (в работе [3] они названы «антивибраторами»), каждый из которых состоит из сосредоточенной упругости в виде резинового столбика прямоугольного сечения и массы, закрепленной на одном из его торцов. Другим своим торцом столбик крепится (например, приклеивается) к «верхней» поверхности стержня, при этом ширина столбика в точности равна ширине стержня. Размер столбиков в направлении длины стержня (ось x) выберем малым по сравнению с длиной изгибной волны; это позволяет считать, что каждый такой элемент воздействует на стержень (единицу его поверхности) как некоторый удельный силовой импеданс z_F , выражающийся через параметры элемента следующим образом:

$$z_F = - \left(\frac{1}{i\omega M} + \frac{i\omega}{\kappa} \right)^{-1}. \quad (4)$$

* Коэффициент отражения неоднородной изгибной волны мы не рассматриваем, поскольку он в данном случае не представляет интереса.

Здесь ω — круговая частота, M — удельная «нагрузочная» масса элемента* (на единицу поверхности стержня), $\kappa = E(1 - i\eta) / d$ — удельная комплексная упругость элемента, E — эффективный модуль упругости резины, η — коэффициент эффективных потерь, d — высота столбика. Выражение (4) для силового импеданца z_F элемента можно записать, введя в рассмотрение резонансную частоту элемента $\omega_i = (E(1 + \eta^2) / Md)^{1/2}$ в несколько другом виде:

$$z_F = r - ix = - \frac{i\omega M}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right) - i\eta \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}. \quad (5)$$

Формула (5) для силового импеданца элемента в аналогичной форме была приведена в работе [3], которая явилась первой работой по гашению вибрации в стержнях и пластинах резонансными колебательными системами.

Эффективные параметры неоднородного стержня, представляющего собой исходный стержень, нагруженный импеданцем z_F , так же как и в работе (1) можно записать в виде**:

$$\psi = 1, \quad \xi = 1 + iz_F / m_0\omega, \quad h = h_0, \quad (6)$$

Будем предполагать, что синтезируемый изгибный поглотитель состоит из совокупности расположенных друг за другом (по длине стержня) элементов, имеющих одну и ту же величину κ и один и тот же размер $l \ll \lambda$ в направлении длины стержня, но отличающихся друг от друга величиной M . Это значит, что элементы в общем случае имеют различные резонансные частоты и различную «эффективность», определяемую величиной z_F на резонансе и равную $\frac{\omega M}{\eta}$. В то же время при таком выборе конст-

рукции изгибного поглотителя можно считать, что величина $M(x)$ является кусочно-постоянной функцией координаты x и имеет $n - 1$ точку переключения, а поглотитель имеет общую длину $L = nl$, где n — число элементов. Задача синтеза поглотителя сводится к определению функции $M(x)$ при выполнении некоторого дополнительного условия, накладываемого на величину коэффициента отражения на границе «стержень — поглотитель». Это условие, играющее роль критерия качества, мы зададим в виде следующего интегрального соотношения:

$$\Phi(M_i) = \frac{1}{\omega_1 - \omega_0} \int_{\omega_0}^{\omega_1} |R_i| d\omega = \min; \quad M_{\min} \leq M_i \leq M_{\max}, \quad (7)$$

где M_i — удельная масса i -го элемента, $|R_i|$ — модуль коэффициента отражения поглотителя, состоящего из i элементов, ω_0 и ω_1 — граничные частоты заданного частотного диапазона, M_{\min} и M_{\max} — минимальное и максимальное значение удельной массы элементов.

Алгоритм расчета поглотителя состоит в следующем. Для $i = 1$ задается $M_1 = M_{\min}$ и при этом значении M из системы (1) с начальными условиями (2) либо численно (например, методом Рунге — Кутты), либо с использованием аналитических выражений для однородного стержня из работы [2], определяются значения импеданцев $z_{11}(\omega)$, $z_{12}(\omega)$, $z_{22}(\omega)$ при $x = l$. Подставляя эти значения в формулу (3) и вычисляя интеграл (7), находим величину $\Phi(M_{\min})$. Затем задаем значение $M_1 = M_{\max}$ и таким же

* Такое рассмотрение справедливо только при условии $M \gg M_0$, где M_0 — удельная масса резинового столбика.

** Моментный импеданс элемента z_M [3] оказывает на стержень воздействие в $(k_0 d)^2$ раз меньше, чем z_F , и поскольку $k_0 d \ll 1$, то этим воздействием мы пренебрегаем.

образом определяем величину $\Phi(M_{\max})$. Далее методом деления интервала $M_{\min} \div M_{\max}$ пополам определяем величину M_1^0 , доставляющую минимум величине $\Phi(M_1)$.

Для $i = 2$ повторяется та же процедура, только из системы (1) определяются импедансы $z_{11}(\omega)$, $z_{12}(\omega)$, $z_{22}(\omega)$ при $x = 2l$, а начальными значениями для этой системы служат определенные ранее величины $z_{11}(\omega)$, $z_{12}(\omega)$, $z_{22}(\omega)$ при $x = l$ для $M = M_1^0$. Аналогично определяется величина M_2^0 , доставляющая минимум $\Phi(M_2)$.

Процесс заканчивается при некотором $i = n$, обеспечивающем достаточно малую величину коэффициента отражения синтезируемого поглотителя в заданном диапазоне частот. В случае необходимости (например, при желании уменьшить число элементов поглотителя) может быть применен метод циклической оптимизации, подробно рассмотренный для аналогичной задачи в работе [1].

Перейдем к описанию экспериментальной части работы. Прежде всего рассмотрим метод определения комплексной упругости резонансных элементов κ . Входящие в нее величины E и η являются некоторыми эффективными значениями модуля упругости и коэффициента потерь резинового столбика. Поскольку эти значения не могут быть аналитически выражены через известные комплексные коэффициенты Ламе резины и геометрические размеры столбика, в данной работе величины E и η определялись экспериментально. Легко показать, что величины $\bar{r} = \omega r$ и $\bar{x} = \omega x$, где r и x определяются формулой (5), удовлетворяют уравнению второго порядка

$$\bar{x}^2 + (\bar{r} - a)^2 = a^2, \quad (8)$$

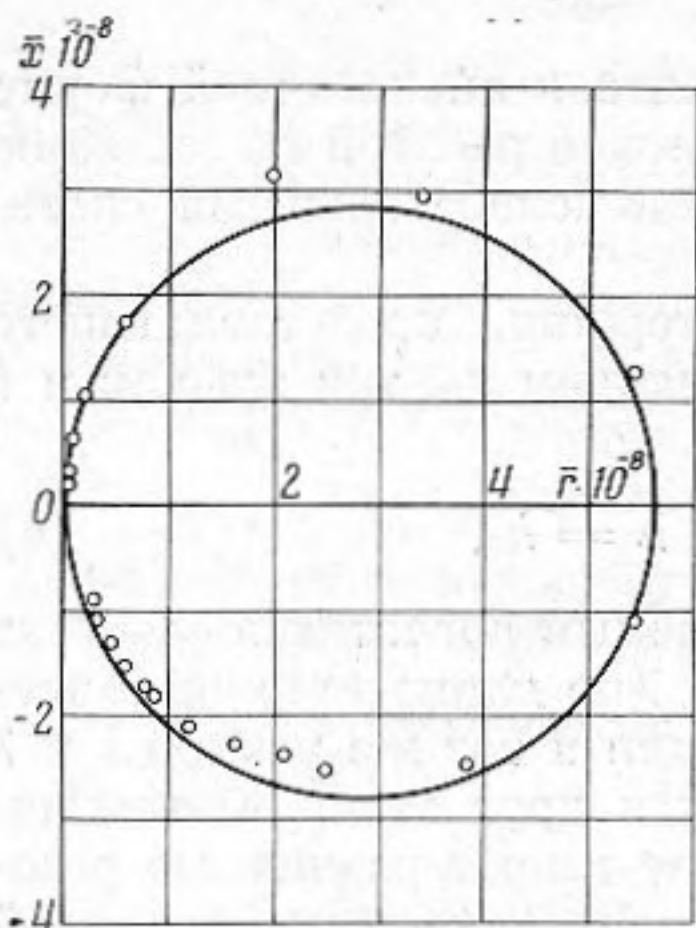
представляющего собой уравнение окружности, проходящей через начало

координат в плоскости \bar{r} , \bar{x} . Здесь $a = \frac{E \sqrt{1 + \eta^2}}{2\eta d \omega_0}$ — радиус окружности.

Таким образом, экспериментальное определение эффективных параметров E и η резинового столбика сводится к следующему. Нагружая исследуемый образец резины известной удельной массой M , значительно превосходящей удельную массу самого образца, измеряем одним из известных способов (нами применялся генератор механических колебаний типа ГМК-1 с соответствующей электронной аппаратурой) частотную зависимость действительной r и мнимой x частей механического импеданса данной конструкции. Величины \bar{r} и \bar{x} , вычисленные по экспериментальным значениям r и x в плоскости \bar{r} , \bar{x} должны ложиться на окружность (8) с некоторым случайным отклонением, определяемым ошибкой эксперимента.

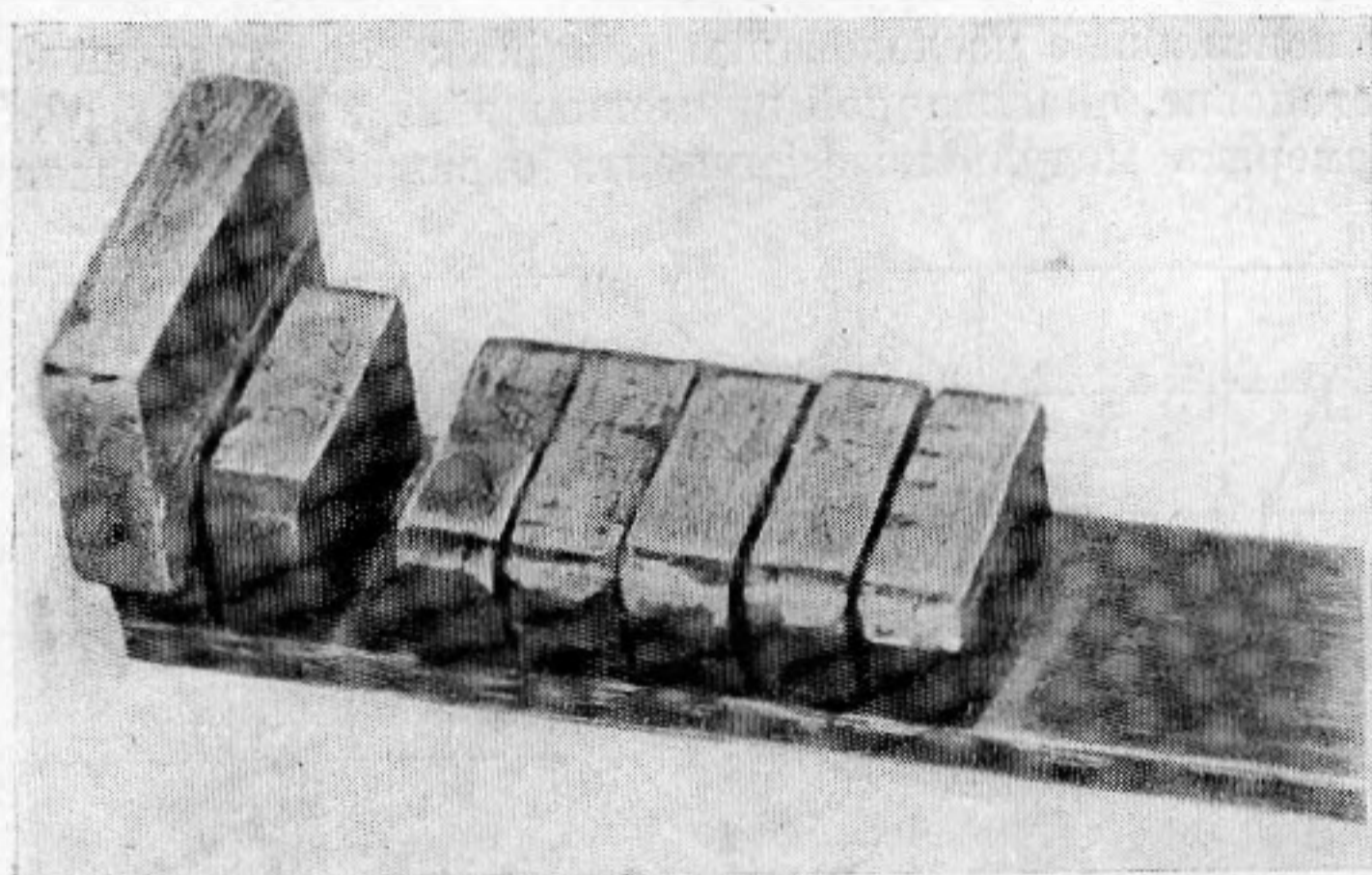
Измерения величин E и η проводились на резиновых столбиках с размерами основания $H = 3$ см, $l = 1$ см и высотой $d = 1$ см (такие же столбики использовались при практической реализации поглотителя) в диапазоне частот от 300 гц до 1000 гц. При этом удельная нагрузочная масса (в виде свинцовых грузиков с таким же основанием) изменялась в пределах от 10 г/см² до 25 г/см² при величине $M_0 = 1,1$ г/см².

На фиг. 1 в качестве примера приведены экспериментальные значения величин \bar{r} и \bar{x} элемента с резонансной частотой 540 гц. Из фигуры видно, что экспериментальные точки действительно располагаются вблизи неко-



Фиг. 1

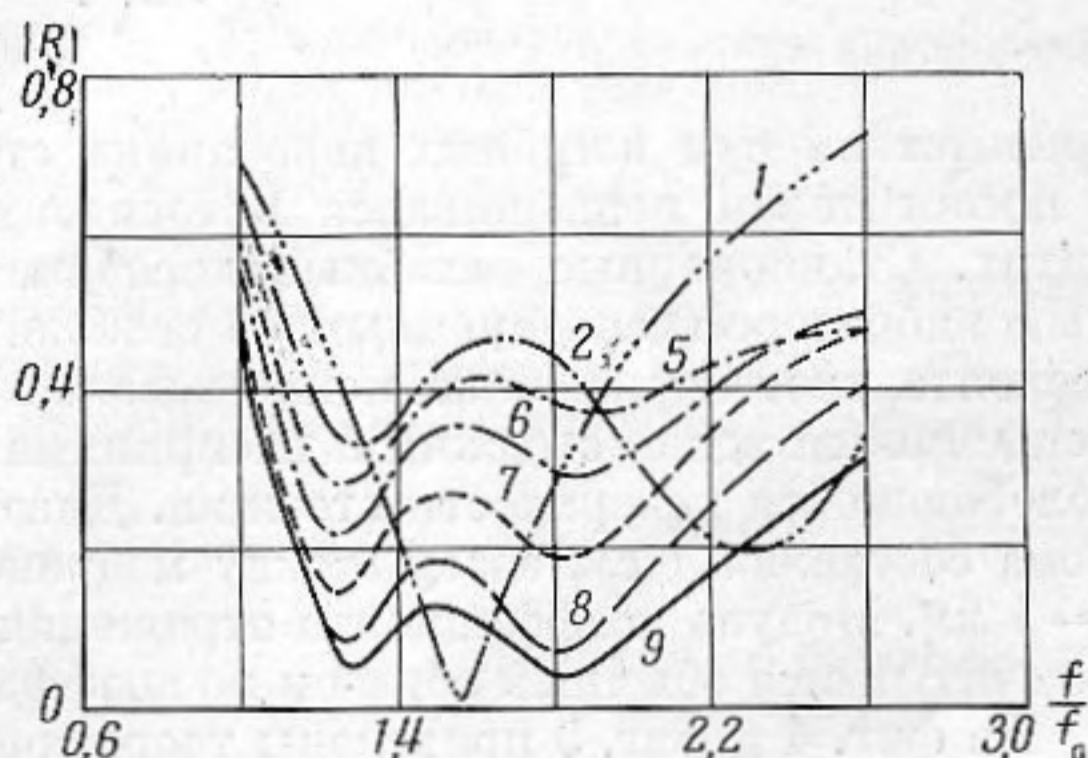
торой окружности; это, с одной стороны, говорит о том, что идеализированная модель (сосредоточенная упругость — сосредоточенная масса) хорошо описывает зависимость от частоты механического импеданца z_F исследуемого элемента, с другой стороны, позволяет, как было указано выше, определить величины F и η . Эти величины в указанном диапазоне частот оказались слабо зависящими от частоты и равными (по результатам измерения и усреднения по нескольким образцам) $E = 1,65 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2$, $\eta = 0,45$. Приведенные значения параметров были использованы при расчете поглотителей изгибных волн изложенным выше методом.



Фиг. 2

Исследование поглотителей проводилось на стальном стержне толщиной $h_0 = 6 \text{ мм}$, шириной $H = 3 \text{ мм}$ и длиной 2 м. На фиг. 2 приведена фотография этого стержня с нанесенным на его конец поглотителем.

Были рассчитаны и экспериментально исследованы два поглотителя описанной выше конструкции — на диапазоны частот $f_0 = 400 \text{ гц} \div f_1 = 1000 \text{ гц}$ (поглотитель 1) и $f_0 = 300 \text{ гц} \div f_1 = 900 \text{ гц}$ (поглотитель 2). На фиг. 3 приведе-



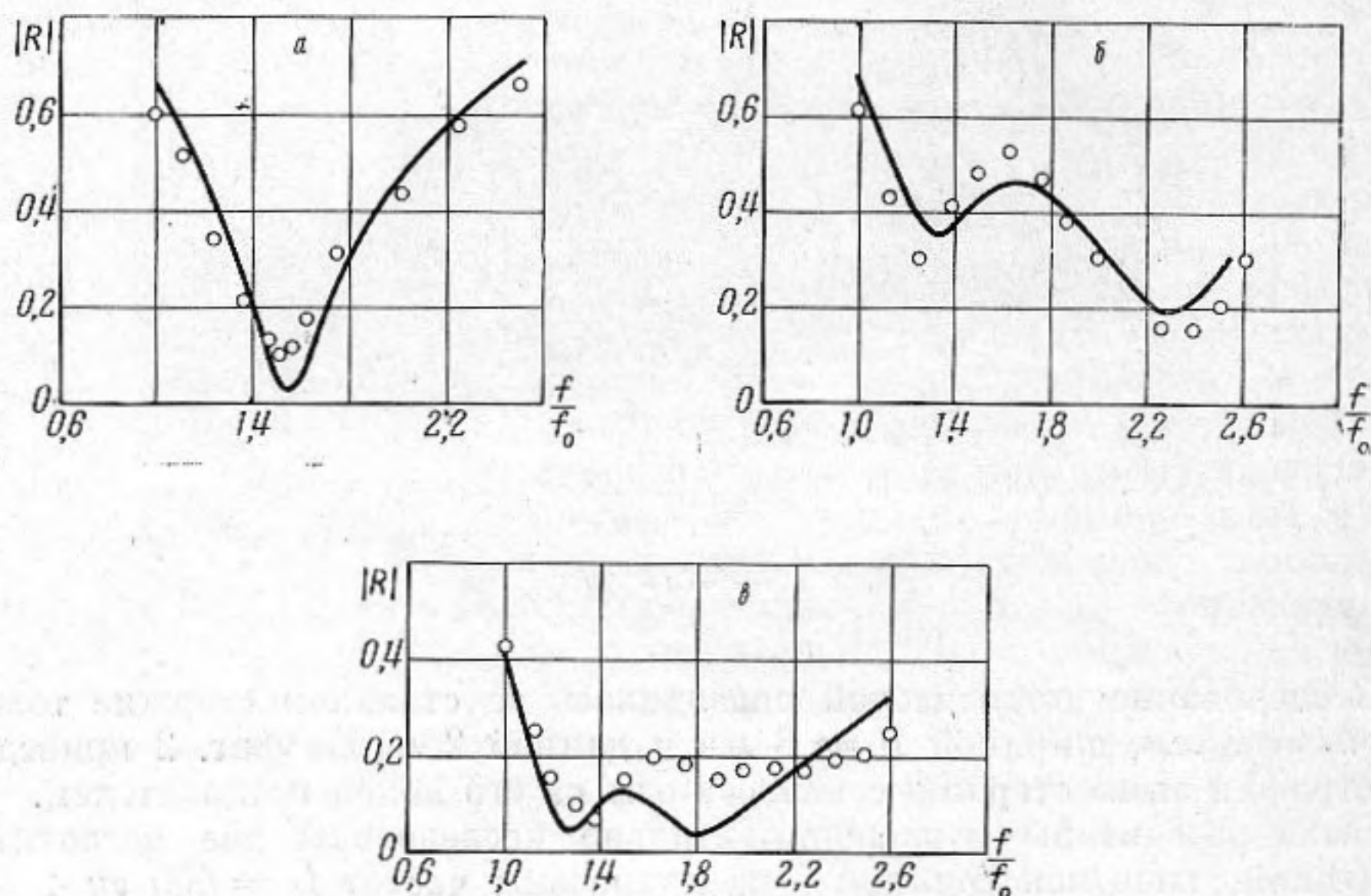
Фиг. 3

ны теоретические значения модуля коэффициента отражения поглотителя 1 (кривые для поглотителя 2 аналогичны) в зависимости от частоты при различном числе резонансных элементов (цифры на кривых соответствуют числу элементов). Как видно из этого рисунка, частотная характеристика поглотителя, состоящего из одного элемента, является типичной резонансной кривой. С увеличением числа элементов появляются дополнительные минимумы частотной характеристики и одновременно уменьшается интеграл от модуля коэффициента отражения в заданном диапазоне частот (площадь под кривой). При этом для числа элементов порядка десяти частотная полоса поглощения составляет около полутора октав, а общая длина поглотителя — около $1/4$ длины волны на нижней частоте диапазона. В ряде случаев расчет показывает, что более выгодным с точки зрения минимума величины Φ_i является вообще отсут-

ствие i -го элемента (например, $i = 3$ и $i = 4$ для поглотителя 1). В этом случае частотная характеристика после присоединения i -го элемента не изменяется и, естественно, совпадает с частотной характеристикой поглотителя, состоящего из $i = 1$ элемента. Ниже приведены расчетные значения отношения резонансных частот элементов для поглотителя 1 к нижней частоте диапазона.

Номер элемента i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отношение	1	1,84	—	—	2,24	2,24	2,15	2,18	2,24

Экспериментальные исследования изгибных поглотителей были выполнены на установке, аналогичной применявшейся в работах [4, 5] и позволяющей измерять модуль коэффициента отражения от различного рода



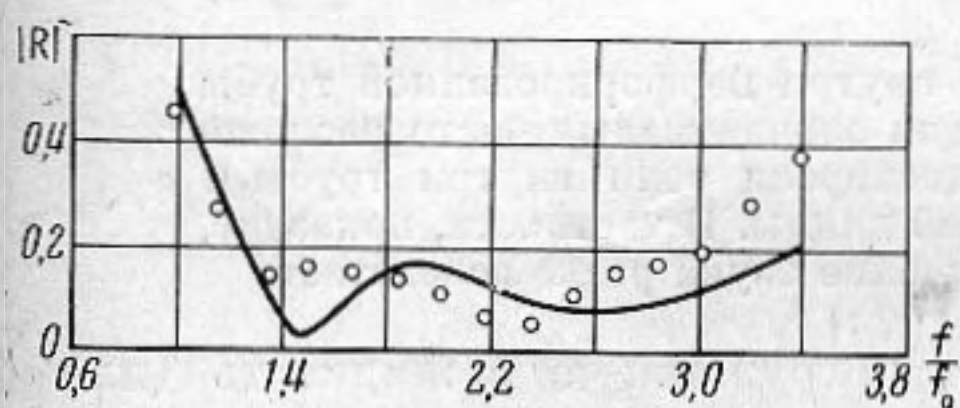
Фиг. 4

препятствий при изгибных колебаниях стержней. Исследуемый стержень с поглотителем подвешивался в горизонтальном положении на тонких нитях. Стационарные изгибные колебания возбуждались электромагнитным вибратором, соединенным со свободным концом стержня. В качестве бесконтактного приемника использовался микрофон, автоматически перемещавшийся вдоль стержня и воспринимавший колебания воздуха вблизи колеблющейся поверхности стержня. Диаметр приемной мембраны микрофона составлял 1 см, зазор между мембраной и поверхностью стержня — 3—5 мм. Модуль коэффициента отражения изгибной волны от поглотителя рассчитывался обычным образом по коэффициенту стоячности.

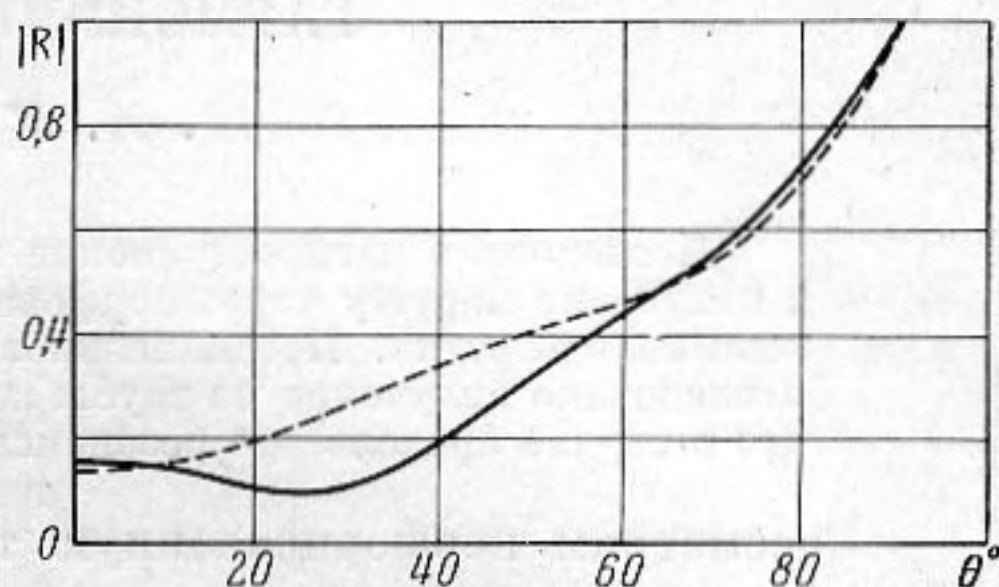
На фиг. 4 и фиг. 5 приведены теоретические и экспериментальные данные для поглотителей 1 и 2, соответственно, при различном числе их элементов — $4a - n = 1$; $4б - n = 2$; $4в - n = 9$; $5 - n = 10$. Точками обозначены экспериментальные значения модуля коэффициента отражения.

Из фигур видно, что экспериментальные точки при малом числе элементов хорошо ложатся на теоретические кривые, а при большом числе элементов, так же как и в случае поглотителей продольных волн [1], наблюдается увеличение расхождения теоретических и экспериментальных результатов. Тем не менее, экспериментальные величины остаются малыми в довольно широком диапазоне частот (по крайней мере, 1,5—2 октавы).

Представляет интерес рассмотреть зависимость модуля коэффициента отражения изгибного поглотителя от угла падения на него плоской изгибной волны (в зеркальном направлении) при нанесении поглотителя на свободный край полубесконечной пластины*. Эта зависимость рассчитывалась нами для изгибного поглотителя № 2 с использованием результатов работы авторов [6], в которой был развит метод решения подобного рода задач с помощью специально введенных в рассмотрение изгибных импеданцев пластин. На фиг. 6 приведены результаты этих расчетов для частоты $f = 1,8 f_0$ (540 гц) и значения коэффициента Пуассона $\sigma = 0,3$. Штриховая линия относится к поглотителю из одного (первого) элемента, сплошная — ко всему поглотителю, состоящему из десяти элементов. Видно, что один элемент обладает высокой эффективностью в сравнительно



Фиг. 5



Фиг. 6

малой угловой области, увеличение числа элементов несколько расширяет последнюю.

Авторы признательны В. И. Кашиной за помощь в проведении экспериментальной части работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кашина, В. В. Тютекин, А. П. Шкварников. Синтез и исследование поглотителей продольных волн в стержнях и пластинах. Акуст. ж., 1970, 16, 2, 257—263.
2. В. В. Тютекин, А. П. Шкварников. Внутренние изгибные импеданцы и их применение для задач распространения изгибных волн по неоднородным стержням. Акуст. ж., 1963, 14, 2, 275—281.
3. И. И. Ключкин. Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем. Акуст. ж., 6, 2, 213—219.
4. В. И. Кашина, В. В. Тютекин. Установка для измерения модуля Юнга и коэффициента потерь резиноподобных и твердых материалов. Сб. «Приборы и машины для испытания металлов и пластмасс», М., Машгиз, 1965.
5. В. В. Тютекин, А. П. Шкварников. Отражение изгибных волн от промежуточного стержня переменной толщины. Акуст. ж., 1967, 4, 604—609.
6. В. В. Тютекин, А. П. Шкварников. Метод «прогонки» в задачах об изгибных колебаниях неоднородных пластин. Изгибные импедансы пластин. Тр. Акуст. ин-та АН СССР, 1968, IV, 5—17.
7. И. И. Ключкин, Ю. Д. Сергеев. Рассеяние изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине. Акуст. ж., 1964, 10, 1.

Акустический институт
АН СССР, Москва

Поступила в редакцию
3 мая 1971 г.

* Следует отметить, что синтез поглотителя при его «работе» на краю пластины остается прежним (поглотитель синтезируется для нормального падения волны на край пластины) за исключением того, что в изгибную жесткость исходной пластины необходимо подставить величину $E/1 - \sigma^2$ вместо величины E , входящей в изгибную жесткость стержня.