

УДК 534.231.1

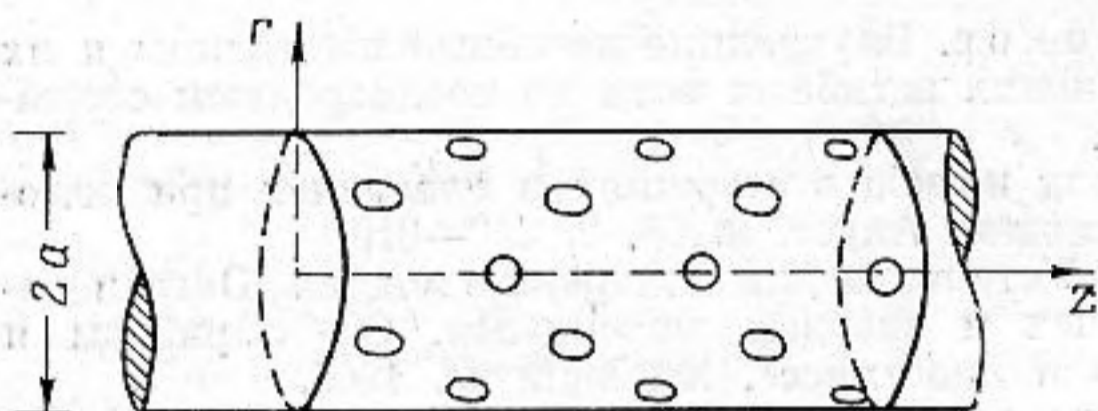
**ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИЗ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ТРУБЫ,
ВНУТРИ КОТОРОЙ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ
ГАРМОНИЧЕСКАЯ ВОЛНА**

И. А. Урусовский

Исследовано распространение звука внутри перфорированной трубы и излучение наружу через перфорации для случая малых часто расположенных отверстий. Проанализирована дисперсия волн внутри трубы и исследовано излучение из трубы конечной длины. В частности, показано, что в случае продольного резонанса излучение звука резко возрастает.

Рассмотрим перфорированную трубу, погруженную в жидкость (или газ) и заполненную той же средой. При распространении звуковой волны внутри трубы жидкость перетекает через отверстия наружу и обратно, в результате чего в окружающую среду излучается звуковая волна. В настоящей работе рассмотрено такое излучение для случая тонкой абсолютно жесткой стенки трубы и отверстий, малых по сравнению с радиусом трубы и распределенных по поверхности трубы равномерно на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, но малых по сравнению с длиной звуковой волны λ (фиг. 1).

Перетекание жидкости сопровождается резкими локальными изменениями звукового давления вблизи отверстий, выравнивающимися при удалении от них на расстояниях,



Фиг. 1

больших по сравнению с размером отверстия, где поле принимает плавный характер как внутри, так и вне трубы. Таким образом, плавные поля волны, бегущей внутри трубы, и волны, излучаемой наружу, искажаются вблизи отверстий местными полями перетекания. Потенциалы скоростей плавных полей обозначим через φ_1 и φ_2 соответственно внутри и снаружи трубы. Эти потенциалы имеют разрыв на стенке трубы, обусловленный местными полями, аналогичный разрыву полей в задаче о прохождении звука через малое отверстие в плоском экране [1]. Так как на участке поверхности трубы, малом по сравнению с длиной волны, расположено много отверстий, то их совместное акустическое действие эквивалентно некоторым постоянным входным импедансам на внутренней и наружной поверхности трубы: на внутренней поверхности импеданс — массового типа с отрицательной реактивной и положительной активной составляющей, а на внешней — упругого типа с положительной реактивной и отрицательной активной составляющей.

«Местное» движение среды вблизи отверстий можно рассчитывать в приближении несжимаемой жидкости. Тогда, поскольку размеры отверстий малы сравнительно с расстояниями между ними, а эти последние малы по сравнению с радиусом трубы, проводимость каждого отверстия

«Местное» движение среды вблизи отверстий можно рассчитывать в приближении несжимаемой жидкости. Тогда, поскольку размеры отверстий малы сравнительно с расстояниями между ними, а эти последние малы по сравнению с радиусом трубы, проводимость каждого отверстия

можно считать равной проводимости η одиночного отверстия в плоском жестком экране*. Поэтому скачок плавных полей на поверхности трубы вблизи отверстия можно рассчитывать по формуле Рэлея [1], принимающей в рассматриваемом случае вид

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{n} \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds, \quad (1)$$

где $\partial \varphi / \partial r$ — радиальная производная полного поля φ (см. фиг. 1) равная радиальной составляющей скорости течения, а интегрирование проводится по всему сечению σ отверстия.

В силу неразрывности среды и плавности полей φ_1 и φ_2 имеем

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds = S \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{\sigma} = S \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{\sigma}, \quad (2)$$

где S — площадь поверхности трубы, приходящейся на одно отверстие. Дальнейшее рассмотрение мы ограничим нулевой волной в трубе. Тогда потенциалы φ_1 и φ_2 , удовлетворяющие уравнению Гельмгольца, граничным условиям (2) и условию излучения, имеют вид:

$$\varphi_1 = J_0(\kappa r) e^{i\nu z} \quad \text{при } r \leq a, \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \frac{J_1(\kappa a)}{H_1^{(1)}(\kappa a)} H_0^{(1)}(\kappa r) e^{i\nu z} \quad \text{при } r \geq a. \quad (4)$$

Здесь J_n , $H_n^{(1)}$ — соответственно функции Бесселя и Ганкеля, a — радиус трубы, $\nu = \sqrt{k^2 - \kappa^2}$, k — волновое число; $\text{Re } \nu$, $\text{Im } \nu \geq 0$.

Подставляя выражения (3) и (4) в формулу (1) и учитывая соотношения (2) и известное соотношение [2]

$$J_1(x) H_0^{(1)}(x) - J_0(x) H_1^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}, \quad (5)$$

получим дисперсионное уравнение

$$\pi i x^2 J_1(x) H_1^{(1)}(x) = q, \quad (6)$$

где $x = \kappa a$, $q = 2a\eta / S$. Далее будем рассматривать лишь представляющий наибольший интерес случай $q \ll 1$, когда, как увидим ниже, по трубе могут распространяться слабо затухающие волны. В противоположном случае, когда $q \gtrsim 1$, затухание волны велико при всех частотах: в такой трубе отверстия слишком велики или слишком плотно расположены, чтобы она была в состоянии эффективно удерживать волну.

Заменяя входящие в уравнение (6) бесселевы функции известными представлениями при малых значениях аргумента [2] и решая эти уравнения методом последовательных приближений при малых q , находим с относительной погрешностью порядка $(q \ln q)^2$:

$$x^2 = q \left[1 + \frac{q}{4} \left(\ln \frac{q}{4} - 2C - \frac{1}{2} \right) - i \frac{\pi}{4} q \right], \quad (7)$$

где $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Отсюда

$$\nu = k \sqrt{1 - \frac{x}{(ka)^2}}, \quad (8)$$

$$\nu' = k \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{q(1+\varepsilon)}{(ka)^2} + \sqrt{\left[1 - \frac{q(1+\varepsilon)}{(ka)^2} \right]^2 + \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \left(\frac{q}{ka} \right)^4} \right\}}, \quad (9)$$

$$\nu'' = \frac{\pi}{8\nu'} \left(\frac{q}{a} \right)^2, \quad (10)$$

* Например, для круглого отверстия η равно диаметру отверстия.

где

$$\varepsilon = \frac{q}{4} \left(\ln \frac{q}{4} + 2C - \frac{1}{2} \right), \quad v' = \operatorname{Re} v, \quad v'' = \operatorname{Im} v.$$

За пределами малой окрестности точки $(ka)^2 = q(1 + \varepsilon)$ выражения для v' , v'' упрощаются:

$$v' \approx k \sqrt{1 - \frac{q(1 + \varepsilon)}{(ka)^2}} \quad \text{при} \quad [(ka)^2 - q(1 + \varepsilon)]^2 \gg \left(\frac{\pi}{8} q^2 \right)^2, \quad ka^2 > q(1 + \varepsilon);$$

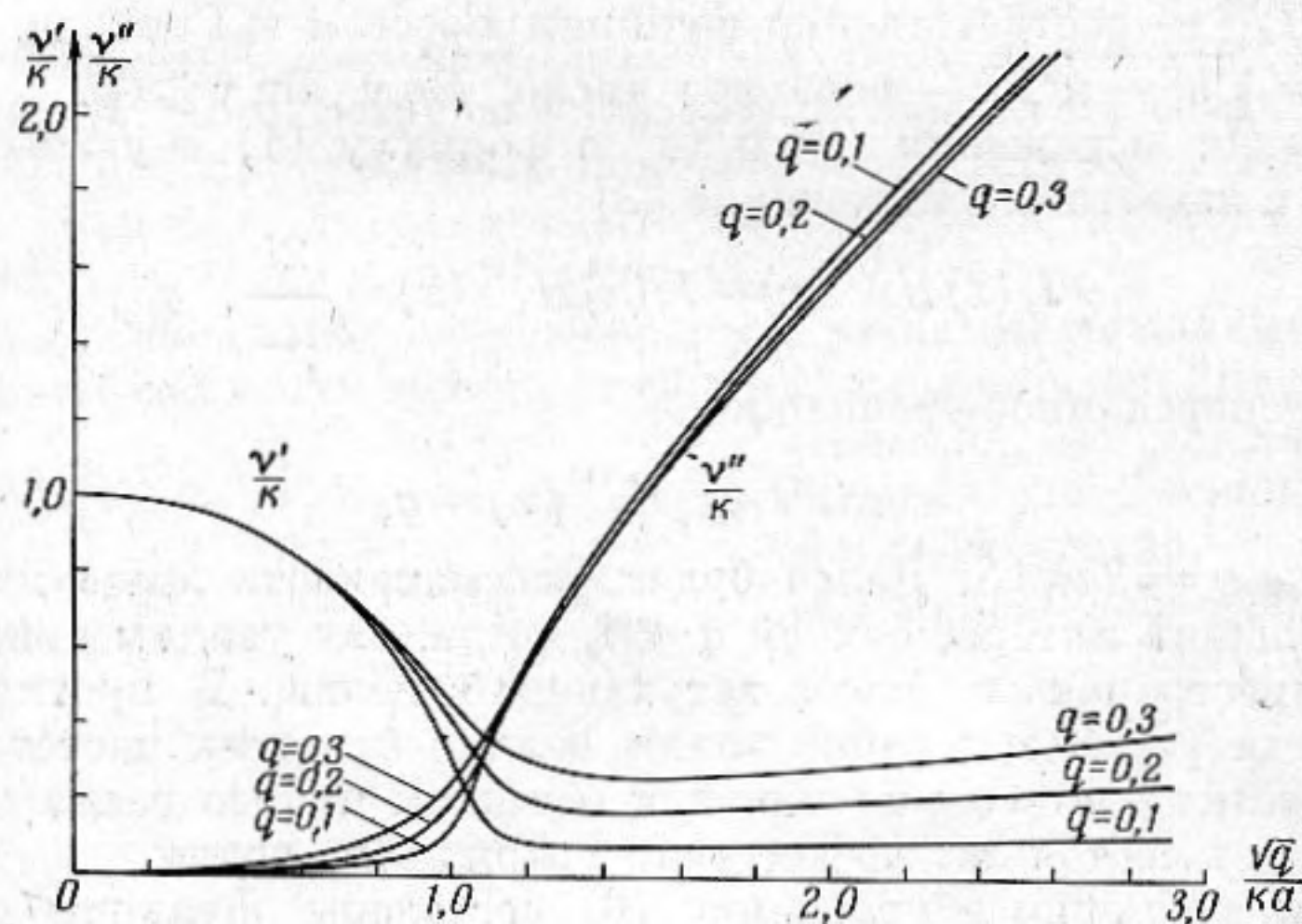
$$v'' \approx k \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\pi q}{8(1 + \varepsilon)} \right]^2 \right\} \left[\frac{q(1 + \varepsilon)}{(ka)^2} - 1 \right] + 2 \left[\frac{\pi q}{8(1 + \varepsilon)} \right]^2}$$

при

$$\left[\frac{q(1 + \varepsilon)}{(ka)^2} - 1 \right]^2 \gg \left(\frac{\pi q}{8(1 + \varepsilon)} \right)^2, \quad (ka)^2 < q(1 + \varepsilon).$$

Рассчитанные по формулам (9), (10) величины v'/k , v''/k для трех значений q представлены графически на фиг. 2.

Из формулы (9) следует, что фазовая скорость волны, равная ck/v' , где c — скорость звука в среде, больше скорости звука, причем она умень-



Фиг. 2

шается с увеличением частоты, асимптотически приближаясь к скорости звука c ; коэффициент затухания, равный v'' , при этом уменьшается, то есть уменьшается и излучение звука во внешнюю среду. Это объясняется тем, что с увеличением частоты возрастают инерциальные силы, связанные с колебаниями присоединенных масс в отверстиях, в результате чего колебания внутри трубы все более изолируются от колебаний во вне. Уменьшение размеров отверстий или увеличение расстояний между ними также приводит к большей изоляции колебаний и поэтому уменьшает затухание и фазовую скорость волны.

Затухание на длине волны λ , характеризующееся отношением v''/k , мало при условиях

$$1 - \frac{q}{(ka)^2} \sim 1, \quad q \ll 1. \quad (11)$$

Тогда согласно (10) v''/k составляет величину порядка $[\eta / (kS)]^2 \ll 1$. Если d — расстояние между отверстиями, то $S \sim d^2$ и из последнего неравенства следует $d^2 \gg \eta\lambda$, то есть, что отверстия расположены в зоне Фраунгофера по отношению друг к другу.

Расстояние $L_e = 1/v''$ вдоль оси трубы, на котором волна затухает в e раз, в области $q \ll (ka)^2$ не зависит от радиуса трубы.

Структура «усредненного» поля внутри трубы при $q \ll (ka)^2$ мало отличается от волны в трубе без отверстий: появляется только небольшое затухание и малое увеличение фазовой скорости волны. При $q \sim (ka)^2$, как видно из формул (7) — (9), фазовая скорость возрастает в несколько раз, а при $q \gg (ka)^2$ велико и затухание на длине волны.

При $|\operatorname{Im} x^2| \gg |(ka)^2 - \operatorname{Re} x^2|$ наблюдается поперечный резонанс — почти радиальные колебания среды, при которых поток энергии W через поперечное сечение S_0 трубы минимален. Поток W легко найти, подставляя выражения (3), (7) и (8) в формулу

$$W = -\frac{\omega\rho}{2} \int_{S_0} \operatorname{Im} \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z} \right) ds, \quad (12)$$

где ρ плотность среды, ω — круговая частота колебаний. Ограничиваясь в силу малости q двумя первыми членами разложения функции $J_0(xr)$ и проводя элементарное интегрирование, получим

$$W(z) = \frac{\omega\rho}{2S_0} v' e^{-2v''z} \left[1 - \frac{q}{4} \left(1 - \frac{q}{4} \ln \frac{q}{4} \right) \right].$$

В рассматриваемой области v' , а следовательно, и W достигают минимума. Добротность резонансных колебаний определяется излучением звука из трубы, то есть величиной v'' . В частности, для значения $\operatorname{Re} x^2 = (ka)^2 \ll 1$ из рассматриваемой области имеем:

$$v = \frac{1}{a} \sqrt{-i \operatorname{Im} x^2} = \frac{q}{2a} \sqrt{i\pi} = (1+i) \frac{k^2 a}{2 + (ka)^2 \ln(ka)} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

В этом случае $v' = v'' \ll k$, $kL_e = 2\sqrt{2/\pi} / (ka)$, длина затухания L_e в 2л раз меньше длины волноводной волны, а фазовая скорость волны приблизительно в kL_e раз больше скорости звука. Заметим, что такой резонанс наблюдается в перфорированной трубе при $ka \ll 1$, выступающей в этом случае в роли своеобразного резонатора Гельмгольца, в то время как поперечные колебания в трубе без отверстий возможны лишь при ka порядка нескольких единиц [3]. Излучение звука в окружающую среду через поверхность трубы на участке $z_1 < z < z_2$ можно рассчитать при помощи закона сохранения энергии: мощность излучения равна разности $W(z_2) - W(z_1)$.

Для длинной трубы конечных размеров характер излучения с участков поверхности, удаленных от концов, будет, очевидно, таким же, как и в случае бесконечной трубы, но вблизи концов он будет существенно иным. Чтобы оценить длину пространственного установления, то есть расстояние от конца, на котором затухание и фазовая скорость волны становятся такими же, как и в бесконечной трубе, достаточно рассмотреть излучение из полубесконечной перфорированной трубы с источником объемной скорости в виде колеблющегося поршня, закрывающего вход в трубу.

Для простоты расчета будем полагать, что труба снабжена жестким цилиндрическим экраном, дополняющим ее до бесконечного (в обе стороны) цилиндра, как показано на фигуре 1.

Добавление экрана может существенно изменить поле на поверхности трубы лишь на расстоянии меньше или порядка длины волны λ от края, перфорированного участка, так что длина установления изменится не более, чем на величину порядка λ . Далее мы ограничимся рассмотрением

лишь слабо затухающих волн, то есть будем считать выполненным условие $q \ll ka$.

Примем, что перфорированный участок трубы простирается в сторону положительных значений z , а поршень, создающий объемную скорость Q , расположен в сечении $z = 0$. Влияние края перфорированного участка при $q \ll ka$ сказывается главным образом на поле снаружи трубы вблизи него и практически не изменяет поле внутри. Поэтому можно считать, что внутри трубы волна описывается всюду при $z > 0$, $r \leq a$ формулой

$$\varphi_1 = AJ_0(\kappa r) e^{i\nu z}, \quad (13)$$

где $A = -iQ\kappa / [2\pi\nu a J_1(\kappa a)] \approx -iQ / (\nu S_0)$, $S_0 = \pi a^2$ — площадь поперечного сечения трубы. Из формул (2) и (13) следует, что при $r = a$ и $z > 0$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = i \frac{Q\kappa^2}{2\pi\nu a} e^{i\nu z}.$$

На остальной части цилиндра, очевидно, $\partial \varphi_2 / \partial r = 0$.

Согласно работе [4] поле вне трубы выражается формулой

$$\varphi_2(r, z) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(\kappa_{\perp} r)}{\kappa_{\perp} H_1^{(1)}(\kappa_{\perp} a)} e^{i\zeta z} f(\zeta) d\zeta, \quad (14)$$

где $\kappa_{\perp} = \sqrt{k^2 - \zeta^2}$; $\text{Re}, \text{Im } \kappa_{\perp} \geq 0$;

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=a} e^{-i\zeta z} dz. \quad (15)$$

Последнее выражение для найденных значений $\partial \varphi_2 / \partial r$ сводится к виду $f(\zeta) = Q\kappa^2 / [4\pi^2 a \nu (\zeta - \nu)]$. Подставим это значение в формулу (14) и продеформируем контур интегрирования в плоскости ζ к контуру по берегам разреза (k, ∞) , по разные стороны которого функция κ_{\perp} имеет противоположные знаки. Единственным полюсом, который задевается контуром интегрирования при деформировании, является точка $\zeta = \nu$, расположенная в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$. Вычисляя вычет в этой точке и учитывая тождество (5), найдем при $r = a$, $z > 0$

$$\varphi_2(a, z) = \frac{iQ\kappa^2}{2\pi\nu} e^{i\nu z} \left[- \frac{H_0^{(1)}(\kappa a)}{\kappa a H_1^{(1)}(\kappa a)} + \frac{1}{2} J \right], \quad (16)$$

где второе слагаемое в правой части формулы имеет смысл краевой поправки,

$$J = \int_k^{\infty} \frac{e^{i(\zeta - \nu)z}}{(\zeta - \nu) F(a \sqrt{\zeta^2 - k^2})} d\zeta, \quad (17)$$

$F(u) = u^2 K_1(u) [K_1(u) - i\pi I_1(u)] = 1 - \frac{i}{2} u^2 + \dots$ При

$$\left(\frac{\pi a}{z} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{\pi} kz \right) \ll 1 \quad (18)$$

в формуле (17) можно положить $F(u) \approx 1$ на существенном участке интегрирования и тогда

$$J \approx \int_k^{\infty} \frac{e^{i(\zeta - \nu)z}}{\zeta - \nu} d\zeta = \int_{k-\nu}^{\infty} \frac{e^{it} dt}{t} = -Ei[i(k - \nu)z].$$

При $|(k - \nu)z| \lesssim 1$ удобно пользоваться разложением в ряд интегральной показательной функции Ei [5]:

$$J \approx i \frac{\pi}{2} - \ln[(k - \nu)z] - C - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{[i(k - \nu)z]^s}{s! s} \quad (19)$$

При $|(k - \nu)z| \gg 1$ удобно асимптотическое представление этой функции [5]

$$J \sim e^{i(k - \nu)z} \sum_{s \geq 1} (-1)^{s-1} \frac{(s-1)!}{[i(k - \nu)z]^s} \quad (20)$$

Из полученных выражений видно, что краевая поправка существенна лишь при значениях $|(k - \nu)z| \lesssim 1$. Таким образом, длина $z_{кр}$ участка, прилегающего к краю перфорированного участка трубы, на котором поле существенно иное, чем поле на удаленных от края местах, описываемое первым слагаемым формулы (16), имеет порядок $z_{кр} \sim 1/|k - \nu|$. В частности, при выполнении условия (11) из формул (9) и (10) следует: $z_{кр} \sim 2ka^2/q$, что в $4/(\pi q)$ раз меньше, чем L_e (очевидно, что условие (18) для $z = z_{кр}$ в рассматриваемом случае выполнено); в остальных случаях $z_{кр}$ еще меньше.

Так как мы рассматриваем лишь малые значения q , ka также мало, и, как видно из формулы (7), $(ka)^2 \approx q$. Поэтому, воспользовавшись разложением бесселевых функций в ряд, можно представить формулу (16) в виде

$$\varphi_2(a, z) = \frac{iQ\kappa^2}{2\pi\nu} e^{i\nu z} \left\{ \ln \frac{\kappa a}{2} + C - i \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} J + O[(\kappa a)^2 \ln(\kappa a)] \right\}.$$

Выражение для звуковой мощности w , излучаемой с единицы площади поверхности перфорированной трубы, $w = -\frac{\omega\rho}{2} \operatorname{Im} \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial r} \right)_{r=a}$ имеет здесь вид:

$$w = \frac{\omega\rho}{4a} \left| \frac{Q\kappa^2}{2\pi\nu} \right|^2 (\pi - \operatorname{Im} J) e^{-2\nu''z} \quad (21)$$

Отсюда и из формул (19), (20) видно, что мощность излучения с участков, расположенных вблизи края перфорированной зоны в области $0 < z \ll z_{кр}$, вдвое меньше, чем вдали от края при $z \gg z_{кр}$, а полное излучение с участка $(0, z_{кр})$ мало сравнительно со всей излучаемой энергией

$W = 2\pi a \int_0^{\infty} w dz$. Действительно, проводя интегрирование, найдем:

$$W = \frac{\omega\rho}{\nu''} \left| \frac{Q\kappa^2}{4\nu} \right|^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\nu''}{k - \nu'} \right).$$

Второе слагаемое в скобке соответствует краевому эффекту. При условии (11) оно мало сравнительно с единицей и составляет величину $\sim q/2$. В частности, при $q \ll (ka)^2$, разлагая правую часть равенства (9) в ряд по $q/(ka)^2$, выражая ν'' через ν' по формуле (10) и ka через q по формуле (7), получим

$$W \approx \frac{\omega\rho}{2S_0} \nu' \left| \frac{Q}{\nu} \right|^2 \left[1 + \frac{q}{2} \left(\ln \frac{q}{4} + 2C - \frac{1}{2} \right) \right] \left(1 - \frac{q}{2} \right).$$

Рассмотрим теперь излучение звука из перфорированной трубы конечной длины $L \gg z_{кр}$, пренебрегая в силу вышеизложенного краевым эффектом. Пусть на левом конце трубы при $z = 0$ расположен поршень с

объемной скоростью Q , излучающий в трубу волну вида (13). Если K — коэффициент отражения волны от правого конца $z = L$, то в трубе установится поле

$$\varphi_1 = AJ_0(\kappa r) [e^{ivz} + Ke^{iv(2L-z)}], \quad (22)$$

где

$$A = -iQ / [S_0 v (1 - Ke^{i2vL})].$$

Излучаемую в трубу мощность W вычислим по формулам (12) и (22) при $z = 0$. Проводя интегрирование и элементарные преобразования, найдем

$$W = W_\infty \frac{1 - |K|^2 e^{-4v''L} + 2|K| \frac{v''}{v'} e^{-2v''L} \sin(2v'L + \varphi)}{1 + |K|^2 e^{-4v''L} - 2|K| e^{-2v''L} \cos(2v'L + \varphi)}, \quad (23)$$

где $\varphi = \arg K$ — фаза коэффициента отражения, W_∞ — мощность излучения в трубу бесконечной длины, имеющая в принятом приближении вид

$$W_\infty = \frac{\omega \rho}{2S_0} v' \left| \frac{Q}{v} \right|^2.$$

При продольном резонансе в трубе, когда $\cos(2v'L + \varphi) = 1$, формула (23) сводится к виду:

$$W = W_{\text{рез}} = W_\infty (1 + |K| e^{-2v''L}) / (1 - |K| e^{-2v''L}).$$

При $|K| = 1$ и $4v''L \ll 1$ из формулы (23) следует

$$W = W_\infty 2v''L \frac{1 + (1 - 2v''L) [\sin(2v'L + \varphi) / (2v'L)]}{[1 - \cos(2v'L + \varphi)] [1 - 2v''L(1 - v''L)] + 2(v''L)^2},$$

$$W_{\text{рез}} = W_\infty / (v''L).$$

Отсюда видно, что при $L \ll L_e$ вблизи продольного резонанса излучаемая мощность может быть велика сравнительно с W_∞ . Ширина резонансной кривой равна $\Delta v' = v''$, что соответствует относительному изменению частоты $\Delta \omega / \omega = v'' / v'$. В частности, при $q \ll (ka)^2$ $\Delta \omega / \omega = 1 / (kL_e)$.

Излучаемая боковой поверхностью трубы мощность, очевидно, равна разности $W - W_K$, где W_K — мощность, поглощаемая на правом конце трубы ($z = L$). Согласно формулам (12) и (22) имеем

$$W - W_K =$$

$$= W_\infty \frac{(1 - e^{-2v''L}) (1 + |K|^2 e^{-2v''L}) + 2|K| \frac{v''}{v'} e^{-2v''L} [\sin(2v'L + \varphi) - \sin \varphi]}{1 + |K|^2 e^{-4v''L} - 2|K| e^{-2v''L} \cos(2v'L + \varphi)} \quad (24)$$

В частности, при продольном резонансе и при $|K| = 1$, $4v''L \ll 1$ получаем

$$W - W_K \approx \frac{W_\infty}{v''L} \left(1 - \frac{\sin \varphi}{2v'L} \right).$$

Поле вне трубы описывается формулами (14) и (15). Учитывая, что согласно (2) $\partial \varphi_1 / \partial r = \partial \varphi_2 / \partial r$ при $r = a$, вычисляя $\partial \varphi_1 / \partial r$, исходя из формулы (22), и подставляя результат в формулу (15), получаем после элементарного интегрирования:

$$f(\xi) = \frac{iQ\kappa^2}{2\pi va (1 - Ke^{i2vL})} \left[\frac{\sin(v - \xi) \frac{L}{2}}{v - \xi} + \right.$$

$$\left. + Ke^{ivL} \frac{\sin(v + \xi) \frac{L}{2}}{v + \xi} \right] e^{i(v-\xi) \frac{L}{2}}.$$

Вдали от трубы, при $R \gg \sqrt{LR}$, где $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, формула (14) согласно работе [4] сводится к виду:

$$\varphi_2 \approx -i2a \frac{f(k \sin \theta)}{ka \cos \theta H_1^{(1)}(ka \cos \theta)} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (25)$$

где $\sin \theta = z/R$, $\cos \theta = r/R$. При $kL \gg 1$ характеристика направленности поля φ_2 в основном определяется функцией $f(k \sin \theta)$. Последняя пропорциональна характеристике направленности обычной линейной антенны длины L , объемная скорость вдоль которой есть сумма двух бегущих волн вида (22). Делитель $ka \cos \theta H_1^{(1)}(ka \cos \theta)$ в (25) — медленно меняющаяся по модулю функция, равная при $ka \ll 1$ постоянной $-\frac{2i}{\pi}$. Направление

на максимум главного лепестка характеристики составляет угол с осью трубы, равный $\arcsin(v'/k)$. В частности, при $q \ll (ka)^2$ он равен $\sqrt{q}/(ka)$. При $L \ll L_c$ и $|K|$ близком к единице наблюдаются два главных лепестка характеристики, симметричных относительно плоскости, перпендикулярной оси трубы. При $L \gg L_c$ имеется лишь один главный лепесток, ориентированный в сторону положительных значений z и имеющий в случае $q \lesssim (ka)^2$ угловую ширину $\Delta\theta \sim 1/\sqrt{kL_c}$. При $L \lesssim L_c$ и $q \lesssim (ka)^2$ лепестки характеристики имеют ширину $\Delta\theta \sim \sqrt{2\pi}/(kL)$. Наконец, при $L \ll z_{кр}$, как видно из формул (19) — (21), мощность излучения вдвое меньше значения, предписываемого формулой (24), справедливой при $L \gg z_{кр}$.

Автор благодарит Ю. Л. Газаряна и М. А. Исаковича за полезное обсуждение данной работы, а также В. П. Бажничкину и Л. С. Райскую, выполнивших численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука. II, § 306. ГИТТЛ, М., 1955.
2. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I, М., ИЛ, 1949.
3. Ф. Морз. Колебания и звук. § 32. М., ГИТТЛ, 1949.
4. D. T. Laird, H. Cohen. Directionality Patterns for Acoustic Radiation from a Source on a Rigid Cylinder. J. Acoust. Soc., America. 1952, 24, 1, 46—49.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1962.

Акустический институт
АН СССР, Москва

Поступила в редакцию
21 декабря 1970 г.