

УДК 534.26

ОБРАЗОВАНИЕ КАУСТИК ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
ЗВУКА С ОБОЛОЧКАМИ

*Е. И. Хейфец, Е. Л. Шендеров*

Рассмотрены линии усиления звука (каустики), возникающие при взаимодействии звуковой волны с оболочками. Приведены фотографии звуковых полей с каустиками трех типов. К первому типу отнесены каустики, обусловленные излучением звука вследствие распространения по оболочке изгибных и продольных волн, ко второму типу — геометрические каустики, и к третьему типу — каустики «шепчущей галереи». Рассчитана амплитуда поля вблизи каустик.

При взаимодействии звука с упругой оболочкой во внутренней области оболочки могут возникать линии усиления звука (каустики). В работе [1] было показано, что в ряде случаев внутри оболочки возникают каустики, обусловленные излучением звука при распространении изгибных и продольных волн по оболочке в периферическом направлении. Кроме того, могут существовать каустики, обусловленные интерференцией лучей, отраженных от внутренней поверхности оболочки, а также волны типа «шепчущей галереи», дающие концентрацию энергии вблизи вогнутой поверхности [2]. Рассмотрим картины звукового поля, возникающие в подобных ситуациях.

При падении плоской звуковой волны на упругую цилиндрическую оболочку звуковое поле внутри оболочки определяется следующим выражением [3]:

$$P = (r, \varphi) = \frac{1}{\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^n I_n(kr) \cos n(\varphi - \pi)}{\frac{z_n}{2\rho c} H_n^{(1)'}(\mu) I_n'(\mu) + \frac{1}{\pi\mu}}, \quad (1)$$

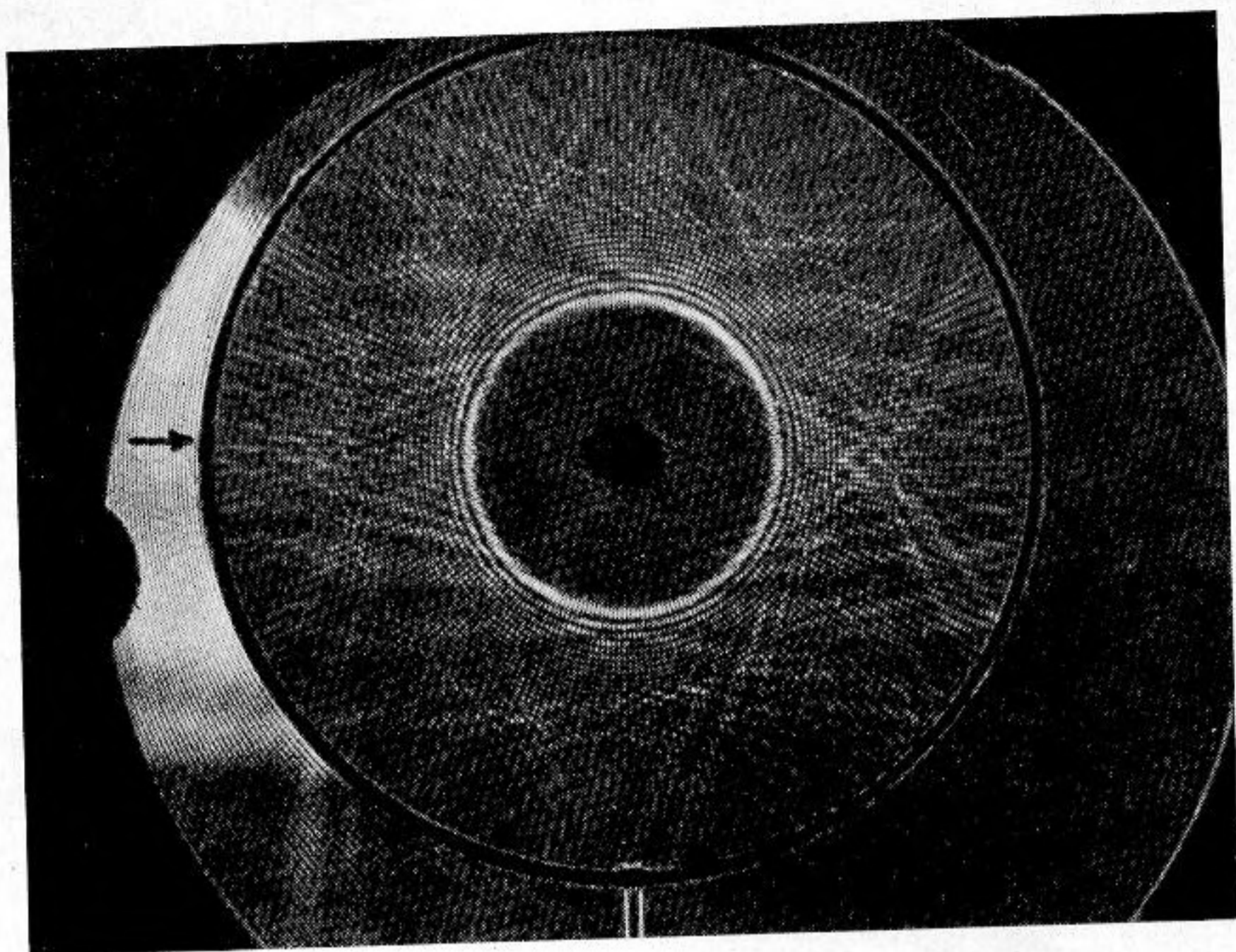
где  $\rho c$  — волновое сопротивление среды;  $\mu = ka$  — волновой радиус оболочки;  $z_n$  — механический импеданс оболочки;  $I_n$  и  $H_n^{(1)}$  — функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно;  $\varepsilon_0 = 1$ ;  $\varepsilon_n = 2$ .

Применим к выражению (1) преобразование Ватсона [4]:

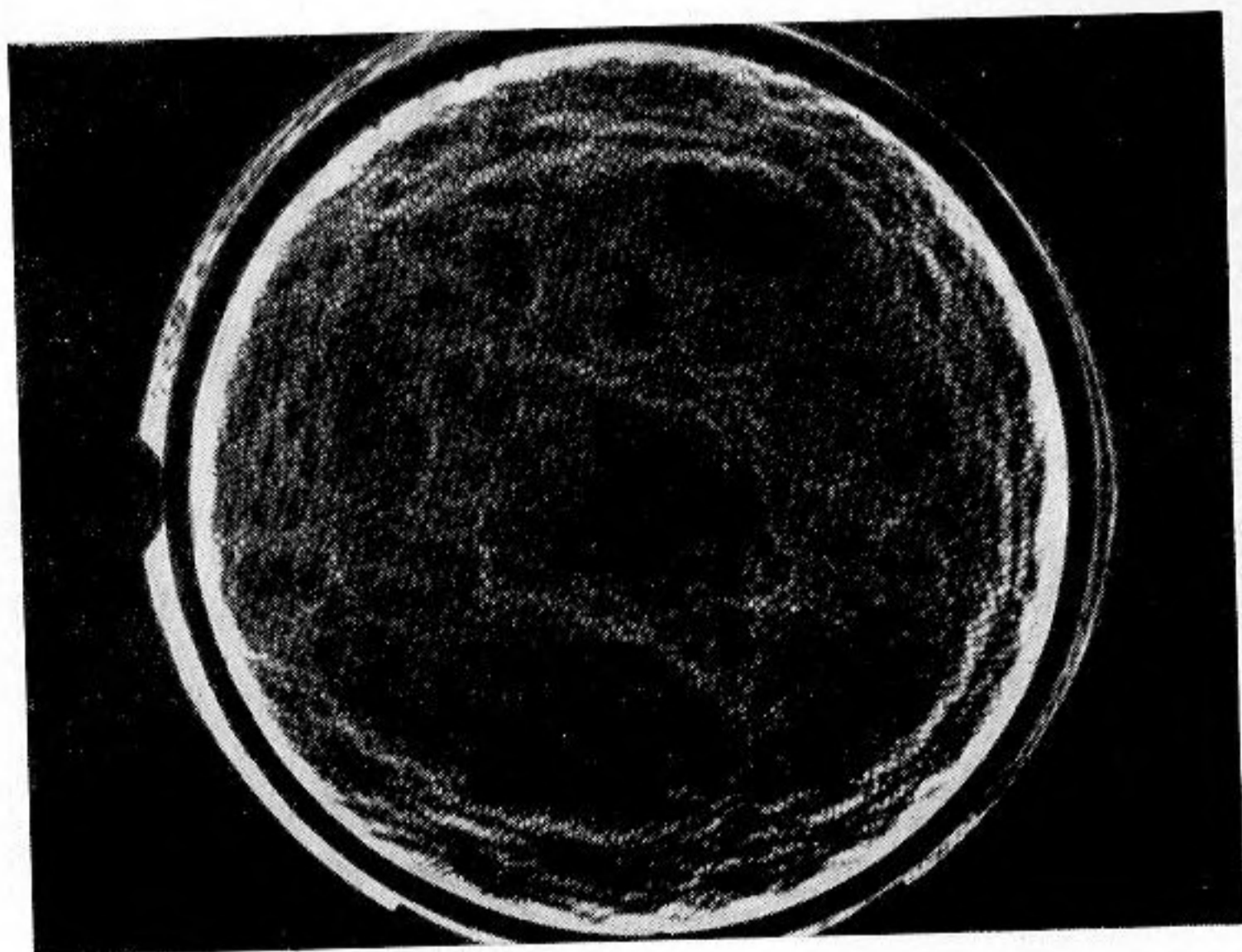
$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi} = \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\beta(\varphi-\pi)}}{\sin \pi\beta} a(\beta) d\beta. \quad (2)$$

Контур интегрирования  $\Gamma$  охватывает вещественную ось. Если выполняется условие  $a(\beta) = a(-\beta)$ , то интеграл (2) преобразуется в интеграл по контуру, проходящему над вещественной осью

$$P = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta(\varphi - \pi) e^{-i\frac{\pi}{2}\beta}}{\sin \beta\pi} a(\beta) d\beta, \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 6



где

$$a(\beta) = \frac{I_p(kr)}{\pi\mu \left[ \frac{Z_\beta}{2\rho c} H_\beta^{(1)'} I_\beta'(\mu) + \frac{1}{\pi\mu} \right]} \quad (4)$$

Деформируем далее контур интегрирования так, чтобы он охватывал полюса функции  $a(\beta)$  и замкнем его в верхней полуплоскости (можно показать, что при  $|\beta| \rightarrow 0$  и  $\text{Im } \beta > 0$  подынтегральная функция в выражении (3) убывает). Значение интеграла (3) будет тогда определяться вычетами в полюсах, соответствующих корням уравнения:

$$\frac{Z_\beta}{2\rho c} H_\beta^{(1)'}(\mu) I_\beta'(\mu) + \frac{1}{\pi\mu} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение по комплексной плоскости  $\beta$  имеет бесконечное множество корней, которые можно разделить на несколько групп. В первую группу входят корни, лежащие вблизи корней уравнения  $H_{(\beta)}^{(1)'}(\mu) = 0$ . Эти корни вблизи к корням, рассмотренным Францем для задачи дифракции на абсолютно жестком цилиндре [5]. Соответствующие этим полюсам волны близки к волнам Франца, огибающим цилиндр снаружи. В силу конечной упругости оболочки они будут создавать звуковое поле внутри последней. Кроме того, имеется корень, приблизительно соответствующий уравнению  $Z_\beta = 0$ . Этот случай реализуется лишь для упругой оболочки. Вещественную часть этого полюса можно приближенно найти, приравняв нулю механический импеданс колебаний цилиндрической оболочки. Взяв выражение для импеданса в форме, приведенной в работе [3], получим следующее решение для  $\mu_1$ :

$$\mu_1^2 \approx \frac{\beta^2 + 1 + \varepsilon(1 - \beta^2)^2}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon \left[ \frac{2\beta(1 - \beta^2)}{\beta^2 + 1 + \varepsilon(1 - \beta^2)} \right]^2} \right) \quad (6)$$

Для приближенной оценки в области  $\beta \gg 1$  положим  $\varepsilon = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{a} \right) \ll 1$ .

Тогда из формулы (6) получим два решения  $\mu \approx \beta$  и  $\mu_1 \approx \sqrt{\varepsilon}\beta$ . Соответственные два значения  $\beta$  (обозначим их через  $\beta_{\text{пр}}$  и  $\beta_{\text{н}}$ ) определяются в виде

$$\beta_{\text{пр}} \approx \frac{\omega a}{c_{\text{пр}}}; \quad \beta_{\text{н}} \approx \frac{\omega a}{c_{\text{н}}},$$

где  $c_{\text{пр}} = \sqrt{E_1/\rho_m}$ ,  $c_{\text{н}} = \sqrt{\frac{\omega^2 E_1 h^2}{12\rho_m}}$ ,  $E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}$  — модуль уп-

ругости для тонкой пластины;  $\rho_m$  — плотность интеграла оболочки;  $c_{\text{пр}}$  и  $c_{\text{н}}$  — соответственно, скорости продольных и изгибных волн.

Подробное исследование положения корней уравнения, близкого к уравнению (5), было выполнено в работе [6], где рассматривалось уравнение

$$\frac{Z_\beta}{i\rho c} + \frac{H_\beta^{(1)}(\mu)}{H_\beta^{(1)'}(\mu)} = 0,$$

возникающее при решении задачи дифракции звука на упругой пустотелой цилиндрической оболочке. В этой работе было показано, что так же, как и для уравнения (5) имеются разные группы корней, из которых одни определяют распространение волн типа Франца, а другие — распространение волн, связанных с изгибными колебаниями оболочки. В результате было выяснено, что мнимая часть  $\beta''$  полюса ( $\beta_{\text{н}} \approx k_{\text{н}} a + i\beta''$ ,  $\beta \ll k_{\text{н}} a$ ),

определяющая затухание волны при распространении вокруг оболочки, в диапазоне волновых толщин оболочки  $kh = 0,8 \div 1,2$  для волн изгибного типа много меньше, чем мнимая часть корня, соответствующего волне типа Франца. Поэтому поле в области геометрической тени оболочки может в ряде случаев полностью определяться вкладом волн только изгибного типа. Аналогичное положение имеет место и в нашем случае. Если эффективно возбуждены волны изгибного или продольного типа, то затухание этих волн при распространении вокруг оболочки оказывается малым и они создают основную часть звукового поля внутри оболочки.

Ниже приводится преобразование для корня, соответствующего изгибным колебаниям оболочки. Вклад волны, связанной с продольными колебаниями оболочки, рассматривается аналогично.

Взяв вычет в полюсе  $\beta_n$ , мы получим вклад волны изгибного типа

$$P_n = -\frac{2}{\mu} \frac{I_{\beta_n}(kr)}{\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{Z_\beta}{2\rho c} H_{\beta}^{(1)'}(\mu) I_{\beta}(\mu) \right] \Big|_{\beta=\beta_n}} \frac{\cos \beta_n (\varphi - \pi) e^{-i \frac{\pi}{2} \beta_n}}{\sin \pi \beta_n}.$$

Используя преобразование

$$\frac{\cos \beta_n (\varphi - \pi) e^{-i \frac{\pi}{2} \beta_n}}{\sin \pi \beta_n} = -i \frac{e^{i \beta_n (\varphi - \frac{\pi}{2})} + e^{i \beta_n (\frac{3}{2} \pi - \varphi)}}{1 - e^{i 2 \pi \beta_n}}$$

и представляя знаменатель этого выражения в виде суммы геометрической прогрессии, окончательно получим

$$P_n = \frac{2i}{\mu} \times \quad (7)$$

$$\times \frac{I_{\beta_n}(kr)}{\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{Z_\beta}{2\rho c} H_{\beta}^{(1)'}(\mu) I_{\beta}(\mu) \right] \Big|_{\beta=\beta_n}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ e^{i \beta_n (\varphi - \frac{\pi}{2} + 2\pi m)} + e^{i \beta_n (\frac{3}{2} \pi - \varphi + 2\pi m)} \right].$$

Из выражения (7) видно, что вклад, вносимый в поле измерения изгибной волной, распространяющейся по оболочке, можно интерпретировать как сумму звуковых волн, распространяющихся внутри оболочки по и против часовой стрелке. К волнам, обогнувшим оболочку один раз, добавляются волны, обогнувшие оболочку 2, 3, 4 раза.

Для качественного анализа ограничимся рассмотрением радиального распределения звукового давления внутри оболочки. Поскольку  $\operatorname{Re} \beta_n \gg 1$ ,  $kr \gg 1$ , то функцию Бесселя в числителе формулы (7) можно выразить через функцию Эйри

$$I_{\beta_n}(kr) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt[3]{\frac{2}{kr}} \left\{ v(t) - \frac{1}{60} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{kr}\right)^2} [t^2 v'(t) + \dots] \right\},$$

где 
$$t = \frac{k_n a - kr}{\sqrt{\frac{kr}{2}}}, \quad v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{x^3}{3} + xt \right) dx -$$

функция Эйри. В работе [7] показано, что при  $t < 0$  функция Эйри осциллирует, а при  $t > 0$  — экспоненциально убывает. Таким образом, при  $kr > k_n a$  амплитуда поля осциллирует, а при  $kr < k_n a$  — быстро падает. Это свидетельствует о том, что поле  $P_n$  сосредоточено в основном в области  $r > \frac{k_n}{k} a$ , а внутри этой области оно практически отсутствует.

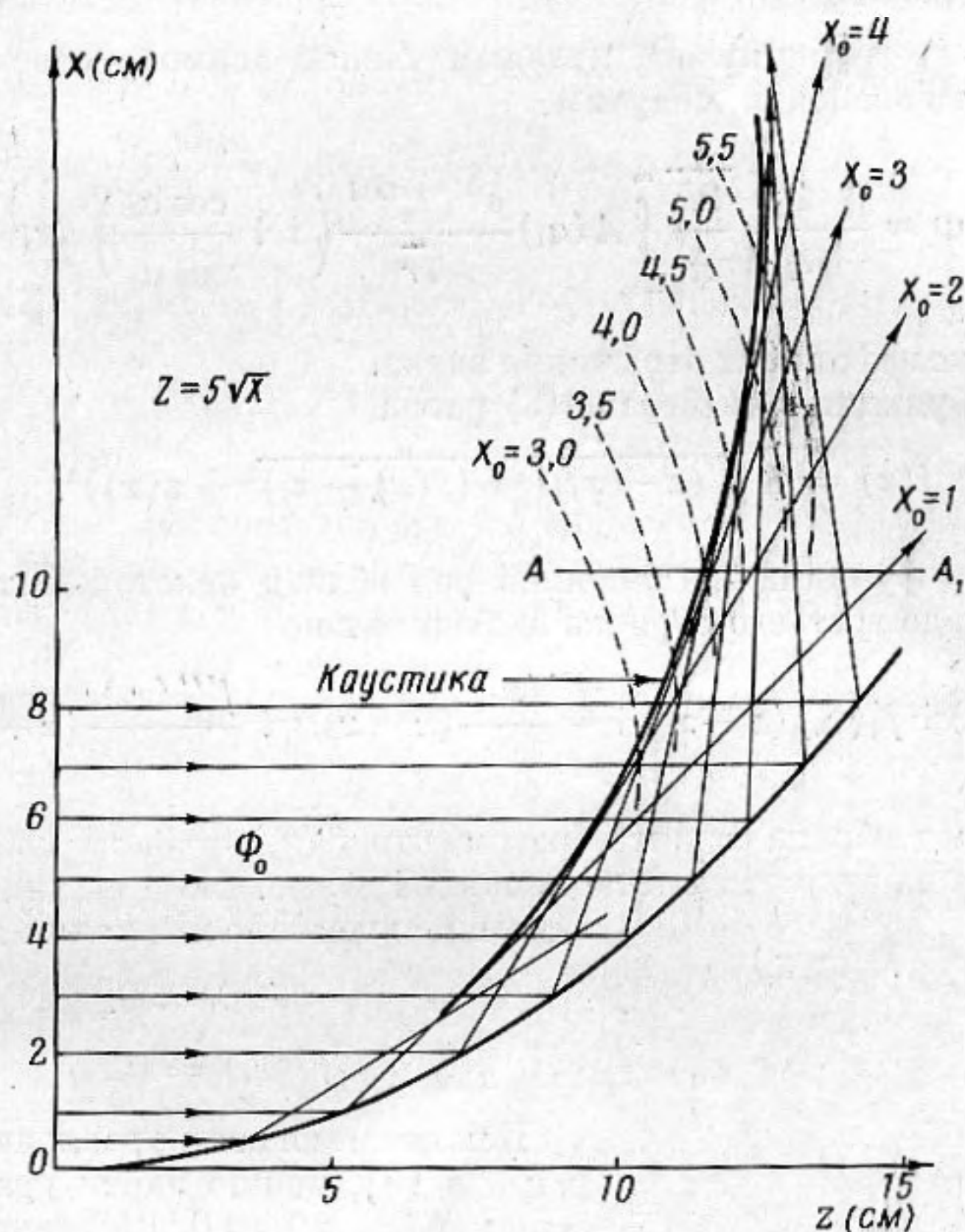
Максимальное значение амплитуды наблюдается вблизи окружности радиуса  $r = \frac{c}{c_n} a$ . Эта окружность и является каустикой, на которой про-

исходит усиление звука.

Рассматривая таким же способом вклад другого корня, соответствующего волне продольного типа, получим, что кроме каустики, обусловленной излучением изгибных волн внутри оболочки, создается каустика за счет излучения продольных волн. Ее радиус определяется соотношением

$$r = \frac{c}{c_{пр}} a.$$

На фиг. 1 приведена фотография звукового поля внутри упругой цилиндрической оболочки, полученная при помощи теневого оптического метода визуализации звука ( $f = 800$  кГц,  $h = 0,05$  см,  $2a = 15$  см). Видны



Фиг. 2

две каустики, звукового поля, возникающего при распространении по оболочке изгибных и продольных волн. В работе [1], где впервые была приведена подробная фотография, дана простая геометрическая интерпретация этого явления. Эффективное излучение звука оболочкой происходит в направлении, определяемом углом  $\Theta = \arcsin \frac{c}{c_{пр}}$ . Поскольку этот

угол в любой точке оболочки является постоянным, то огибающая семейства лучей есть окружность. Внутри этой окружности лучи не попадают, а вне ее интерферируют и создают чередование максимумов и минимумов.

Другой тип каустики образуется при интерференции лучей, отраженных от поверхности оболочки и имеющих близкие длины хода (фиг. 2). Общий подход к вычислению волновых полей вблизи каустических поверхностей изложен в книге [8], где исследовались поля в области каустик, возникающих при полном внутреннем отражении и при рефракции в неоднородной среде. Для расчета поля вблизи каустики может быть

применен метод стационарной фазы, однако, поскольку на каустике мала будет не только первая, но и вторая производные фазовой функции, необходимо в этом случае в степенном разложении фазовой функции учесть член третьего порядка.

В приближении Кирхгофа для отраженного поля  $\Phi$  в точке  $M(x_1, z_1)$  (фиг. 3) можно написать следующее выражение

$$\Phi = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial h} \Big|_s H_0^{(1)}(kr) (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) dl.$$

При  $kr \gg 1$  ограничиваясь нулевым членом асимптотически для поля на поверхности оболочки, получим

$$\Phi \approx -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha_1) \frac{e^{ik[r+z(x)]}}{\sqrt{r}} \left(1 + \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}\right) dx, \quad (8)$$

где  $A(\alpha_1)$  — коэффициент отражения звука.

Фазовая функция в интеграле (3) равна

$$f(x) = K(\sqrt{(x-x_1)^2 + (z(x)-z_1)^2} + z(x))^2.$$

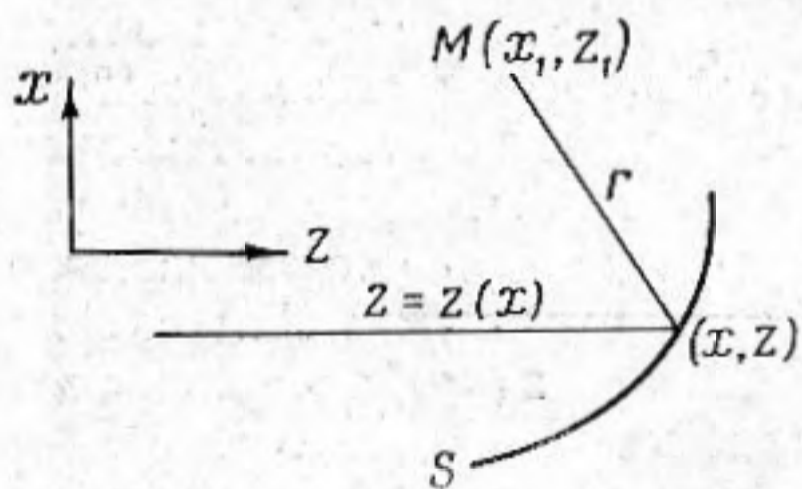
Разложим эту функцию в степенной ряд вблизи некоторой точки  $x_0$ , сохранив члены до третьего порядка включительно

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \dots$$

Если точка  $x_0$  выбрана таким образом, что  $f'(x_0) = 0$ , то мы имеем приближение обычного метода стационарной фазы. На каустике выполняются одновременно два условия

$$f'(x_0) = 0, \quad (9)$$

$$f''(x_0) = 0. \quad (10)$$



Фиг. 3

Исключая из этих уравнений  $x_0$ , так же как и в [8], можно найти уравнение каустики  $F(x_1, z_1) = 0$ . Значение  $x_0$  будет играть роль параметра, определяющего положение точки на каустике. Зададим на каустике точку, соответствующую параметру  $x_0$  и найдем распределение поля

вблизи каустики вдоль кривой, на которой выполняется условие (10). (Естественно, что на этой кривой во всех точках, за исключением точек пересечения ее с каустикой, условие (9) выполняться не будет). Вынося медленно изменяющиеся амплитудные множители при значении  $x_0$  за знак интеграла (8), получим

$$\Phi \approx -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2k}{\pi r_0}} \left[1 + \frac{\cos \alpha_2(x_0)}{\cos \alpha_1(x_0)}\right] A[\alpha_1(x_0)] e^{if(x_0)} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left[f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3\right]} dx, \quad (11)$$

где  $r_0 = \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (z(x_0)-z_1)^2}$ . Мнимая часть интеграла (11) в силу симметрии промежутка интегрирования равна нулю, а вещественная часть — есть интеграл Эйри.

Обозначив  $t = f'(x_0) \sqrt[3]{\frac{2}{f'''(x_0)}}$  и приняв приближенно  $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$  получим окончательно:

$$\Phi \approx - \sqrt{\frac{2k}{2_0}} A(\alpha) e^{i f(x_0)} \sqrt{\frac{2}{f'''(x_0)}} \cdot v(t), \quad (12)$$

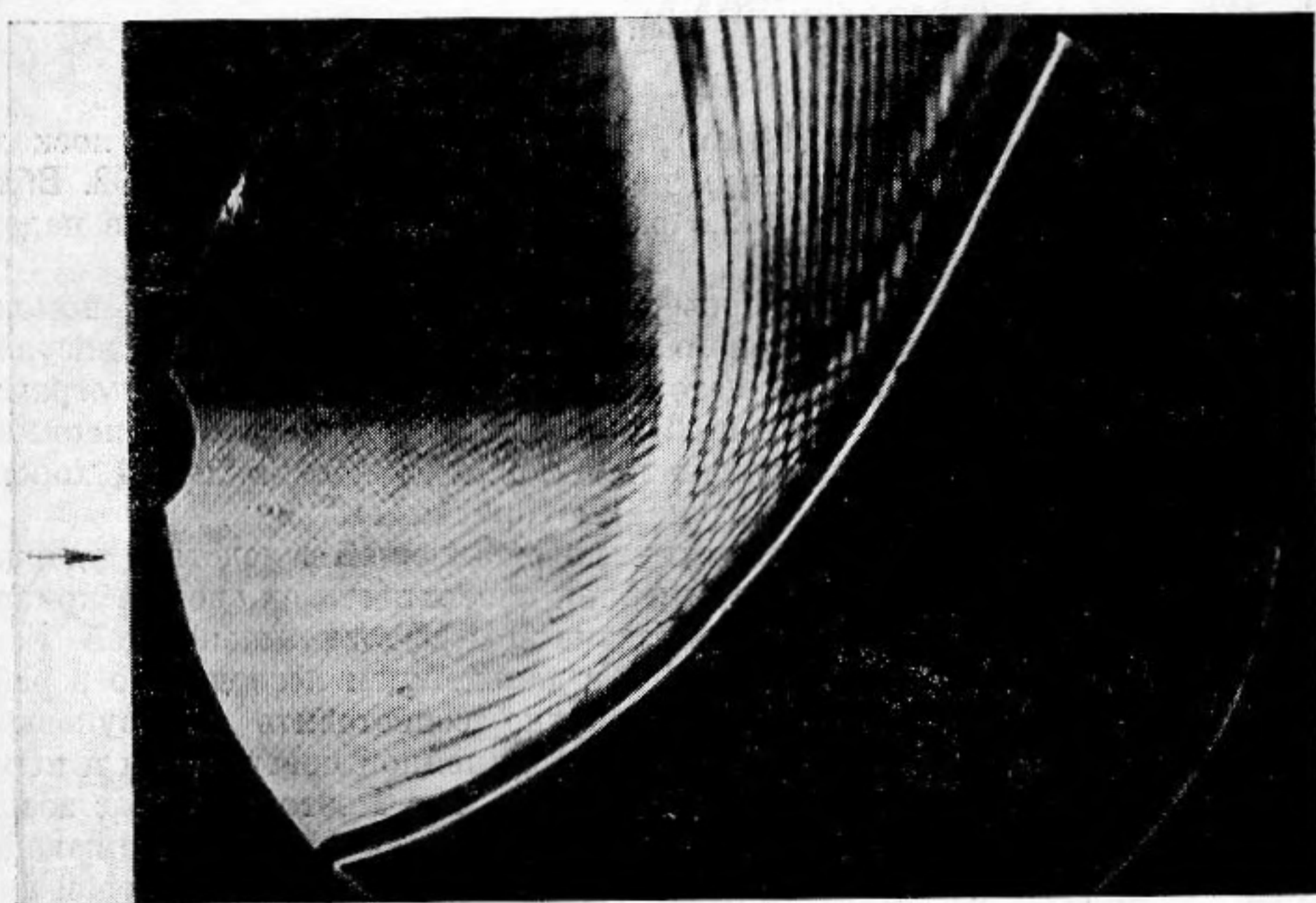
где производные фазовой функции определяются из следующих выражений

$$\frac{1}{k} f'(x_0) = Z'(x_0) + \frac{1}{r} [x_0 - x_1 + (Z(x_0) - Z_1) Z'(x_0)], \quad (13a)$$

$$\frac{1}{k} f''(x_0) = Z''(x_0) + \frac{1}{r^2} [Z(x_0) - Z_1 - (x_0 - x_1) Z'(x_0)]^2 \quad (13б)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} f'''(x_0) = Z'''(x_0) + \frac{1}{r^2} \left\{ -2(x_0 - x_1) Z''(x_0) [Z(x_0) - Z_1 - (x_0 - x_1) Z'(x_0)] - \right. \\ \left. - \frac{3}{r^2} [x_0 - x_1 + [Z(x_0) - Z_1] Z'(x_0)] [Z(x_0) - Z_1 - (x_0 - x_1) Z'(x_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (13в)$$

Таким образом, распределение поля вблизи каустики подчинено закону применения функции Эйри, а уравнение каустики можно найти исключив параметр  $x_0$  из (13а) и (13б), приравняв их нулю.

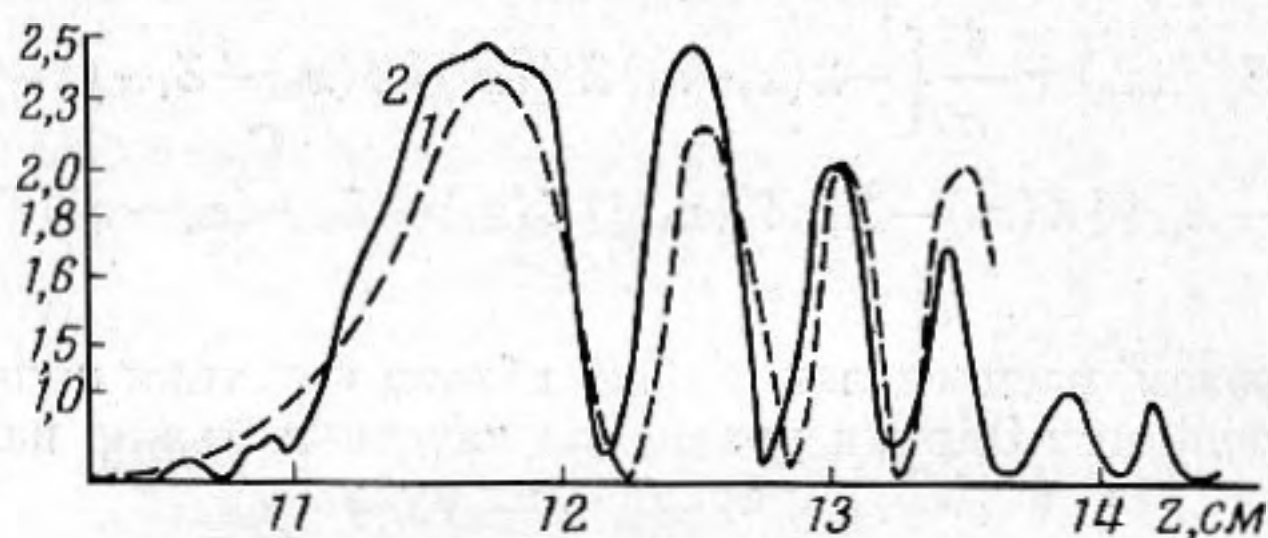


Фиг. 4

На фиг. 4 приведена фотография каустики, возникающей при отражении звука от оболочки, имеющей форму параболы  $z = 5 \sqrt{x}$  ( $f = 500$  кгц). Видны осцилляции поля, обусловленные интерференцией между отраженными лучами. Написать уравнение каустики в аналитическом виде в данном случае невозможно, поэтому применим следующий способ. Задавая параметр  $x_0$ , построим семейство лучей, соответствующих

уравнению  $f'(x_0) = 0$ , т. е. лучей, отраженных по законам геометрической оптики (сплошные линии на фиг. 2). Затем построим при различных  $x_0$  семейство кривых, на которых  $f''(x_0) = 0$  (штриховые линии на фиг. 2). Точки пересечения этих кривых с соответственными лучами будут являться точками каустики. Переходя с одной такой кривой на другую, т. е. изменяя одновременно  $x_0$  и  $z_1$ , можно получить распределение давления вдоль любых других линий.

На фиг. 5 приведено рассчитанное таким образом распределение давления для сечения  $x = 10,5$  см вдоль прямой  $AA'$  (фиг. 2, кривая 1). По вертикальной оси отложена амплитуда поля, отнесенная к амплитуде в падающей волне; по горизонтальной оси — значения  $z$ . Характер этого распределения определяется поведением функции Эйри при изменении аргумента  $t$ . На самой каустике  $f' = 0$ , справа от нее  $f' < 0$ , слева  $f' > 0$ . Поэтому справа от каустики поле осциллирует, а слева — быстро спадает. Максимальное значение амплитуды звукового давления наблюдается



Фиг. 5

не на самой каустике ( $z = 11,4$  см), а вблизи нее ( $z = 11,7$  см), поскольку функция Эйри имеет максимум не при  $t = 0$ , а при  $t = -1,02$ . Вблизи каустики амплитуда поля в 2,5 раза превышает амплитуду в падающей волне.

Результаты расчета были проверены экспериментально при помощи количественного фотометрического анализа звуковых полей, визуализируемых теньным оптическим методом. На фиг. 5 приведена фотограмма звукового поля каустики (кривая 2), из которой видно, что экспериментально найденные величины давления и положения осцилляций хорошо совпадают с теоретическими значениями (кривая 1).

Рассмотрим еще один тип каустики, возникающей вследствие удержания звуковых волн вблизи криволинейной поверхности за счет ее кривизны. Это явление, известное под названием эффекта «шепчущей галереи», впервые было объяснено в [2] и в дальнейшем исследовано в работе [9]. Волны «шепчущей галереи» можно сопоставить со звуковыми лучами, распространяющимися вдоль криволинейной поверхности и испытывающими последовательные отражения от нее. Поэтому форма возникающих при этом каустик звука будет определяться формой отражающей поверхности. Для примера на фиг. 6 приведена фотография круговой каустики в цилиндрической оболочке диаметром  $2a = 20$  см. Звук проходит через малое отверстие в оболочке (на снимке отверстие не видно) и падает на оболочку под углом скольжения  $\alpha = 20^\circ$ . Из геометрических соображений следует, что концентрация звукового поля происходит в поверхностном слое толщиной  $a(1 - \cos \alpha)$ . Для рассматриваемого примера звуковое поле сосредоточено в пограничном слое толщиной 0,5 см. Распределение амплитуды звукового давления вблизи каустики и в этом случае описывается функцией Эйри.

В заключение выражаем признательность Е. П. Смирнову за помощь при проведении эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. I. Makarov, S. N. Rshvkin. Untersuchungen der schallausbreitung in festen Körpern, Platten und schalen mittels eines optischen Verfahrens im Dunkel-feld. Proceedings 3rd Internat. Congress on Acoustics Sept. 1959.
2. Дж. Стретт (Лорд Рэлей). Теория звука т. II, М, ГТТИ, 1955.
3. Е. Л. Шендеров. Прохождение звука через упругую цилиндрическую оболочку. Акуст. ж., 1963, 9, 2, 220—230.
4. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
5. W. Franz. Theorie der Neugung elektromagnetischer Wellen. Berlin, 1957.
6. Е. А. Лиходаева, Е. Л. Шендеров. Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке. Акуст. ж., 1971, 17, 1, 79—84.
7. В. А. Фок. Таблицы функций Эйри. М., ГТТИ, 1946.
8. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, М, Изд. АН СССР, 1957.
9. Л. М. Бреховских. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы. Акуст. ж., 1967, 18, 4, 541—555.

Ленинград

Поступила в редакцию  
16 апреля 1971 г.