АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 4

УДК 534.231.2

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. Н. Алексеев, В. М. Фролов

На основе особого представления поля волны в среде, содержащей случайные неоднородности произвольного масштаба, выведены интегро-дифференциальные уравнения для статистических моментов поля любого порядка без наложения ограничений на величину флуктуаций поля. В частных случаях мелко- и крупномасштабных неоднородностей уравнения сводятся к дифференциальным. Даны оценки сделанных приближений.

Распространение волн в случайно-неоднородной среде часто описывается уравнением следующего вида:

$$\Delta p + k^2[1 + \varepsilon(\mathbf{r})]p = 0, \tag{1}$$

причем характеристика среды $\varepsilon(\mathbf{r})$ — случайная функция, и решение уравнения (1), как некий функционал от $\varepsilon(\mathbf{r})$, носит также случайный характер. Однако при изучении случайных волновых процессов на практике пользуются средними величинами. Обычно они получаются в результате усреднения решения $p(\mathbf{r})$ или его различных комбинаций. Так как написание общего решения уравнения (1) в квадратурах невозможно, то для нахождения решения приходится прибегать к различным приближенным методам. Главным недостатком такого подхода является то, что неизбежные ошибки, связанные с приближенностью методов, растут с расстоянием, проходимым волной. В области сильных флуктуаций параметров поля большинство приближений непригодно, что является результатом неучета или неверного учета многократного рассеяния.

Выходом из создавшегося положения могло бы служить составление и решение уравнений непосредственно для усредненных величин. В качестве примера можно привести хорошо известное уравнение для среднего поля и уравнение переноса излучения для интенсивности. Эти уравнения сами по себе могут носить приближенный характер, но многократное рассеяние они должны учитывать довольно хорошо. Недостатком такого подхода является то, что для каждой характеристики необходимо составлять свое уравнение, и решение его представляется не такой уж простой задачей, как может показаться на первый взгляд.

Ниже предлагается система уравнений для статистических моментов n порядка случайного поля. Хотя на практике используют в основном два момента, в некоторых случаях необходимо знать и более высокие моменты. Так, при изучении флуктуаций интенсивности волнового поля существенны моменты четвертого порядка.

Впервые уравнения для статистических моментов были предложены Татарским в работе [1]. Они были получены на основе параболического уравнения и при условии, что неоднородности среды дельта — коррелированы вдоль направления распространения волны. В работе Чернова [2], посвященной тому же вопросу, последнее ограничение было снято. При этом, однако, система уравнений приняла приближенный характер.

Нами произведено распространение результатов работ [1, 2] на случай произвольного соотношения между длиной волны и размером неоднородностей; при выводе уравнений для статистических моментов мы исходим из волнового уравнения в форме (1). Вывод системы уравнений тесно связан с локальным методом, предложенным в работе [2], и может считаться его обобщением на случай эллиптического уравнения.

В области, занятой неоднородностями, волновое поле $p(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (1). При этом предполагается, что среда слабонеоднородна, т. е. $\langle\varepsilon^2\rangle \ll 1$, а также $\langle\varepsilon\rangle = 0$. Статистическим моментом порядка n случайного поля $p(\mathbf{r})$ называется среднее значение следующей величины:

$$\langle M_{nl}\rangle = \langle M_{nl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n)\rangle = \left\langle \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} p(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu=l+1}^{\nu=l} p^*(\mathbf{r}_\nu) \right\rangle.$$

Чтобы получить уравнение для $\langle M_{ne}\rangle$, умножим обе части уравнения (1) на следующее произведение:

$$\prod_{\lambda=2}^{\lambda=l} p(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} p^*(\mathbf{r}_\nu),$$

а затем полученное выражение усредним:

$$\Delta_{\mathbf{r}_1}\langle M_{ne}\rangle + k^2\langle M_{ne}\rangle + k^2\langle\varepsilon(\mathbf{r}_1) M_{ne}\rangle = 0. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (1) мы рассматриваем в точке $\mathbf{r}_1$ и оператор $\Delta_{\mathbf{r}_1}$ действует только на эту переменную. Именно поэтому сомножители вида $p(\mathbf{r}_2) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)$ можно было внести под знак лапласиана. Главная трудность в написании замкнутого уравнения для момента $\langle M_{ne}\rangle$ состоит теперь в установлении связи между $\langle\varepsilon M_{ne}\rangle$ и $\langle M_{ne}\rangle$.

При установлении этой связи мы исходим из того, что волновое поле в любой точке определяется, в основном, неоднородностями, которые лежат внутри сферы с центром в данной точке и радиусом порядка длины экстинкции [3]. При условии малости рассеяния на длине неоднородности можно воспользоваться теорией возмущения и выделить из полного поля небольшую его часть, которая будет коррелировать с неоднородностью в рассматриваемой точке. Именно таким образом удается провести эффективное усреднение выражения $\langle\varepsilon M_{ne}\rangle$. Следуя этому замечанию, перепишем уравнение (1) в интегральном виде:

$$p(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) - k^2 \int_V d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \varepsilon(\mathbf{r}')\, p(\mathbf{r}'). \tag{3}$$

Здесь $p_0(\mathbf{r})$ — поле в отсутствии неоднородностей, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — невозмущенная функция Грина уравнения Гельмгольца, а V — объем, занятый неоднородностями.

Выделим теперь около точки $\mathbf{r}_1$ сферическую область V_1 с радиусом, удовлетворяющим условию $a \ll R_1 \ll \frac{1}{\alpha}$ и центром в точке $\mathbf{r}_1$. Здесь a — размер неоднородностей, а $\frac{1}{\alpha}$ — длина экстинкции, т. е. то расстояние, на котором еще существенно однократное рассеяние и можно пользоваться обычной теорией возмущений. После этого разобьем область интегрирования на две части $V - V_1$ и V_1 и представим полное поле в виде двух слагаемых:

$$p(\mathbf{r}) = \tilde{p}(\mathbf{r}) + \delta p(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Поле $\tilde{p}(\mathbf{r})$ * подчиним следующему условию:

$$\tilde{p}(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) - k^2 \int\limits_{V-V_1} d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}') \tilde{p}(\mathbf{r}'). \tag{5}$$

В отличие от уравнения (3) интегрирование в правой части (5) осуществляется по всей области за исключением сферического объема V_1. Это означает, что $\tilde{p}(\mathbf{r})$ равнялось бы $p(\mathbf{r})$, если бы внутри V_1 не содержалось неоднородностей. Введенное таким образом поле $\tilde{p}(\mathbf{r})$ оказывается независящим от значения ε в точке $\mathbf{r}_1$, а при достаточно большом радиусе сферы $V_1 (R_1 \gg a)$ можно пренебречь корреляцией $\varepsilon(\mathbf{r}_1)$ и $\tilde{p}(\mathbf{r}')$. С другой стороны, если взять объем V_1 и не с слишком большим $\left(R_1 \ll \frac{1}{\alpha}\right)$, то добавка $\delta p(\mathbf{r})$ в выражении (4) будет невелика, а полное поле $p(\mathbf{r})$ будет мало отличаться от $\tilde{p}(\mathbf{r})$.

Рассмотрим теперь уравнение, которому удовлетворяет поле $\delta p(\mathbf{r})$. Используя определения (4), (5) и уравнение (3), найдем, что δp подчиняется следующему уравнению:

$$\delta p(\mathbf{r}) = -k^2 \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}') \tilde{p}(\mathbf{r}') - k^2 \int\limits_{V_1} d\mathbf{r} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}') \delta p(\mathbf{r}'). \tag{6}$$

Первый член в правой части уравнения (6) представляет собой источник волн, которые «возбуждаются» полем $\tilde{p}$ и которые по величине пропорциональны «силе» неоднородностей внутри сферы V_1. Второй член в правой части (6) отражает тот факт, что источник действует в неоднородной среде.

Выражение (6) можно написать в более компактной форме:

$$\delta p(\mathbf{r}) = -k^2 \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon(\mathbf{r}') \tilde{p}(\mathbf{r}'). \tag{7}$$

Здесь $G(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}')$ — точная функция Грина уравнения (1). Она удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \int\limits_{V} d\mathbf{r}'' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \varepsilon(\mathbf{r}'') G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}').$$

Действительно, умножив обе части этого уравнения на $\varepsilon(\mathbf{r}') \tilde{p}(\mathbf{r}')$ и проинтегрировав по $\mathbf{r}_1$ по объему сферы V_1, получим с учетом формулы (7) исходное уравнение (6).

Из формул (6) и (7) видно, что добавочное поле $\delta p(\mathbf{r})$ определяется в отличие от $\tilde{p}$ неоднородностями, лежащими как вне объема V_1, так и внутри него. При не слишком большом радиусе сферы $\left(R_1 \ll \frac{1}{\alpha}\right)$ рассеянное поле $\delta p(\mathbf{r})$ оказывается пропорциональным объему сферы V_1 и может быть сделано заведомо много меньше $\tilde{p}(\mathbf{r})$. Для расчета рассеянного поля $\delta p(\mathbf{r})$ по формуле (7) необходимо знать точное значение функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$; однако в большинстве случаев оно неизвестно, известно лишь среднее значение $\langle C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$. На расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \frac{1}{\alpha}$ флуктуационной частью функции Грина можно пренебречь, и тогда формулу (7)

---

* Хотя мы и пишем $\tilde{p}(\mathbf{r})$, надо помнить, что на самом деле это поле зависит и от $\mathbf{r}_1$, т. е. от выбора центра сферы V_1 и $\tilde{p}(\mathbf{r}) = \tilde{p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$. Это замечание относится и к $\delta p(\mathbf{r}) = \delta p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$.

можно переписать в виде:

$$\delta p(\mathbf{r}) = -k^2 \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}' \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle \varepsilon(\mathbf{r}') \tilde{p}(\mathbf{r}'); \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \ll \frac{1}{\alpha}. \tag{8}$$

В области значений $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \gtrsim \frac{1}{\alpha}$ формула (8) оказывается несправедливой, но это обстоятельство не имеет существенного значения. Корреляционные функции и статистические моменты, рассчитываемые с помощью формулы (8), уже на расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \sim \max(a, \lambda, ka^2) \ll \frac{1}{\alpha}$ быстро стремятся к нулю.

После всех этих предварительных замечаний можно окончательно переходить к расчету $\langle \varepsilon M_{ne} \rangle$. Используя представление поля в виде (4) и (8), напишем подробно выражение

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) M_{nl} \rangle = \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) [\tilde{p}(\mathbf{r}_1) + \delta p(\mathbf{r}_1)] [\tilde{p}(\mathbf{r}_2) + \delta p(\mathbf{r}_2)] \ldots [\tilde{p}^*(\mathbf{r}_n) + \delta p^*(\mathbf{r}_n)] \rangle \simeq$$

$$\simeq \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \tilde{p}(\mathbf{r}_1) \tilde{p}(\mathbf{r}_2) \ldots \tilde{p}^*(\mathbf{r}_n) \rangle + \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=l} \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \delta p(\mathbf{r}_{\lambda'}) \prod_{\lambda \neq \lambda'} \tilde{p}(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} \tilde{p}(\mathbf{r}_\nu) \rangle +$$

$$+ \sum_{\nu'=l+1}^{\nu'=n} \left\langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \delta p^*(\mathbf{r}_{\nu'}) \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} \tilde{p}(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu \neq \nu'} \tilde{p}^*(\mathbf{r}_\nu) \right\rangle \simeq$$

$$\simeq -k_2 \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=l} \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}' \langle G(\mathbf{r}_{\lambda'}, \mathbf{r}') \rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \varepsilon(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \tilde{p}(\mathbf{r}') \prod_{\lambda \neq \lambda'} \tilde{p}(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} \tilde{p}^*(\mathbf{r}_\nu) \right\rangle -$$

$$- k^2 \sum_{\nu'=l+1}^{\nu'=n} \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}' \langle G^*(\mathbf{r}_{\nu'}, \mathbf{r}') \rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \varepsilon(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \tilde{p}^*(\mathbf{r}') \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} \tilde{p}(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu \neq \nu'} \tilde{p}^*(\mathbf{r}_\nu) \right\rangle. \tag{9}$$

Здесь сохранены члены не выше первого порядка малости по δp и принято во внимание, что $\tilde{p}(\mathbf{r})$ статистически не связано с неоднородностями внутри сферы V_1 и, в частности, с $\varepsilon(\mathbf{r}_1)$. Вводя обозначение для корреляционной функции среды $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = \langle \varepsilon^2 \rangle N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) \varepsilon(\mathbf{r}') \rangle$ и приняв во внимание, что $\langle \tilde{p}(\mathbf{r}_1) \tilde{p}(\mathbf{r}_2) \ldots \tilde{p}^*(\mathbf{r}_n) \rangle \simeq \langle M_{ne} \rangle$, перепишем формулу (9) в следующем виде:

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}_1) M_{nl} \rangle = -k^2 \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=l} \int d\mathbf{r}' \langle G(\mathbf{r}_{\lambda'}, \mathbf{r}') \rangle B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \langle M_{nl}(\mathbf{r}') \rangle -$$

$$- k^2 \sum_{\nu'=l+1}^{\nu'=n} \int d\mathbf{r}' \langle G^*(\mathbf{r}_{\nu'}, \mathbf{r}) \rangle B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \langle M_{nl}(\mathbf{r}') \rangle. \tag{10}$$

Подставляя теперь выражение (10) в формулу (2), получаем окончательное уравнение для статистического момента порядка n:

$$(\Delta_{\mathbf{r}_1} + k^2) \langle M_{nl} \rangle = k^4 \sum_{\lambda'=1}^{\lambda'=l} \int d\mathbf{r}' \langle G(\mathbf{r}_{\lambda'}, \mathbf{r}') \rangle B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \langle M_{nl}(\mathbf{r}') \rangle +$$

$$+ k^4 \sum_{\nu'=l+1}^{\nu'=n} \int d\mathbf{r}' \langle G^*(\mathbf{r}_{\nu'}, \mathbf{r}') \rangle B(r_1, \mathbf{r}') \langle M_{nl}(\mathbf{r}') \rangle. \tag{11}$$

По существу уравнение (11) надо рассматривать как систему уравнений для нахождения $\langle M_{ne} \rangle$ как функции n переменных. Однако практически

можно ограничиться рассмотрением одного уравнения, накладывая при этом на искомое решение условие эрмитовой сопряженности по каждой паре переставляемых координат:

$$\langle M_{ne}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n)\rangle = \langle M_{ne}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)\rangle = \ldots$$

$$\ldots = \langle M_{ne}^*(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_1)\rangle.$$

При выводе уравнения (11) был сделан ряд допущений. Так, например, было сделано существенное предположение, что добавочное поле $|\delta p| \ll |\tilde{p}|$. Это предположение давало возможность пренебречь членами второго порядка малости по δp в выражении (11) и замкнуть уравнения.

Рассмотрим средний квадрат модуля $\langle \delta p(\mathbf{r}) \delta p^*(\mathbf{r})\rangle$. Исходя из формулы (8), получим

$$\langle |\delta p(\mathbf{r})|^2\rangle = k^4 \int\limits_{V_1}\int\limits_{V_1} d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{r}_\beta \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\alpha)\rangle \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\beta)\rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_\alpha)\varepsilon(\mathbf{r}_\beta)\tilde{p}(\mathbf{r}_\alpha)\tilde{p}(\mathbf{r}_\beta)\rangle. \tag{12}$$

Поскольку средняя функция Грина $\langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\alpha)\rangle$ падает с увеличением расстояния, то выражение (12) также уменьшается по мере удаления точки наблюдения от выбранного объема. В большинстве случаев выражение (12) достигает максимального значения в центре сферы, и поэтому достаточно ограничиться рассмотрением неравенства $|\delta p| \ll |\tilde{p}|$ в точке $\mathbf{r}_1$. Так как в силу определения $\tilde{p}(\mathbf{r})$ не коррелирует с неоднородностями, лежащими внутри объема V_1, то статистическую связь в подынтегральном выражении (12) можно разорвать и перезаписать формулу (12) в следующем виде:

$$\langle |\delta p(\mathbf{r}_1)|^2\rangle = k^4 \int\limits_{V_1}\int\limits_{V_1} d\mathbf{r}_\alpha\, d\mathbf{r}_\beta \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\alpha)\rangle \langle G^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\beta)\rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_\alpha)\varepsilon(\mathbf{r}_\beta)\rangle \langle \tilde{p}(\mathbf{r}_\alpha)\tilde{p}(\mathbf{r}_\beta)\rangle. \tag{13}$$

Разумеется, мы здесь совершаем ошибку, пренебрегая статистической связью между полем $\tilde{p}(\mathbf{r})$ и неоднородностями, лежащими внутри сферического слоя с радиусом R_1 и толщиной порядка a. Однако ошибка такого рода пропорциональна отношению объема указанного слоя по всему объему интегрирования $\dfrac{4\pi R_1^2 a}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \dfrac{3a}{R_1}$, и при выборе радиуса сферы $R_1 \gg a$ ошибка мала.

Заметим далее, что волновое поле $\tilde{p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ внутри объема V_1 удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и может быть представлено в виде набора плоских волн, т. е.

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int d\Omega_{\vec{\mathbf{n}}} \tilde{p}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)\, e^{ik\mathbf{n}\mathbf{r}}. \tag{14}$$

Интегрирование здесь ведется по области действительных углов. Однако заметим, что при условии существования неоднородных волн возможен выход в область комплексных углов.

Подставив выражение (14) в формулу (13) и приняв во внимание, что случайные части полей $\tilde{p}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)$ различных направлений не коррелируют друг с другом, получим

$$\langle |\delta p(\mathbf{r}_1)|^2\rangle \simeq 2\alpha R_1 \langle |\tilde{p}(\mathbf{r}_1)|^2\rangle, \tag{15}$$

где коэффициент рассеяния

$$\alpha = \frac{\langle \varepsilon^2\rangle k^2}{4} \int\limits_0^\infty dr N(r)(1 - \cos 2kr). \tag{16}$$

При ограничении радиуса сферы сверху $R_1 \ll \frac{1}{\alpha}$ отношение $\frac{\langle|\delta p|^2\rangle}{\langle|\tilde{p}|^2\rangle} \ll 1$,

и в выражении (9) членами второго порядка малости по δp можно действительно пренебречь. Нетрудно показать, что при учете этих членов в выражении (9) появляются дополнительные слагаемые типа:

$$k^4 \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}' \langle G(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}')\rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}_1)\varepsilon(\mathbf{r}')\rangle \langle \delta p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle. \tag{17}$$

В отличие от формулы (9) в подынтегральном выражении (17) фигурируют величины $\langle \delta p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle$ вместо $\langle p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle$. В силу того, что $\langle|\delta p|^2\rangle \ll \langle|\tilde{p}|^2\rangle$, можно надеяться, что указанные величины имеют разный порядок малости и дополнительными членами (17) в уравнении (11) можно пренебречь. Действительно, рассмотрим выражение:

$$\langle \delta p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p(\mathbf{r}_n)\rangle \simeq -k^2 \int\limits_{V_1} d\mathbf{r}'' \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\rangle \langle \varepsilon(\mathbf{r}'') \tilde{p}(\mathbf{r}'') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle.$$

Заново повторив процедуру усреднения и выразив $\langle \varepsilon p \ldots p^*\rangle$ через статистический момент n порядка, получим

$$\langle \delta p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle \simeq$$

$$\simeq k^4 \int\limits_{V_1}\int d\mathbf{r}_\alpha\, d\mathbf{r}_\beta \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\alpha)\rangle \langle G(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)\rangle B(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) p(\mathbf{r}_\beta) \langle p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle +$$

$$+ k^4 \sum_{j \neq i}^{n} \int\limits_{V_1}\int d\mathbf{r}_\alpha\, d\mathbf{r} \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_\alpha)\rangle \langle G(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_\beta)\rangle B(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \langle p(\mathbf{r}_\beta) p(\mathbf{r}_\alpha) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle. \tag{18}$$

Подставив сюда выражение для полей в формуле (14) и приняв во внимание, что первый член правой части формулы (18) не меньше каждого из последующих слагаемых, после несложного интегрирования найдем:

$$\langle \delta p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle \lesssim f \cdot \langle p(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}_1) \ldots p^*(\mathbf{r}_n)\rangle,$$

где
$$f = nR_1 \frac{1 + 2ikB_1 - e^{2ikR_1}}{2ikR_1} \cdot \frac{\langle \varepsilon^2\rangle k^2}{4} \int\limits_0^\infty dr N(r) (e^{2ikr} - 1). \tag{19}$$

Поскольку во всех случаях $\left| \frac{1 + 2ikR_1 - e^{2ikR_1}}{2ikR_1} \right| \leqslant 2$, а интеграл, стоящий в правой части выражения (19) есть не что иное, как разность волновых чисел $k_{\text{эфф}} - k$, условие справедливости уравнения (11) принимает вид

$$2naR_1 \ll 1. \tag{20}$$

Здесь a — коэффициент рассеяния (16), а n — порядок статистического момента. Для крупномасштабных неоднородностей ($ka \gg 1$) условие (20) можно записать в форме малости рассеяния на длине неоднородности: $2n\alpha a \ll 1$.

Для случая мелкомасштабных неоднородностей ($ka \ll 1$) условие (20) также необходимо, но оно уже недостаточно. Действительно, при оценке дополнительных членов в выражении (17) мы пользовались формулой (18). Однако область применимости этой формулы ограничена возможностью пренебрежения флуктуационной частью функции Грина. Дополнительный анализ возможности этого пренебрежения требует малости рассеяния не только на длине неоднородности, но также и на длине волны (при $ka \ll 1$).

В предельных случаях ($ka \ll 1$, $ka \gg 1$) система интегро-дифференциальных уравнений (11) сильно упрощается. Так при наличии в среде мелкомасштабных неоднородностей корреляционную функцию можно представить в виде δ-функции. Тогда интегралы в правой части уравнения (11) легко берутся, и система приобретает вид обычных дифференциальных уравнений. В практически более важном случае $ka \gg 1$ уравнение (11) также упрощается. Полагая, что распространение происходит вдоль направления x и статистические моменты определены как среднее от произведения волновых амплитуд, получаем, что момент $\langle M_{nl} \rangle$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta_{\perp \mathbf{r}_1}\right)\langle M_{nl}\rangle + 2ik\alpha\left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l}\delta(r_{\lambda 1}) - \sum_{\nu=l+1}^{\nu=n}\delta(\mathbf{r}_{\nu 1})\right]\langle M_{nl}\rangle = 0. \tag{21}$$

Здесь

$$\langle M_{nl}\rangle = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=l} A(\mathbf{r}_\lambda) \prod_{\nu=l+1}^{\nu=n} A^*(\mathbf{r}_\nu); \quad p(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ikx},$$

$$\alpha = \frac{k^2\langle\varepsilon^2\rangle}{4}\int_0^\infty d\xi N(\xi, 0, 0);$$

$$\delta(r_{\lambda 1}) = \frac{\int_0^\infty d\xi\, e^{-\alpha\xi} N[\xi - (x_\lambda - x_1), (y_\lambda - y_1)(z_\lambda - z_1)]}{\int_0^\infty d\xi N(\xi, 0, 0)}.$$

Когда n точек лежат в одной плоскости $x_1 = \text{const}$, уравнение (21) для поперечного статистического момента совпадает с системой аналогичных уравнений работы Чернова [2].

В заключение заметим, что при выводе уравнения (11) существенно использовалась трехмерность пространства, и перенос полученного здесь результата на одномерный случай незаконен. В одномерном случае флуктуационной добавкой к функции Грина нельзя пренебречь (даже на малых расстояниях), и формула (8) оказывается несправедливой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский. Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса. ЖЭТФ, 1969, 56, 6, 2106—2117.
2. Л. А. Чернов. Уравнения для статистических моментов поля в случайно неоднородной среде. Акуст. ж., 1969, 15, 4, 594—603.
3. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров. Распространение волн в средах со случайными неоднородностями. Тр. Акустического ин-та, 1968, 4, 27—44.

Акустический ин-т, АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
15 июля 1971 г.