АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 4

УДК 534.29

МЕХАНИЗМ ФЛОТАЦИОННОГО ДЕЙСТВИЯ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ

А. В. Ильин, В. П. Кузнецов, Б. Г. Новицкий, В. М. Фридман

В работе теоретически обоснован процесс флотации пульсирующим кавитационным пузырьком твердых частиц, взвешенных в жидкости.

Показано, что сила, действующая на частицу в окрестности пузырька с известным законом движения стенок, зависит от соотношения двух параметров: a — характерного размера частиц и r — расстояния этой частицы от центра пузырька.

Уравнение движения частицы интегрируется методом Капицы — ван дер Поля.

Показано, что движение частицы в окрестности пульсирующего пузырька эквивалентно движению в некотором поле с $V_{эфф} = \frac{A}{X^4} - \frac{B}{X^6}$; $A, B > 0$.

Получены выражения для «эффективного радиуса захвата» и «эффективного потенциального барьера».

Показано, что пульсирующий кавитационный пузырек «захватывает» крупные частицы на больших расстояниях, нежели мелкие, причем «захват» крупных частиц происходит легче, т. е. «эффективный потенциальный барьер» для них меньше, т. е. помимо флотации происходит и «сепарация» частиц по их размерам.

Сделан расчет потенциальных кривых $V_{эфф}$. Выводы предложенной теории достаточно удовлетворительно совпадают с имеющимся экспериментальным материалом.

Экспериментально известно флотационное действие колеблющихся газовых пузырьков при акустической кавитации [1—3]. Ниже предпринята попытка объяснить этот эффект теоретически. Некоторые выводы этой теории проверены на имеющемся экспериментальном материале.

Рассмотрим уединенный долгоживущий кавитационный пузырек сферической формы; в дальнейшем будет приведена оценка условий, при которых пузырек для рассматриваемого эффекта можно считать уединенным. Известно (см., например, работы [4—5]), что время роста пульсирующего пузырька в несколько раз (5—6) больше времени сжатия. Пусть $R(t)$ — закон движения стенок пузырька во времени. В диапазоне частот 10^4—10^5 и размерах пузырька 10^{-2} *см* воду можно считать несжимаемой жидкостью. Действительно, в этом случае должны быть выполнены одновременно условия [6]: $v \ll c$, $\tau \gg \frac{l}{c}$, где v, τ, l — соответственно характерные скорость, время и расстояние, на котором характерная скорость существенно изменяется. В нашей задаче l порядка размеров пузырька, τ порядка периода колебаний пузырька, поэтому $v \sim \frac{l}{\tau}$, и оба эти условия эквивалентны и выполнены с запасом. Для нахождения поля скоростей $v_r(r, t)$, создаваемого этим пузырьком в жидкости, воспользуемся уравнением непрерывности в сферических координатах с началом отсчета в центре пузырька (считая жидкость несжимаемой и используя симметрию задачи):

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_r = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 v_r) = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию $v_r(r, t)|_{r=R(t)} = \dot{R}(t)$, имеет вид

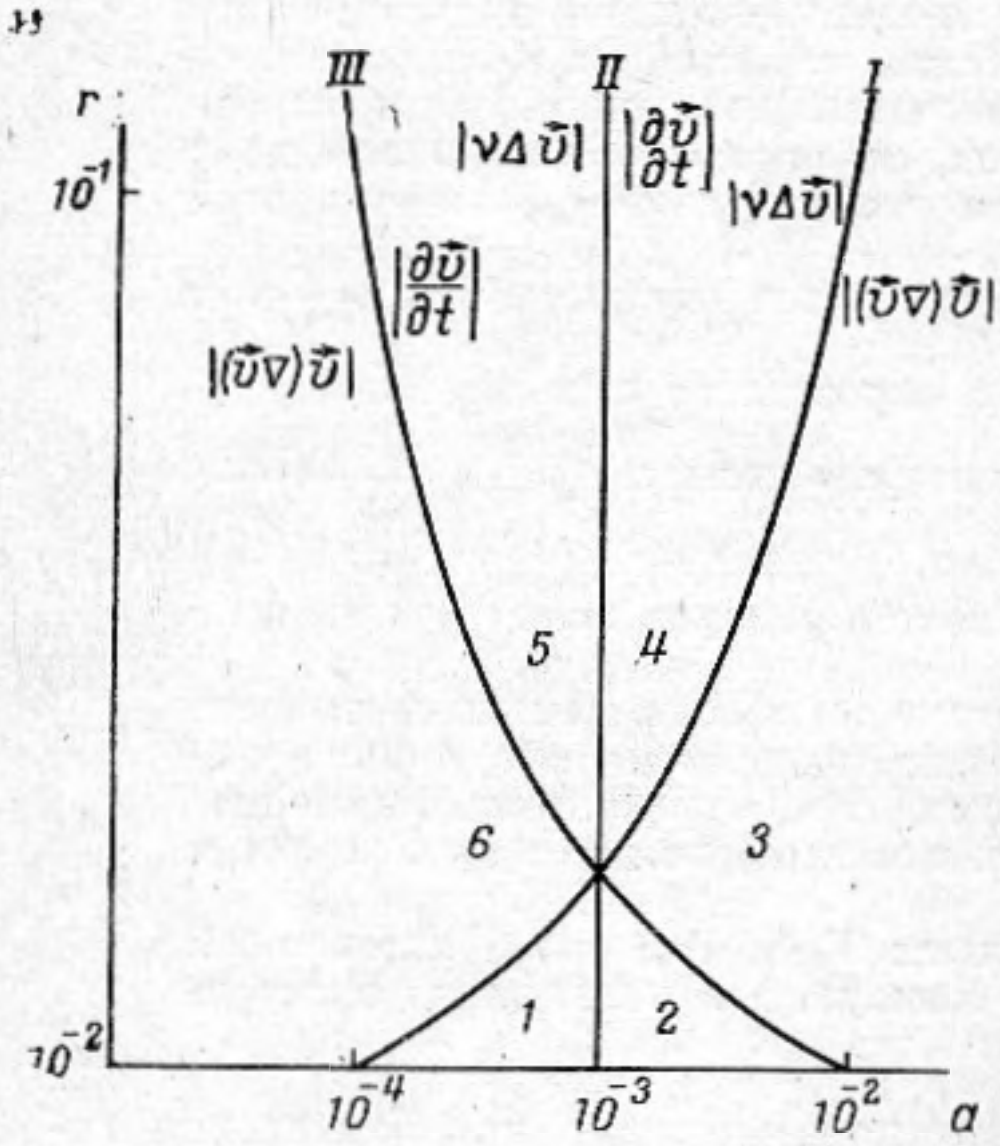
$$v_r(r,t) = \frac{R^2(t)\dot{R}(t)}{r^2}. \tag{2}$$

Для удобства введем обозначение

$$f(t) = R^2\dot{R}; \qquad v_r(r,t) = \frac{f(t)}{r^2}, \tag{3}$$

где $f(t)$ — периодическая функция.

Чтобы проанализировать влияние пульсирующего пузырька на твердую частицу, взвешенную в жидкости, будем считать, что частица имеет шарообразную форму. Будучи помещенной в окрестности пузырька, она, естественно, искажает поле скоростей (2), и это искажение самым непосредственным образом связано с характером сил, действующих на нее (исключая, конечно, влияние частицы на закон движения стенок пузырька). Так как движение частицы полностью определяется силами, действующими на нее, то на этом вопросе следует, по-видимому, остановиться более подробно.



Фиг. 1

Движение жидкости в окрестности частицы определяется уравнением Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_ж}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{4}$$

Если составить по порядку величин отношения различных членов уравнения (4), то нетрудно видеть, что они будут зависеть от характерных размеров частицы a, расстояния r этой частицы от центра пузырька, среднего характерного размера R и периода T кавитационного пузырька.

В постановке нашей задачи две последние величины есть просто некоторые постоянные; поэтому соотношения различных членов уравнения (4), а следовательно, и силы существенно зависят только от a и r. На фиг. 1 представлена диаграмма, осями которой являются a и r; кривая I — это линия, где $|\nu\Delta\mathbf{v}| \sim |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|$ (т. е. число Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 1$, кривая II — где $|\nu\Delta\mathbf{v}| \sim \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|$ и кривая III — где $|(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| \sim \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|$. По разные стороны кривых написаны соответственно превалирующие члены.

Анализ диаграммы показывает, что плоскость чисел (a, r) разбивается на 6 различных областей, определяемых неравенствами

$$\begin{aligned}
&1.\ |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| > |\nu\Delta\mathbf{v}| > \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|; && 4.\ \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right| > |\nu\Delta\mathbf{v}| > |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|;\\
&2.\ |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| > \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right| > |\nu\Delta\mathbf{v}|; && 5.\ |\nu\Delta\mathbf{v}| > \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right| > |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|;\\
&3.\ \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right| > |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| > |\nu\Delta\mathbf{v}|; && 6.\ |\nu\Delta\mathbf{v}| > |(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}| > \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для усиления неравенств (5) (в смысле много больше) мы должны «уходить» вглубь областей. В областях 5—6 самым большим членом уравнения (4) является $\nu\Delta\mathbf{v}$. Поэтому здесь, чтобы усилить первые неравенства в указанном смысле, мы должны «отойти» вглубь от кривых *I* и *II*. Тогда движение можно рассматривать в каждый данный момент как стационарное, а «это значит, что движение жидкости в каждый данный момент такое же, каким оно было бы при равномерном движении тела со скоростью, которой оно в действительности обладает в данный момент» [6]. Поэтому можно утверждать, что в указанной области сила сопротивления, испытываемого частицей, определяется формулой Стокса с поправкой Оссеена:

$$F_{\text{сопр}} = 6\pi\eta a U\left(1+\frac{3}{8}\frac{aU}{\nu}\right); \tag{6}$$

здесь U — относительная скорость; a — радиус частицы, η — динамическая вязкость.

При переходе из области 5 в область 4 в уравнении (4) бо́льшим становится член $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ и становится существенной нестационарность движения. Однако если мы остаемся достаточно далеко от кривой *I*, то известно выражение для силы сопротивления шара [6]:

$$F_{\text{сопр}} = 2\pi\rho_{\text{ж}}a^3\left\{\frac{1}{3}\frac{dU}{dt}+3\frac{\nu}{a^2}\cdot U+3\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\frac{dU}{d\tau}d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right\}. \tag{7}$$

Отметим, что эта сила линейна по скорости.

При переходе из областей 6 и 4 соответственно в области 1 и 3 через кривую *I* возрастает роль члена $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ и поэтому роль силы, квадратичной по скорости. И хотя ясно, что в областях 1—3 сила в основном квадратична по скорости, тем не менее аналитического выражения для силы нет. Поэтому для оценки напишем силу в виде

$$F_{\text{сопр}} = kU^2 \tag{8}$$

с эмпирическим значением k. (Это выражение пригодно в большей степени к областям 1 и 2, нежели к области 3.)

Проанализируем движение частицы в области 5. Уравнение движения частицы в этом случае может быть представлено в виде

$$\left(m+\frac{1}{2}m_{\text{ж}}\right)\ddot{r} = 6\pi\eta a(v_{\text{т}}-\dot{r})+$$
$$+\frac{9}{2}\rho_{\text{ж}}\frac{S}{2}(v_{\text{т}}-\dot{r})\,|v_{\text{т}}-\dot{r}|, \tag{9}$$

где m — масса частицы, $m_{\text{ж}}$ — масса жидкости в объеме частицы, S — поперечное сечение частицы, ρ, $\rho_{\text{ж}}$ — плотности частицы и жидкости соответственно.

Уравнение (9) удобно представить в форме

$$\ddot{r} = \alpha'(v_{\text{т}}-\dot{r})+\beta(v_{\text{т}}-\dot{r})\,|v_{\text{т}}-\dot{r}|, \tag{9a}$$

где

$$\alpha' = \frac{6\pi\eta a}{m+\frac{1}{2}m_{\text{ж}}}, \quad \beta' = \frac{\frac{9}{4}\rho_{\text{ж}}S}{m+\frac{1}{2}m_{\text{ж}}}.$$

Введем обозначение $z = v_{\text{т}}-\dot{r}$. Сила в правой части уравнения (9а) $F'(z) = \alpha' z+\beta' z|z|$ содержит неудобный для дальнейшего анализа член $\beta' z|z|$. Отметим, что $F'(z)$ — нечетная функция, поэтому проведем удоб-

ную аппроксимацию:

$$F'(z) \simeq F''(z) = \alpha'' z + \beta'' z^3 \tag{3}$$

на некотором интервале $(-z_0, z_0)$ в смысле наименьших квадратичных флуктуаций, т. е. чтобы

$$I(\alpha', \beta') = \int_{-z_0}^{z_0} |\alpha' z + \beta' z|z| - \alpha'' z - \beta'' z^3|^2 dz$$

был наименьшим. В уравнении (9) силы радиационного давления не учитываются, так как они для данных условий малы. Несложные вычисления дают:

$$\alpha'' = \alpha' + 0{,}3\beta' z_0,$$
$$\beta'' = \frac{3}{4}\frac{\beta'}{z_0}. \tag{11}$$

Относительная скорость $z = v_r - \dot{r}$ в данной точке изменяется по модулю в пределах от нуля до $2|v_r|$ (с учетом неблагоприятного сдвига фаз между v_r и $\dot{r}$). Поэтому в качестве z_0 надо взять

$$z_0 = 2|v_r|_{\max}, \tag{11а}$$

или, по порядку величины:

$$z_0 \sim \left|\frac{R^2\dot{R}}{r^2}\right| \sim \frac{R^3}{Tr^2}. \tag{11в}$$

После проведенной аппроксимации уравнение (9а) принимает вид

$$\ddot{r} = \alpha''(v_r - \dot{r}) + \beta''(v_r - \dot{r})^3, \tag{9в}$$

где α'' и β'' зависят от r (11 и 11в).

Перейдем в уравнении (9в) к безразмерным переменным, для которых сохраним прежние обозначения:

$$\ddot{r} = \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)(v_r - \dot{r}) + \beta r^2 (v_r - \dot{r})^3, \tag{12}$$

где безразмерные время, длина и скорость измеряются соответственно в единицах $\frac{1}{\alpha'}$, $\frac{1}{\beta'}$ и $\frac{\alpha'}{\beta'}$ и где

$$\alpha \sim 0{,}3\frac{R^3}{T} \text{ и } \beta \sim \frac{3}{4}\frac{T}{R^3}$$

(здесь R и T также в безразмерных единицах).

Для нахождения решения уравнения (12) используем метод Капицы (Ван дер Поля) [7]. Правомерность применимости этого метода лучше показать на уравнении (9). Действительно, без поправки Оссеена и учета радиальности поля v_r (3) среднее отклонение частицы от первоначального положения за период колебаний пузырька равно нулю, на что было указано в работе (3). Учет радиальности поля дает для силы Стокса среднее малое отклонение от центра пузырька, и в связи с этим мы вправе ввести квадратичную по скорости малую поправку Оссеена, дающую среднее отклонение, направленное к центру пузырька. Покажем это. Без учета радиальности $m\ddot{r} \sim kv$, где v — средняя скорость v_r в данной точке. За время расширения и сжатия пузырька τ_1 и τ_2

$$\Delta p_1 = m\Delta v_1 \sim kv_1\tau_1,$$
$$\Delta p_2 = m\Delta v_2 \sim kv_2\tau_2.$$

Составим отношение $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} \sim \frac{v_1\tau_1}{v_2\tau_2}$. Так как $\frac{v_1}{v_2} \sim \frac{\tau_2}{\tau_1}$, то $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} \sim 1$ (т. е. частица в среднем остается в покое).

Средняя скорость v обратно пропорциональна r^2, т. е. $v_r \sim \frac{1}{r^2}$ (2), поэтому средняя сила, действующая на частицу во время τ_2, меньше, чем во время τ_1, и частица в среднем удаляется от пузырька.

Для добавки Оссеена

$$\Delta p_1 \sim k' v_1^2 \tau_1, \qquad \Delta p_2 \sim k' v_2^2 \tau_2, \quad \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} \sim \frac{v_1^2 \tau_1}{v_2^2 \tau_2} \sim \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1,$$

т. е. сила в среднем направлена к пузырьку. Поэтому результирующее движение мы можем представить как движение по некоторой плавной траектории с одновременными малыми осцилляциями (с периодом T) около нее.

В соответствии с методом Капицы представляем $r(t)$ в виде $r(t) = X(t) + \xi(t)$, где $X(t)$ и $\xi(t)$ — указанные плавное движение и малые осцилляции, и уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{X} + \ddot{\xi} = \left[1 + \frac{\alpha}{(X+\xi)^2}\right]\left[\frac{f(t)}{(X+\xi)^2} - \dot{X} - \dot{\xi}\right] + \\ + \beta (X+\xi)^2 \left[\frac{f(t)}{(X+\xi)^2} - \dot{X} - \dot{\xi}\right]^3. \tag{13}$$

Разложим правую часть уравнения (13) в ряд по $\frac{\xi}{X}$ и ограничимся членами первого порядка малости:

$$\ddot{X} + \ddot{\xi} \simeq \frac{f(t)}{X^2} - 2\frac{f(t)}{X^2}\frac{\xi}{X} - \dot{X} - \dot{\xi} + \alpha \frac{f(t)}{X^4} - 4\alpha \frac{f(t)}{X^4}\cdot\frac{\xi}{X} - \\ - \frac{\alpha}{X^2}\cdot\dot{X} - \frac{\alpha}{X^2}\cdot\dot{\xi} - 2\frac{\alpha}{X^2}\frac{\xi}{X}\dot{X} + 4\beta\frac{f^3(t)}{X^4}\cdot\frac{\xi}{X} - \\ - 3\beta\frac{f^2(t)}{X^2}\cdot\dot{X} - 3\beta\frac{f^2(t)}{X^2}\cdot\dot{\xi} - 6\beta\frac{f^2(t)}{X^2}\cdot\frac{\xi}{X}\dot{X}. \tag{14}$$

В этом разложении мы пренебрегли также членами, содержащими $\dot{X}^2$ и $\dot{X}^3$, так как $\dot{X}$ мало. Напишем отдельно уравнения для осциллирующей и плавной частей уравнения (14):

$$\ddot{\xi} + \left(1 + \frac{\alpha}{X^2}\right)\dot{\xi} = \frac{f(t)}{X^2} + \beta\frac{f^3(t)}{X^4}; \tag{15}$$

$$\ddot{X} + \left(1 + \frac{\alpha}{X^2} + 2\frac{\alpha}{X^2}\frac{\xi}{X} + 3\beta\frac{f^2(t)}{X^2} + 6\beta\frac{f^2(t)}{X^2}\frac{\xi}{X}\right)\dot{X} = -2\frac{f^2(t)}{X^2}\cdot\frac{\xi}{X} - \\ - 4\alpha\frac{f(t)}{X^4}\frac{\xi}{X} - 4\beta\frac{f^3(t)}{X^4}\cdot\frac{\xi}{X} - 3\beta\frac{f^2(t)}{X^2}\dot{\xi}. \tag{16}$$

Уравнение (16) должно быть усреднено по периоду колебаний кавитационного пузырька.

В соответствии со сказанным о роли добавки Оссеена в уравнении (12) в «нулевом» приближении в уравнении (15) можно пренебречь членами, содержащими α и β, и оно упрощается:

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi} = \frac{f(t)}{X^2}. \tag{15a}$$

Решение уравнения (15a) может быть написано в следующем виде:

$$\xi(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{1}{X^2}\int_0^t [1 - e^{-(t-\tau)}] f(\tau)\, d\tau, \tag{15b}$$

где постоянные C_1 и C_2 могут быть найдены, применительно к методу Капицы, из условия равенства нулю усредненных по периоду колебаний значений ξ и $\dot{\xi}$:

$$\langle\xi\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt=0;\quad \langle\dot{\xi}\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\xi}(t)\,dt=0. \tag{15c}$$

Вычисляя C_1 и C_2, получим окончательно:

$$\xi(t)=\frac{1}{X^2}\left\{-\frac{\dot{I}_1+2\dot{I}_2}{T}+\frac{\dot{I}_2}{1-e^{-T}}e^{-t}+\int_0^T[1-e^{-(t-\tau)}]f(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{15d}$$

Здесь приняты обозначения:

$$I_1=\int_0^T\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]dt,\quad I_2=\int_0^T\left[\int_0^t e^{-(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau\right]dt,$$

Усредненное по периоду колебаний уравнение для медленной части в «нулевом» приближении должно содержать только члены, соответствующие учету радиальности в силе Стокса и самые большие в добавке Оссеена:

$$\ddot{X}+\dot{X}=-2\frac{\langle f(t)\xi(t)\rangle}{X^3}+4\beta\frac{\langle f^3(t)\xi(t)\rangle}{X^5}. \tag{16a}$$

Здесь $\xi(t)$ обратно пропорциональна квадрату X, поэтому уравнение (16a) может быть представлено в виде

$$\ddot{X}+\dot{X}=-\frac{A}{X^5}+\frac{B}{X^7};\ A,B>0, \tag{16b}$$

причем правую часть можно рассматривать как некоторую «эффективную силу» $F_{\text{эфф}}=-\dfrac{dU_{\text{эфф}}}{dX}$. Следовательно, для эффективной энергии $U_{\text{эфф}}(X)$ справедлива следующая зависимость от X:

$$U_{\text{эфф}}(X)=\frac{A'}{X^4}-\frac{B'}{X^6};\ A',B'>0. \tag{17}$$

Напишем выражение для силы $F_{\text{эфф}}$ и потенциальной энергии $U_{\text{эфф}}$ в размерных единицах:

$$F_{\text{эфф}}=-2\alpha'\frac{\langle f(t)\psi(t)\rangle}{X^5}+3\beta'\frac{T}{R^3}\frac{\langle f^3(t)\psi(t)\rangle}{X^7};$$

$$U_{\text{эфф}}=\frac{A'}{X^4}-\frac{B'}{X^6}. \tag{18}$$

Здесь

$$f(t)=R^2(t)\dot{R}(t),\qquad \psi(t)=-\frac{I_1+2I_2}{T}+$$

$$+\alpha'\frac{I_2}{1-e^{-\alpha' T}}e^{-\alpha' t}+\int_0^t[1-e^{-\alpha'(t-\tau)}]f(\tau)\,d\tau;$$

$$I_1=\int_0^T\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]dt,\ I_2=\int_0^T\left[\int_0^t e^{-\alpha'(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau\right]dt,$$

$$A'=-8\alpha'\langle f(t)\psi(t)\rangle,\quad B'=-18\beta'\frac{T}{R^3}\langle f^3(t)\psi(t)\rangle.$$

График потенциальной энергии изображен на фиг. 2.

Оценим «радиус захвата». Для «мелких» частиц $\alpha' T \gg 1$, поэтому

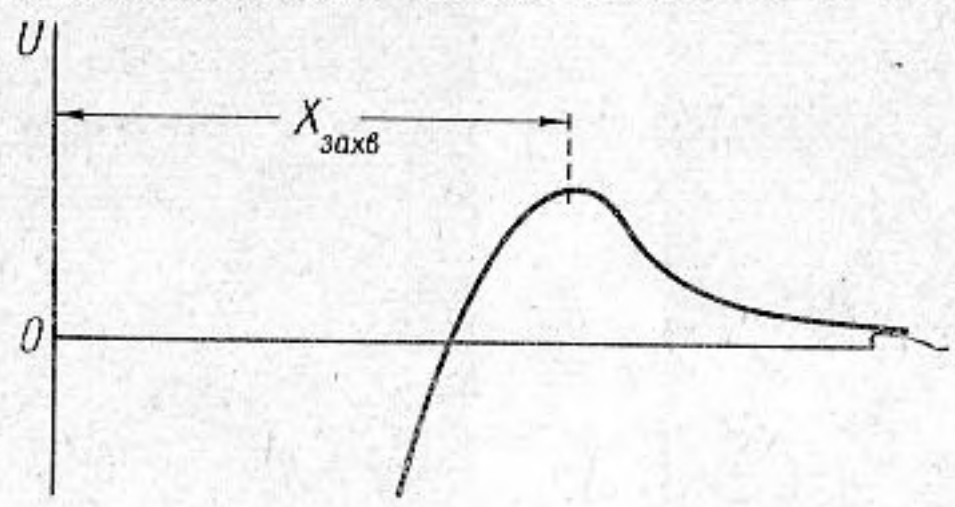
$$\psi(t) \sim -\frac{\dot{I}_1}{T} + \int_0^t f(\tau)\,d\tau \sim R^3, \quad \langle f(t)\psi(t)\rangle \sim \frac{R^6}{T}, \quad \langle f^3(t)\psi(t)\rangle \sim \frac{R^{12}}{T^3},$$

$$X_{\text{захв}} \sim \sqrt{\frac{B'}{A'}} \sim \sqrt{\frac{\rho_{\text{ж}} a R^3}{\eta T}} \sim \sqrt{\frac{a R^3}{\nu T}}. \tag{19}$$

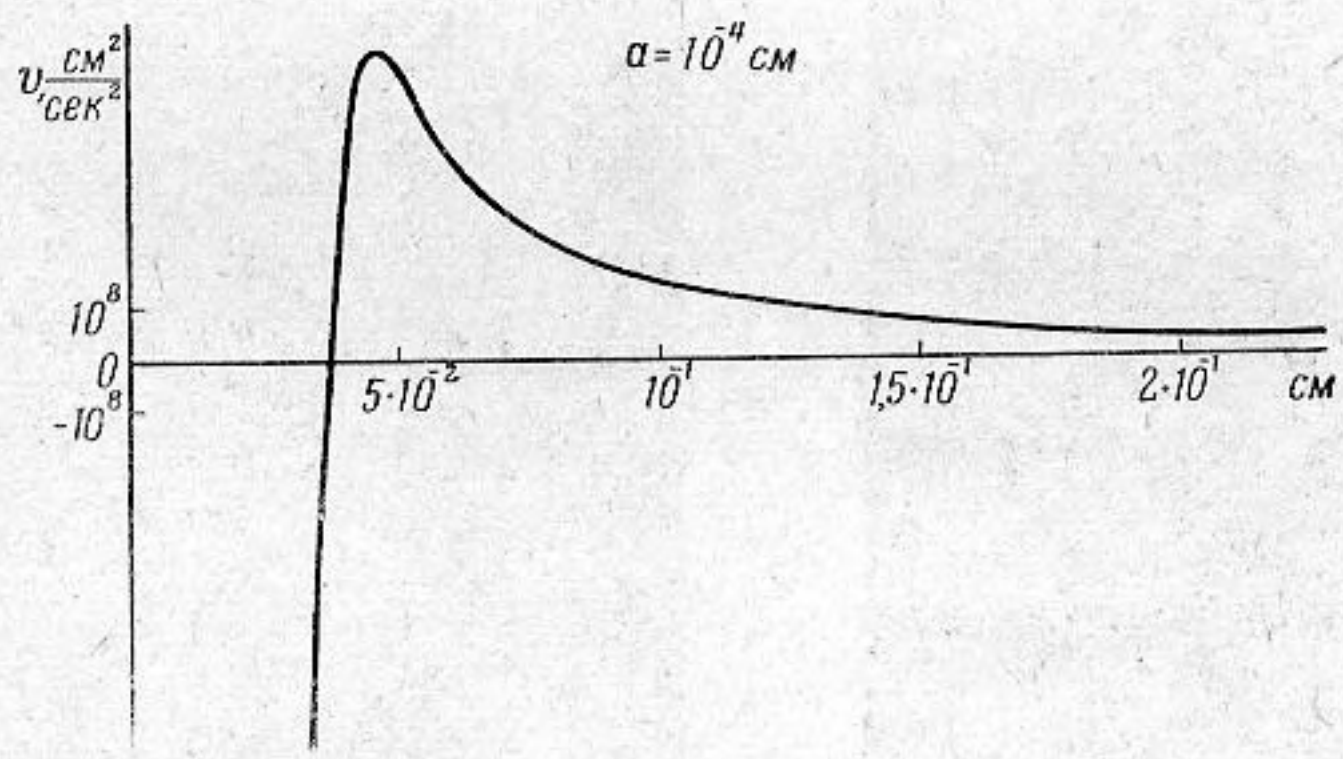
Для «средних» частиц ($\alpha' T \sim 1$) аналогичная оценка приводит к такому же результату. Оценка для $U_{\max}$ дает:

$$U_{\max} \sim \frac{A'^3}{B'^2} \sim 10^2 \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho + \frac{1}{2}\rho_{\text{ж}}} \frac{\nu^3 T}{a^4}. \tag{20}$$

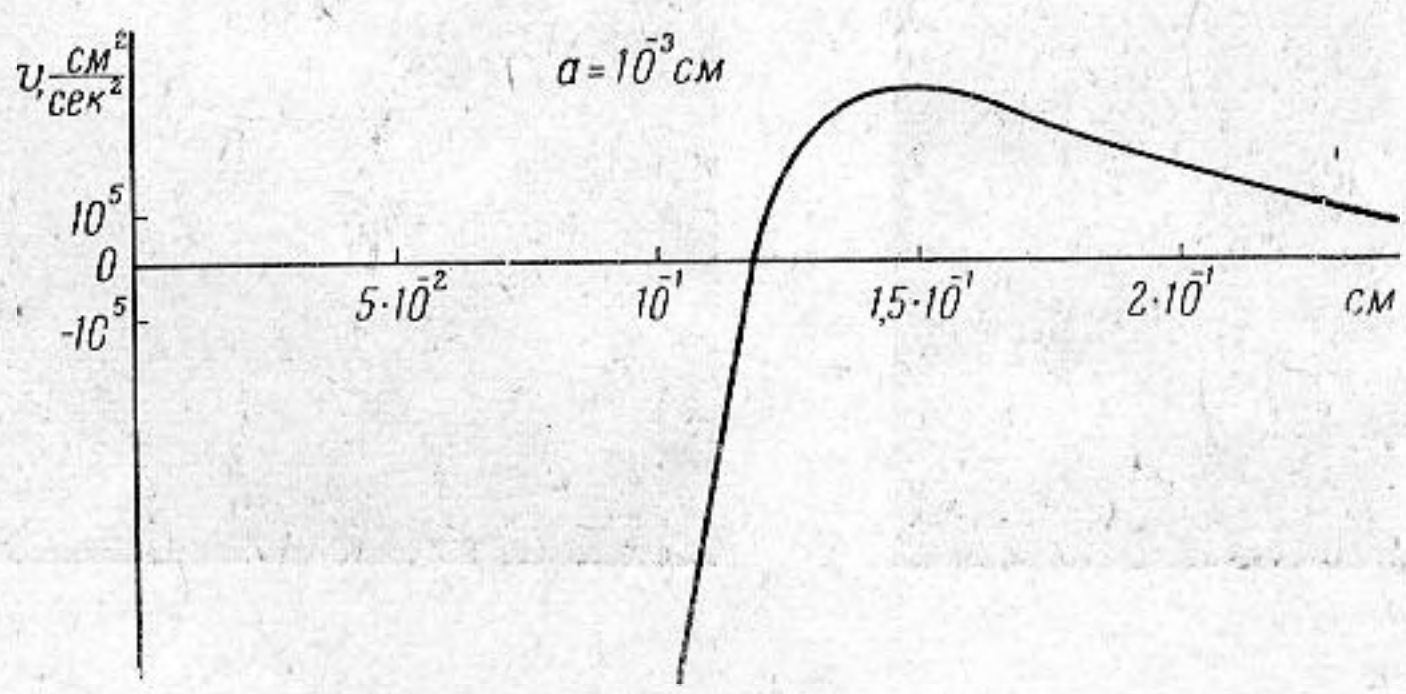
Из формул (19) и (20) видно, что для «крупных» частиц «радиус захвата» больше, чем для «мелких», и высота потенциального барьера для них



Фиг. 2

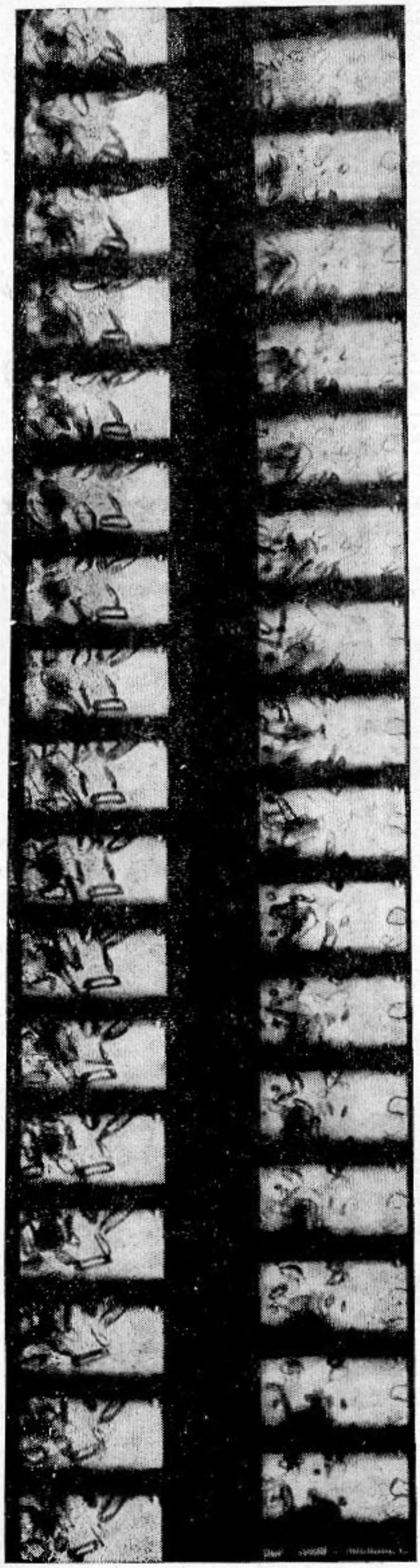


а



б

Рис. 3



а

б

Фиг. 4

меньше $\left(\sim \frac{1}{a_4}\right)$. Формула (19) может быть использована для оценки условий, при которых колеблющийся пузырек можно считать уединенным. Действительно, для этого необходимо, чтобы среднее расстояние между пузырьками было много больше эффективного «радиуса захвата».

Таким образом, кавитационный пузырек обладает способностью «флотировать» частицы, находящиеся в жидкости во взвешенном состоянии, и, кроме того, он еще их «сортирует» («сепарирует») по размеру (т. е. пузырек способен захватить «крупную» частицу на бо́льшем расстоянии, нежели мелкую).

На фиг. 3 (*а*, *б*) представлены графики «эффективной» потенциальной энергии, вычисленные по формуле (18) для «мелких» ($a = 10^{-4}$ см) и «средних» ($a = 10^{-3}$ см) частиц для следующих условий: $\rho = 3$ г/см^3, $\rho_ж = 1$ г/см^3, $\eta = 0{,}01$ г/см·сек, $R_0 = 0{,}01$ см, $\Delta R = 0{,}01$ см, $\tau_1/\tau_2 = 5$.

Сравним полученные результаты с экспериментальным материалом. На фиг. 4а показана кинограмма флотационного действия пульсирующего газового пузырька. Максимальный размер пузырька около 0,02 см. Остальные условия аналогичны принятым при расчете. Фиг. 4в представляет собой один из увеличенных кадров фиг. 4а.

Здесь стрелкой отмечен «эффективный радиус захвата», составляющий примерно 0,15 см, что хорошо согласуется с теоретической кривой (см. фиг. 3а, в).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenberg L. D. On the physics of ultrasonic cleaning. J. Ultrasonic News, 1960, pp. 16—20.
2. Б. Г. Новицкий, В. М. Фридман. Исследование механизма ультразвукового диспергирования. Сб. «Ультразвуковая техника», № 5, Москва, 1964, стр. 52—60.
3. Б. Г. Новицкий. Флотационное действие пульсирующих газовых пузырьков при акустической кавитации. VI Всесоюзная Акустическая конференция, Москва, 1968.
4. Сб. Методы и приборы ультразвуковых исследований, т. I, часть Б, М., «Мир», 1967.
5. Физика и техника мощного ультразвука. Мощные ультразвуковые поля. Под редакцией Л. Д. Розенберга, М., «Наука», 1968.
6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1953.
7. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика, Физматгиз, М., 1958.

МФТИ

Поступила в редакцию
4 марта 1971 г.