АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 4

УДК 534.222

ОБ ОДНОМ ЯВЛЕНИИ В ВОЛНОВОДЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ СКОРОСТИ ЗВУКА

В. Д. Крупин

Рассмотрен волновод, в котором скорость звука убывает в направлении к поглощающей импедансной границе. Показано, что в этом случае коэффициенты затухания нормальных волн образуют немонотонную последовательность, причем наименьший коэффициент затухания имеет нормальная волна с номером, отличным от единицы. Для качественного объяснения этого явления использованы лучевые представления. Изложен метод численного определения комплексных собственных значений и собственных функций несамосопряженной краевой задачи, через которые выражаются характеристики нормальных волн. Приведены численные результаты, полученные на ЭВМ.

Как известно [1—3], в случае однородного волновода с поглощающими границами коэффициенты затухания нормальных волн образуют монотонно возрастающую последовательность. Поэтому с увеличением расстояния от излучателя вклад нормальных волн высоких номеров в звуковое поле становится незначительным и звуковой потенциал можно аппроксимировать суммой некоторого числа нормальных волн малых номеров. На достаточно больших расстояниях основную роль играет первая нормальная волна.

В настоящей работе аналитическими и численными методами исследованы характеристики нормальных волн для волновода с отрицательным градиентом скорости звука и установлено, что последовательность коэффициентов затухания является немонотонной. Показано, что это свойство нормальных волн приводит к некоторым особенностям в интерференционной картине поля и в характере убывания поля на больших расстояниях от излучателя.

Рассмотрим в качестве волновода жидкую среду, заполняющую в декартовой системе координат $oxyz$ область $-\infty < x, y < +\infty$, $0 \leqslant z \leqslant H$. Будем считать, что скорость звука в среде зависит от координаты z, как некоторая функция $c(z)$. В точке $(0, 0, z_0)$ находится гармонический излучатель: $R^{-1}\exp\left[i\dfrac{\omega}{c(z_0)}R - i\omega t\right]$, где $R^2 = (z - z_0)^2 + r^2$, $r^2 = x^2 + y^2$, ω — круговая частота. Звуковое поле в волноводе характеризуется потенциалом $\Phi e^{-i\omega t}$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опускаем). Для определенности предположим, что на границах слоя заданы краевые условия:

$$\Phi|_{z=0} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \alpha\Phi\right]_{z=H} = 0, \tag{1}$$

где α — комплексный параметр с отрицательной мнимой частью (это означает, что граница $z = H$ является поглощающей). Тогда, воспользовавшись результатами работ [1 и 4], звуковой потенциал Φ можно предста-

вить в виде суммы нормальных волн:

$$\Phi(r, z) = -2\pi i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{w(z_0, \xi_l)\, w(z, \xi_l)}{w(H, \xi_l)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{dw}{dz} + \alpha w\right)\right]_{\xi=\xi_l,\, z=H}} \xi_l H_0^{(1)}(r\xi_l). \quad (2)$$

В этом выражении через w обозначено решение уравнения $\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2\right] w = 0$, удовлетворяющее условию $w(0, \xi) = 0$; $w(z, \xi_l)$ и $(\xi_l)^2$ — собственные функции и собственные значения краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2\right] w = 0 \\ w(0, \xi) = \left[\frac{dw}{dz} + \alpha w\right]_{z=H} = 0 \end{cases} \quad (\operatorname{Im} \alpha < 0)$$

Вводя новые обозначения $\lambda = (\xi H)^2$; $\varkappa = \frac{\omega}{c(0)} H$; $n(z) = \frac{c(0)}{c(z)}$; $g = (\alpha H)$; $\zeta = z / H$ представим задачу в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{d\zeta^2} + [\varkappa^2 n^2(\zeta H) - \lambda] w = 0 \\ w(0, \lambda) = \left[\frac{dw}{d\zeta} + gw\right]_{\zeta=1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Спектр задачи (3) является полуограниченным и состоит из счетного множества комплексных собственных значений λ_l, $(l = 1, 2, \ldots)$ [5]. Каждому собственному значению λ_l соответствует одна собственная функция $w(\zeta, \lambda_l)$.

При условии $\operatorname{Im} g < 0$ все величины $\lambda_l (l = 1, 2, \ldots)$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Это следует из равенства

$$\operatorname{Im} \lambda_l = (-\operatorname{Im} g)\, |w(1, \lambda_l)|^2 \left[\int_0^1 |w(\zeta, \lambda_l)|^2 d\zeta\right]^{-1}, \quad (4)$$

которое получается, если обе части дифференциального уравнения (3) умножить на комплексно-сопряженную функцию $\overline{w}$, проинтегрировать их по ζ в пределах от нуля до единицы, положить $\lambda = \lambda_l$ и воспользоваться краевыми условиями.

Будем считать, что собственные значения занумерованы в порядке убывания их действительных частей: $\operatorname{Re} \lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_2 \ldots > \operatorname{Re} \lambda_l \ldots$ При таком способе нумерации и при условии $\operatorname{Im} g < 0$ они образуют последовательность $\{\lambda_l\}$, имеющую предельной точкой бесконечно удаленную точку второго квадранта комплексной плоскости λ.

Нетрудно показать, что для собственной функции $w(\zeta, \lambda_l)$ справедливо тождество:

$$w(1, \lambda_e) \left[\frac{d}{d\zeta} \dot{w}(\zeta, \lambda) + g\dot{w}(\zeta, \lambda)\right]_{\substack{\zeta=1 \\ \lambda=\lambda_l}} = \int_0^1 w^2(\zeta, \lambda_l)\, d\zeta, \quad (5)$$

в котором точка обозначает операцию дифференцирования по λ. Тогда, принимая во внимание введенные выше обозначения, выражение (2)

можно записать в более простом виде:

$$\Phi = -\frac{\pi i}{H}\sum_{l=1}^{\infty} w_l(\zeta)\, w_l(\zeta_0)\, H_0^{(1)}\left(\frac{r}{H}\sqrt{\lambda_l}\right), \qquad \zeta_0 = \frac{z_0}{H}, \tag{6}$$

где $w_l(\zeta) = w(\zeta, \lambda_l)\left[\int\limits_0^1 w^2(\zeta, \lambda_l)\, d\zeta\right]^{-1/2}$ представляют собой нормированные собственные функции. Знак множителя $\sqrt{\lambda_l}$ в аргументе функции $H_0^{(1)}$ мы считаем положительным. При таком выборе ветви двузначной функции $\sqrt{\lambda}$ и при условии $\operatorname{Im} g < 0$ величины $\sqrt{\lambda_l}$ располагаются в первом квадранте плоскости $\sqrt{\lambda}$: $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_l} > 0$; $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_l} > 0$. Каждому собственному значению λ_l соответствует нормальная волна, представленная l-ым членом ряда (6). При $r \to \infty$ она представляет собой волну вида $r^{-1/2}\exp\left[i \operatorname{Re}\sqrt{\lambda_l}\frac{r}{H} - \operatorname{Im}\sqrt{\lambda_l}\frac{r}{H}\right]$, экспоненциально затухающую и распространяющуюся в направлении от излучателя, что находится в согласии с принципом погашаемости [6].

Величины $\alpha_l = \operatorname{Im}\sqrt{\lambda_l}$ представляют собой коэффициенты затухания нормальных волн. Так как $\operatorname{Im}\lambda_l = 2(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_l})(\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_l})$, то из формулы (4) следует, что

$$\alpha_l = (-\operatorname{Im} g)\frac{|w(1, \lambda_l)|^2}{2(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_l})}\left[\int\limits_0^1 |w^2(\zeta, \lambda_l)|\, d\zeta\right]^{-1}. \tag{7}$$

Используя соотношение (7), исследуем на некоторых примерах поведение последовательности коэффициентов затухания нормальных волн. В качестве первого примера рассмотрим случай, когда показатель преломления $n(\zeta H)$ изменяется по закону:

$$n^2(\zeta H) = 1 + 2a\zeta, \qquad (a > 0). \tag{8}$$

Это соответствует убыванию скорости звука в направлении к поглощающей границе $z = H$. Предположим, что величина $\operatorname{Im} g$ мала по сравнению с величиной $g_0 = \operatorname{Re} g$. Тогда задачу (3) можно рассматривать как возмущенную по отношению к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 w}{d\zeta^2} + [\varkappa^2 n^2(\zeta H) - \lambda]\, w = 0 \\[2ex] w(0, \lambda) = \left[\dfrac{dw}{d\zeta} + g_0 w\right]_{\zeta=1} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

собственные значения которой вещественны. Обозначим их через $\lambda_l^{(0)}$ и занумеруем в порядке убывания: $\lambda_1^{(0)} > \lambda_2^{(0)} > \ldots \lambda_l^{(0)} > \ldots$. Часть из них расположена на положительной полуоси, остальные — на отрицательной.

Из соотношений (5) и (7) следует, что с точностью до члена $O[(\operatorname{Im} g)^2]$ величины α_l, соответствующие положительным собственным значениям $\lambda_l^{(0)}$, будут

$$\alpha_l = \frac{|\operatorname{Im} g|}{2\sqrt{\lambda_l^{(0)}}}\, w(1, \lambda_l^{(0)})\left(\frac{d\dot{w}}{d\zeta} + g_0\dot{w}\right)^{-1}_{\zeta=1,\ \lambda=\lambda_l^{(0)}}. \tag{10}$$

Используя выражение (8) и вводя новую переменную τ, согласно соотношениям $\tau = (2a\varkappa^2)^{1/3}(\zeta - \tau_0)$ и $\tau_0 = (2a\varkappa^2)^{-1}(\lambda - \varkappa^2)$, дифференциальное уравнение в задаче (9) можно привести к виду $\dfrac{d^2 w}{d\tau^2} + \tau w = 0$.

Линейно-независимыми решениями последнего уравнения являются функции Эйри-Фока $\mathrm{Ai}(\tau)$, $\mathrm{Bi}(\tau)$ [7]. Пусть $w(\zeta, \lambda)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $w(0, \lambda) = 0$, например,

$$w(\zeta, \lambda) = \mathrm{Ai}(\tau) - C(\lambda)\,\mathrm{Bi}(\tau), \tag{11}$$

$$C(\lambda) = \frac{\mathrm{Ai}[-(2a\varkappa^2)^{1/3}\tau_0]}{\mathrm{Bi}[-(2a\varkappa^2)^{1/3}\tau_0]}. \tag{12}$$

Тогда величины λ_l совпадают с корнями трансцендентного уравнения

$$[\mathrm{Ai}'(\tau) - C(\lambda)\,\mathrm{Bi}'(\tau)]_{\zeta=1} + g_0\,(2ax^2)^{-1/3}\,[\mathrm{Ai}(\tau) - C(\lambda)\,\mathrm{Bi}(\tau)]_{\zeta=1} = 0. \tag{13}$$

Выполним теперь некоторые преобразования в формуле (10). Прежде всего вычислим в ней производную по λ от функции $\dfrac{dw}{d\zeta} + g_0 w$ при $\lambda = \lambda_l^{(0)}$, $\zeta = 1$. Используя выражение (11), уравнение (13) и принимая во внимание, что функции $\mathrm{Ai}(\tau)$, $\mathrm{Bi}(\tau)$ удовлетворяют уравнению $\dfrac{d^2w}{d\tau^2} + \tau w = 0$ и $\mathrm{Bi}(\tau)\mathrm{Ai}'(\tau) - \mathrm{Ai}(\tau)\mathrm{Bi}'(\tau) = \pi^{-1}$ [7], приходим к формуле:

$$\left(\frac{d\dot{w}}{d\zeta} + g_0\dot{w}\right)_{\zeta=1,\ \lambda=\lambda_l^{(0)}} = w\,(1, \lambda_l^{(0)})\left\{(2a\varkappa^2)^{-1/3}\tau_{1l} + \right.$$
$$\left. + \frac{g_0^2}{2a\varkappa^2} + \pi^{-1}\,(2a\varkappa)^{-1/3}\,\dot{C}\,(\lambda_l^{(0)})\,[g_0\,\mathrm{Bi}\,(\tau_{1l}) + (2a\varkappa^2)^{1/3}\,\mathrm{Bi}'\,(\tau_{1l})]^2\right\}, \tag{14}$$

где

$$\tau_{1l} = (2a\varkappa^2)^{1/3}\,(1 - \tau_{0l}) > 0; \qquad \tau_{0l} = (2a\varkappa^2)^{-1}\,(\lambda_l^{(0)} - \varkappa^2). \tag{15}$$

Далее, дифференцируя по параметру a выражение (12) и заменяя возникающую при этом величину $[\mathrm{Bi}(\tau)\mathrm{Ai}'(\tau) - \mathrm{Ai}(\tau)\mathrm{Bi}'(\tau)]$ на π^{-1}, имеем

$$\dot{C}(\lambda_l^{(0)}) = \pi^{-1}(2a\varkappa^2)^{-2/3}\{\mathrm{Bi}[-(2a\varkappa^2)^{1/3}\tau_{0l}]\}^{-2}. \tag{16}$$

Предположим, что параметр $\varkappa$ стремится к бесконечности. Рассмотрим подпоследовательность собственных значений $\{\lambda_l^{(0)}\}$, $l = 1, 2, \ldots, L$, для которых выполняются условия: $\tau_{0l} > 0$; $(2a\varkappa^2)^{1/3}\tau_{0l} \gg 1$. Эти условия означают, что соответствующие собственные функции экспоненциально возрастают от точки $\zeta = 0$ вплоть до точки поворота дифференциального уравнения (9), а на остальной части интервала (0, 1) осциллируют. Так как для функции $\mathrm{Bi}(\tau)$ при отрицательных значениях τ справедливо асимптотическое выражение [7]

$$\mathrm{Bi}(\tau) = \pi^{-1/2}|\tau|^{-1/4}\exp\left(+\frac{2}{3}|\tau|^{3/2}\right) \qquad (|\tau| \to \infty,\ \tau < 0),$$

то из формулы (16) следует, что величина $\dot{C}(\lambda_l^{(0)})$ экспоненциально мала. Кроме того заметим, что функции $\mathrm{Bi}(\tau)$ и $\mathrm{Bi}'(\tau)$ для положительных значений τ имеют осциллирующий характер и, следовательно, величины $\mathrm{Bi}(\tau_{1l})$, $\mathrm{Bi}'(\tau_{1l})$ ограничены. Поэтому, пренебрегая в формуле (14) членом, пропорциональным величине $\dot{C}(\lambda_{lj}^{(0)})$ и используя формулы (10) и (15), мы получаем приближенное выражение:

$$\alpha_l = (-\operatorname{Im} g)\frac{a\varkappa^2}{[\varkappa^2(1 + 2a) + g_0^2 - \lambda_l^{(0)}]\sqrt{\lambda_l^{(0)}}}, \qquad l = 1, 2, \ldots, L. \tag{17}$$

Поскольку величины $\sqrt{\lambda_l^{(0)}}$ занумерованы в порядке убывания $\sqrt{\lambda_1^{(0)}} > \sqrt{\lambda_2^{(0)}} > \ldots \sqrt{\lambda_L^{(0)}}$, то при условии $3^{-1/2}[\varkappa^2(1+2a)+g_0^2]^{1/2} < \varkappa$ из формулы (17) следует, что подпоследовательность $\{\alpha_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots L)$ монотонно убывает. Другими словами, бóльшему номеру l соответствует меньшее значение α_l: $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_l \ldots > \alpha_L$.

В другом случае, когда выполняется условие $3^{-1/2}[\varkappa^2(1+2a) + g_0^2]^{1/2} > \varkappa$, существует номер $l = M < L$ такой, что $\alpha_1 > \alpha_2 \ldots > \alpha_M$ и $\alpha_{M+1} < \alpha_{M+2} \ldots < \alpha_L$.

Так как при $l \to \infty$ величины α_l стремятся к бесконечности, то, принимая во внимание поведение подпоследовательности $\{\alpha_l,\ l = 1, 2, \ldots L\}$, заключаем, что в обоих случаях вся бесконечная последовательность $\{\alpha_l\}$, $l = 1, 2, \ldots, L, \ldots$ является немонотонной, и среди нормальных волн существует нормальная волна с номером $M > 1$, которая имеет минимальный коэффициент затухания. Таким образом, в отличие от случая однородного волновода, в котором поле определяется нормальными волнами первых номеров, в волноводе с отрицательным градиентом скорости звука основной вклад в поле вносит группа нормальных волн с номерами $l = M - m, \ldots M, \ldots M + m$, где m — целое число.

Рассмотрим теперь более общий случай неоднородного волновода, когда функция $n(\zeta H)$ монотонно возрастает в направлении к поглощающей границе, имеет непрерывную вторую производную, а в остальном является произвольной. При $\varkappa \to \infty$ решения дифференциального уравнения (9) могут быть асимптотически представлены функциями [7]: $\left(\frac{d\tau}{d\zeta}\right)^{-1/2} \mathrm{Ai}(\tau)$; $\left(\frac{d\tau}{d\zeta}\right)^{-1/2} \mathrm{Bi}(\tau)$, причем функция $\tau(\zeta)$ определяется из выражения

$$\tau(\zeta) = \begin{cases} \left[\frac{3}{2}\int\limits_{\zeta^*}^{\zeta} \sqrt{\varkappa^2 n^2(\zeta H) - \lambda}\, d\zeta\right]^{2/3} & (\zeta > \zeta^*) \\ -\left[\frac{3}{2}\int\limits_{\zeta^*}^{\zeta} \sqrt{\lambda - \varkappa^2 n^2(\zeta H)}\, d\zeta\right]^{2/3} & (\zeta < \zeta^*), \end{cases}$$

где $\zeta^* = \zeta^*(\lambda)$ — точка поворота дифференциального уравнения. Используя эти решения и выполняя те же самые преобразования, что и при выводе формулы (17), нетрудно показать, что из бесконечной последовательности нормальных волн можно выделить конечную подпоследовательность нормальных волн, коэффициенты затухания которых будут

$$\alpha_l = (-\operatorname{Im} g)[\varkappa^2 n^2(H) - \lambda_l^{(0)}]^{1/2} [g_0^2 + \varkappa^2 n^2(H) - \lambda_l^{(0)}]^{-1} \left[\int\limits_{\zeta_l^*}^{1} \frac{\sqrt{\lambda_l^{(0)}}\, d\zeta}{\sqrt{\varkappa^2 n^2(\zeta H) - \lambda_l^{(0)}}}\right]^{-1}, \tag{18}$$

где $\zeta_l^* = \zeta^*(\lambda_l^{(0)})$. В частности, если показатель преломления $n(\zeta H)$ изменяется по закону (8), то из выражения (18) вытекает формула (17).

Поясним смысл общей формулы (18). Полагая $\sqrt{\lambda_l^{(0)}} = \varkappa n(H) \cos\chi_l$; $\tilde{n}(\zeta H) = \frac{c(H)}{c(\zeta H)}$; $\zeta^* = \frac{z^*}{H}$; $\zeta_l^* = \frac{z_l^*}{H}$, перепишем ее в следующем виде:

$$\alpha_l = (-\operatorname{Im} g) \frac{(\omega/c(H))\sin\chi_l}{(g_0/H)^2 + [\sin\chi_l \omega/c(H)]^2} \left[\int\limits_{z_l^*}^{H} \frac{\cos\chi_l\, dz}{\sqrt{\tilde{n}^2(\zeta H) - \cos^2\chi_l}}\right]^{-1}. \tag{19}$$

С другой стороны, рассмотрим в волноводе семейство лучей, которые не касаются границы $z=0$ и испытывают отражения от поглощающей границы $z=H$. Пусть χ — угол скольжения одного из лучей к горизонту при $z=H$. Длина полного цикла луча Δ определяется выражением [1]

$$\Delta(\chi)=2\int\limits_{z^*(\chi)}^{H}\frac{\cos\chi}{\sqrt{\tilde{n}^2(\zeta H)-\cos^2\chi}}\,dz \tag{20}$$

и, следовательно, число отражений, которое луч испытывает, пройдя расстояние r, приближенно равно $N=r/\Delta$. Обозначим через V коэффициент отражения от границы $z=H$. Как функция от угла χ он имеет вид [3]

$$V(\chi)=\frac{\sin\chi+(c(H)/i\omega H)(g_0+i\,\mathrm{Im}\,g)}{\sin\chi-(c(H)/i\omega H)(g_0+i\,\mathrm{Im}\,g)}.$$

Принимая во внимание, что граница $z=H$ является слабопоглощающей, мы получаем для величины $|V(\chi)|^N$, характеризующей убывание лучевой амплитуды с расстоянием, выражение:

$$|V|^N=\exp\left\{-2|\mathrm{Im}\,g|\frac{\sin\chi\omega/c(H)}{(g_0/H)^2+[\sin\chi\omega/c(H)]^2}\frac{r}{\Delta\cdot H}\right\}. \tag{21}$$

Аналогичное выражение, как видно из формулы (20), получается и для фактора затухания нормальной волны, а именно:

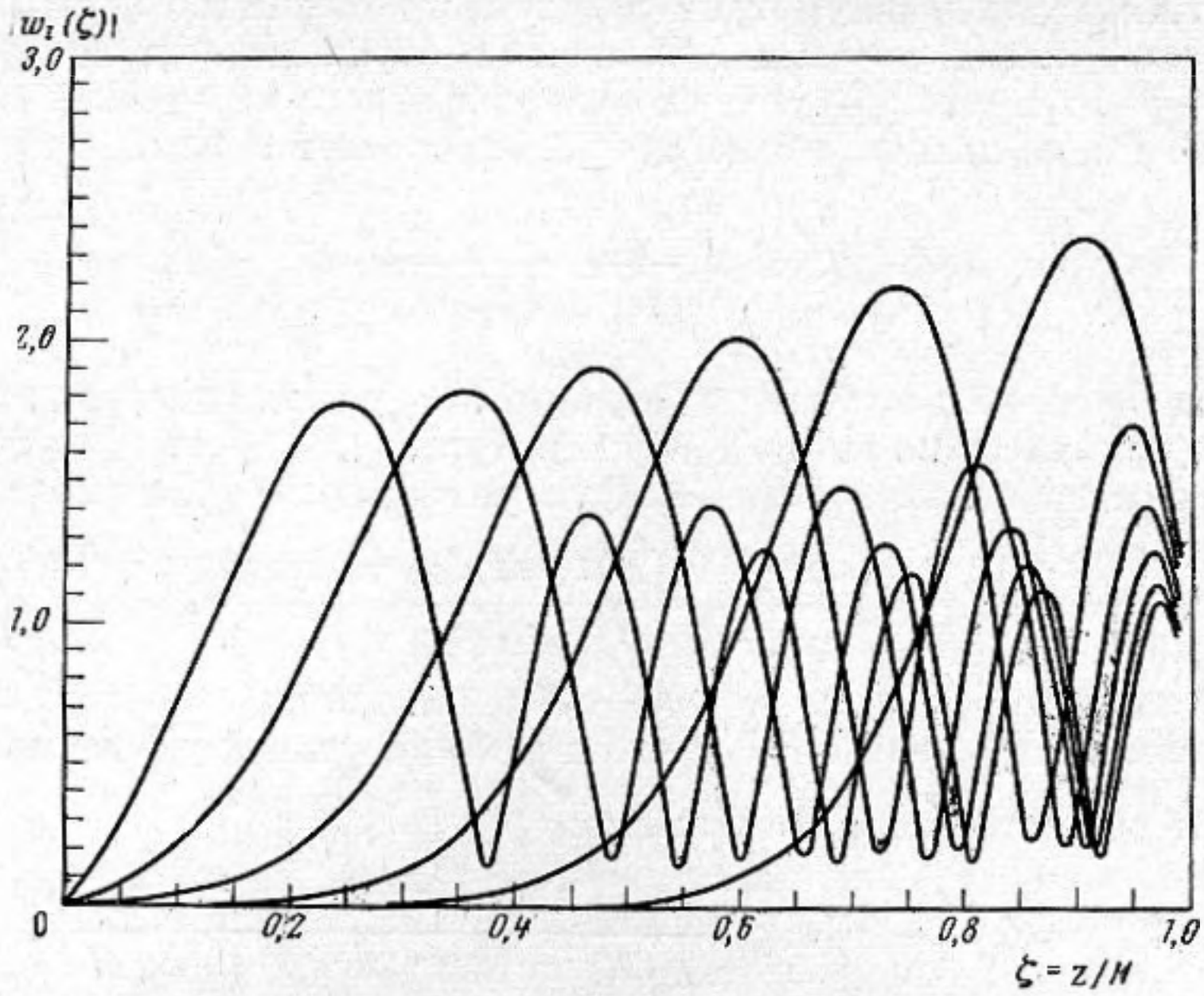
$$\exp\left(-\alpha_l\frac{r}{H}\right)=|V(\chi_l)|^N.$$

Установленное соответствие между лучами и нормальными волнами позволяет качественно объяснить явление немонотонного поведения последовательности $\{\alpha_l\}$. Действительно, так как величины $\lambda_l^{(0)}$ образуют монотонно убывающую последовательность и связаны с углами χ_l соотношением $\sqrt{\lambda_l^{(0)}}=\varkappa n(H)\cos\chi_l$, то бо́льшему номеру l отвечает бо́льший угол χ_l и меньшее значение z_l^*. Из формулы (20) и соотношения $N=r/\Delta$ видно, что до тех пор, пока угол χ_l достаточно мал, число отражений луча уменьшается с ростом номера l, и, следовательно, величина $|V(\chi_l)|^N$ увеличивается. Это означает, что подпоследовательность $\{\alpha_l\}$ монотонно убывает. Напротив, нормальным волнам с предельно высокими номерами будут соответствовать прямые лучи, отражающиеся от обеих границ волновода. Каждый из этих лучей при одном и том же значении r отразится тем бо́льшее число раз, чем бо́льшие углы χ_l. Вследствие этого, величины $|V(\chi_l)|^N$ стремятся к нулю при $l\to\infty$, а коэффициенты затухания неограниченно возрастают. Таким образом, последовательность коэффициентов затухания нормальных волн является немонотонной.

Указанное свойство нормальных волн подтверждается результатами численных расчетов на ЦВМ величин λ_l и α_l. Вычисления были выполнены на ЦВМ «Минск-2» по программе, в которой для определения комплексных собственных значений был применен так называемый метод начальной задачи [8].

Пусть функция $w(\zeta,\lambda)$ есть решение начальной задачи:

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}+[\varkappa^2n^2(\zeta H)-\lambda]w=0;\quad w(1,\lambda)=\gamma;\quad \frac{dw}{d\zeta}=-\gamma g,$$ где γ — произвольное число, λ — комплексный параметр. Тогда функция $E(\lambda)$, определенная равенством $E(\lambda)\equiv w(0,\lambda)$, является целой функцией от λ. Комплексные собственные значения задачи (3) совпадают с минимумами функции $|E(\lambda)|$. Таким образом, алгоритм решения краевой задачи (3) за-



Фиг. 1

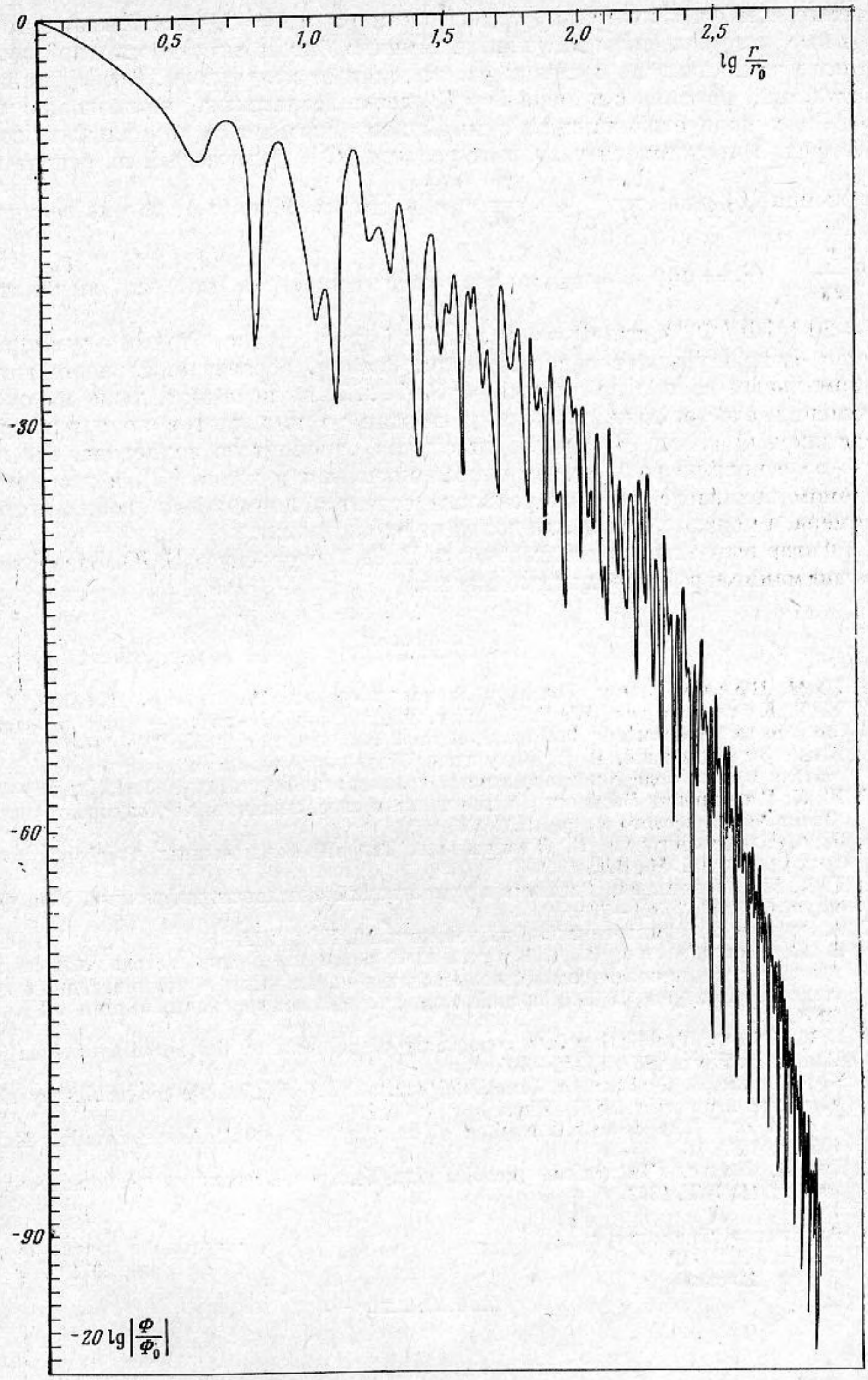
ключается в численном интегрировании задачи с начальными данными и в минимизации функции $|E(\lambda)|$.

Для численного интегрирования начальной задачи был применен метод Нумерова. Этот метод состоит в замене исходного дифференциального уравнения трехчленным конечно-разностным соотношением. При этом ошибка аппроксимации имеет порядок $O(h^6)$, где h — шаг интегрирования. Описание метода Нумерова и принципа построения на его основе программы с автоматическим выбором шага интегрирования даны в работах [9—10]; поэтому мы их здесь не приводим. Высокая точность аппроксимации, простые расчетные формулы и указанный в работе [9] способ контроля погрешности вычислений делают метод Нумерова более эффективным по сравнению с общим методом Рунге — Кутта — Гилла. Для нахождения минимумов модуля $|E(\lambda)|$ был использован метод поочередного уточнения переменных [11], называемый также обобщенным методом Ньютона — Рафсона [12].

Перейдем теперь к обсуждению полученных численных результатов. При расчетах функция $n^2(\zeta H)$ задавалась в виде $n^2(\zeta H) = 1 + (aH)\zeta e^{-(bH)\zeta}$. Параметры, a, b, H, $\varkappa$, $\operatorname{Im}\alpha$, $\operatorname{Re}\alpha$ были приняты равными: $a = +0{,}001$ $м^{-1}$; $b = -0{,}0002$ $м^{-1}$; $H = 1000$ $м$; $\varkappa = 30$; $\operatorname{Im}\alpha = -0{,}01$; $\operatorname{Re}\alpha = +0{,}03$. При выбранных значениях a и b функция $n^2(\zeta H)$ возрастает в направлении к поглощающей границе. Величины α_l $(l = 1, 2, \ldots 18)$ с точностью до 7-го десятичного знака представлены в таблице.

l	α_l	l	α_l	l	α_l
1	+0,1239674	7	+0,1046582	13	+13,75896
2	+0,1096013	8	+0,1314591	14	+21,09727
3	+0,1008661	9	+0,1679341	15	+26,84990
4	+0,0948734	10	+0,2204090	16	+31,88472
5	+0,0908171	11	+0,3186150	17	+36,49941
6	+0,0916870	12	+0,8093717	18	+40,83620

На фиг. 1 изображены модули первых шести нормированных собственных функций $|w_l(\zeta)|$ в зависимости от координаты $\zeta = z/H$ (номер



Фиг. 2

функции $w_l(\zeta)$ совпадает с числом максимумов ее модуля внутри интервала (0,1)).

Как видно из таблицы, последовательность $\{\alpha_l\}$ изменяется немонотонно. Наименьший коэффициент затухания имеет нормальная волна

пятого номера. Нормальные волны с номерами $l = 3, 4 \ldots 7$ имеют почти равные коэффициенты затухания. Именно они и вносят основной вклад в поле на достаточно больших расстояниях от излучателя. Коэффициенты затухания, начиная с номера $l = 13$, резко возрастают, что позволяет при расчетах поля ограничиться суммой конечного числа нормальных волн. На фиг. 2 представлен результат расчета $|\Phi|$, полученный на основе выражения (6) для $\frac{z_0}{H} = 0{,}5$, $\frac{z}{H} = 0{,}9$. По оси абсцисс отложена величина $\lg \frac{r}{r_0}$ ($r_0 = 100$ *м* — начальное расстояние), а по оси ординат — $(-20 \lg|\Phi / \Phi_0|)$, где $\Phi_0 = \Phi(r_0)$. Из фигуры видно, что хотя суммарное поле быстро убывает с расстоянием, биения, образованные наложением нормальных волн с номерами $l = 3, 4 \ldots 7$, не исчезают даже на очень больших расстояниях, поскольку каждая из них дает в поле примерно одинаковый вклад. В отличие от случая однородного волновода, где при $r \to \infty$ основную роль играет первая нормальная волна [3], в рассматриваемом волноводе на бесконечности остается нормальная волна пятого номера, а первая нормальная волна не наблюдается.

Автор выражает признательность В. С. Григорьеву и В. Ю. Завадскому за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. E. T. Kornhauser, W. P. Raney. Attenuation in shallow — water propagation due to an absorbing bottom. J. Acoust. Soc. America, 1955, **27**, 689—692.
3. В. Ю. Завадский, В. Д. Крупин. Поле нормальных волн точечного излучателя в волноводе с поглощающими границами. Акуст. ж., 1967, **13**, 2, 199—207.
4. Ю. Л. Газарян. Распространение звука в слое, лежащем на полупространстве. Отчет Акустического ин-та АН СССР, 1958.
5. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ., 1958.
6. Г. Д. Малюжинец. Развитие представлений о явлении дифракции. Усп. физ. наук, 1959, **69**, 2, 321—334.
7. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., ИЛ., 1958.
8. В. Ю. Завадский, В. Д. Крупин. К развитию одного метода вычисления полей в слоисто-неоднородных волноводах с идеальными и поглощающими границами. Докл. на VI Всесоюзной акустической конференции, секция АУ4, М., 1968.
9. J. M. Blatt. Practical points concerning of selution of the shrödinger equation. Computat. Phys., 1967, **1**, 382—396.
10. N. F. Lane, S. Geltman. Rotational excitational of diatomic mokecules by slow electrons. Application to H_2. Phys. Rev., 1967, **160**, 1, 53.
11. J. A. Ward. The down-hill method of solving $f(z) = 0$ J. Assoc. Comput. Mach. 1957, **4**, 148.
12. Дж. Н. Ланс. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ., 1962.

Акустический институт
АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
17 февраля 1971 г.