АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XVIII 1972 Вып. 4

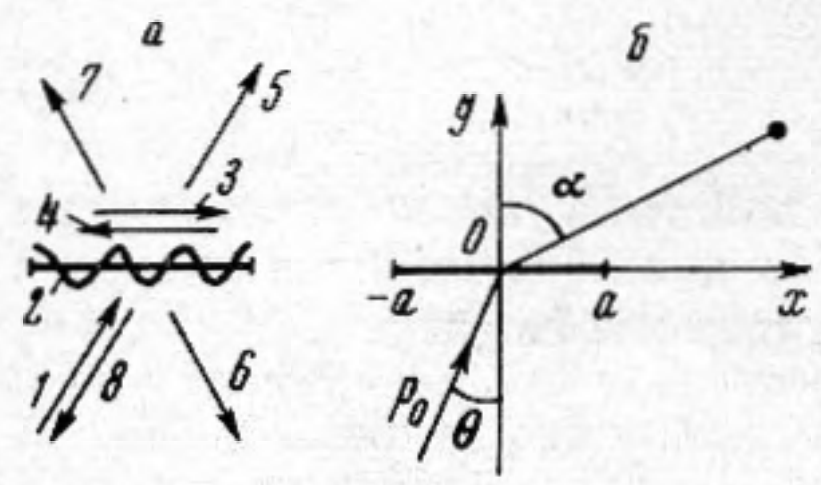
УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

Е. Л. Шендеров

Рассмотрено рассеяние звука на тонкой упругой полосе без дополнительного экрана. Найдены высокочастотная и низкочастотная асимптотики решения и амплитуда незеркального отражения. Показано, что ограниченная пластина не может быть полностью звукопрозрачна даже вблизи резонанса совпадений. Приведена фотография незеркально отраженной волны.

При взаимодействии звуковой волны с ограниченной упругой пластиной возникает незеркальное отражение и аномальное прохождение звука, впервые обнаруженное в 1941 г. С. Н. Ржевкиным и С. И. Кречмером (см. работу [1]). Теоретически и экспериментально это явление исследовано в работе [2] и в книге Л. М. Лямшева [3], причем в последней учтены как изгибные, так и продольные колебания. Было показано, что уровень незеркального отражения звука существенно возрастает при совпадении скорости следа в звуковой волне, падающей на ограниченную пластину, со скоростью изгибной или продольной волны в последней. Физическое объяснение этого явления состоит в следующем. При резонансных колебаниях пластины падающая звуковая волна 1 (фиг. 1а) возбуждает на пластине стоячую волну 2, которая может быть представлена как сумма двух бегущих волн 3 и 4. Волна 3 излучает по обе стороны пластины волны 5 и 6, из которых первая является обычной волной, прошедшей через пластину, а другая — зеркально отраженной волной. Обратная волна 4 излучает волны 7 и 8, причем первая из них определяет аномальное прохождение звука, а вторая — незеркальное отражение.



Фиг. 1

В работе [3] предполагалось, что пластина закрывает отверстие в бесконечном абсолютно жестком экране при шарнирном закреплении на краях. Ниже рассмотрен случай, когда звуковая волна падает на упругую полосу, свободно подвешенную в среде, причем дополнительный экран отсутствует.

Пусть плоская звуковая волна (фиг. 1б) $p_0 = e^{ik(x \sin\theta + y\cos\theta)}$ набегает на тонкую упругую полосу шириной $2a$. Будем считать, что движение пластины описывается уравнением изгибных колебаний

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - k_и^4 v = -\frac{i\omega}{g}(p_2 - p_1); \tag{1}$$

здесь v — колебательная скорость пластины, $p_2 - p_1$ — разность звуковых давлений по обе стороны пластины, $k_и = \sqrt[4]{\omega^2 M / g}$ — волновое число для изгибной волны, $M = \rho_м \cdot h$, $\rho_м$ и h — соответственно плотность материала и толщина пластины, $g = Eh^3 / (12(1-\sigma^2))$ — цилиндрическая жесткость

пластины, σ — коэффициент Пуассона. Зависимость от времени принята в форме $e^{-i\omega t}$.

Для простоты будем рассматривать плоскую задачу. Так же как и при решении задачи дифракции звука на абсолютно жесткой полосе [4], представим звуковое давление в верхнем полупространстве в виде $p_1 = p_0 + p_s$, где p_s — рассеянная волна. Для нижнего полупространства запишем $p_2 = p_0 - p_s$. Из условия непрерывности звукового давления при переходе через линию $y = 0$ при $|x| \geqslant a$ следует

$$p_s(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant a. \tag{2}$$

Звуковое давление $p_s(x, y)$ можно определить через значение p_s на поверхности $x = 0$ по формуле Гюйгенса

$$p_s(x, y) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} p_s(\xi, 0)\frac{\partial}{\partial\eta} H_0^{(1)}(kR)\,|_{\eta=0} d\xi. \tag{3}$$

Здесь $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, η — координата, определенная вблизи поверхности пластины (после выполнения дифференцирования по η следует положить $\eta = 0$). Так как $\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial \eta}$, то с учетом условия (2) получим

$$p_s(x, y) = -\frac{i}{2}\int_{-a}^{a} p_s(\xi)\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(1)}(kR)\,|_{\eta=0} d\xi.$$

Разность звуковых давлений по обе стороны пластины мы получим, устремляя точку M на поверхность $y = 0$

$$p_2 - p_1 = -2p_s = -i\int_{-a}^{a} p_s(\xi)\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(1)}(kR)\Big|_{\substack{y=0\\ \eta=0}} d\xi.$$

Нормальная составляющая колебательной скорости среды вблизи пластины, равная колебательной скорости пластины, определится выражением

$$v(x) = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{1}{i\omega\rho}\Big[ik\cos\theta e^{ikx\cos\theta} -$$

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-a}^{a} p_s(\xi)\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(1)}(kR)\Big|_{\substack{y=0\\ \eta=0}} d\xi\Big].$$

Заметим, что выполнить двойное дифференцирование под знаком интеграла невозможно, поскольку при этом особенность, содержащаяся в подынтегральном выражении, усилится настолько, что интеграл разойдется. Поэтому мы вынесем дифференцирование из под знака интеграла и учтем соотношение $-\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2$. Тогда вместе с уравнением (1) мы получим систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных p_s и v, определяющую движение пластины

$$v(x) - \frac{1}{2\omega\rho}\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\int_{-a} p_s(\xi) H_0^{(1)}(k|x-\xi|)\,d\xi = \frac{\cos\theta}{\rho c} e^{ikx\sin\theta}; \tag{4}$$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - k_{\text{и}}^4 v(x) = \frac{2i\omega}{g} p_s(x). \tag{5}$$

Для удобства вычислений можно перейти к безразмерным координатам $u = kx$, $u_1 = k\xi$, $\rho c v(x) = f(x)$, $ka = \mu$. В результате мы получим систему

$$f(u) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{du^2} + 1\right)\int_{-\mu}^{\mu} p_s(u_1) H_0^{(1)} |u - u_1| du_1 = \cos\theta\, e^{iu\sin\theta};$$

$$(-\mu \leqslant u \leqslant \mu), \tag{4'}$$

$$\frac{d^4 f(u)}{du^4} - A^4 f(u) = \frac{iA^4}{b} p_s(u). \tag{5'}$$

Здесь обозначено $A = c / c_и$, $c_и = \omega / k_и$, $b = \dfrac{\omega M}{2\rho c}$.

К этим уравнениям необходимо добавить граничные условия при $u = \pm\mu$. В соответствии с условием (2) в силу непрерывности звукового давления вдоль линии $y = 0$ на концах пластины звуковое давление в рассеянной волне должно исчезать. Кроме того, на концах свободной пластины должны быть равны нулю изгибающий момент и перерезывающая сила

$$p_s(\pm\mu) = 0; \quad \left.\frac{d^2 f(u)}{du^2}\right|_{u=\pm\mu} = 0; \quad \left.\frac{d^3 f(u)}{du^3}\right|_{u=\pm\mu} = 0. \tag{6}$$

Рассеянное поле вдали от пластины определится выражением (3). Принимая $R \approx R_0 - x\sin\alpha$, получим при $kR \gg 1$ и $R \gg 2a$

$$p_s(R_0, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}}\, e^{ikR_0 - i\pi/4} F(\alpha), \tag{7}$$

где $F(\alpha)$ — функция, определяющая направленность рассеяния

$$F(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{2}\int_{-\mu}^{\mu} p_s(u) e^{-iu\sin\alpha} du.$$

Рассмотрим высокочастотную и низкочастотную асимптотики решений уравнений (4′) и (5′). Предположим сначала, что $\mu \gg 1$. Тогда ясно, что фаза рассеянной волны на поверхности пластины будет в основном определяться фазой вынуждающей силы, т. е. фазой падающей волны. Поэтому целесообразно принять

$$p_s(u) = P_s^{(0)}(u) e^{iu\sin\alpha},$$

где $P_s^{(0)}(u)$ — медленно изменяющаяся величина. Поскольку подынтегральное выражение имеет в точке $u = u_1$ особенность, плавную функцию $P_s^{(0)}(u_1)$ можно вынести из под знака интеграла, приписав ей значение $P_s^{(0)}(u)$. Оценка интеграла при $\mu \to \infty$ приводит к результату

$$\left(\frac{d^2}{du^2} + 1\right)\int_{-\mu}^{\mu} \to 2\cos\theta P_s^{(0)}(u) e^{iu\sin\theta}.$$

Определяя функцию $f(u)$ в виде

$$f(u) = f^{(0)}(u) e^{iu\sin\theta}$$

и пренебрегая производными функциями $f^{(0)}(u)$, найдем решение, справедливое при $\mu \gg 1$

$$F(\alpha) = \mu \cos \alpha A_{\text{отр}}(\theta) \frac{\sin(\mu(\sin\theta - \sin\alpha))}{\mu(\sin\theta - \sin\alpha)}. \tag{8}$$

Здесь

$$A_{\text{отр}}(\theta) = \frac{-ib\cos\theta\left[1 - \left(\frac{c_{\text{и}}}{c}\sin\theta\right)^4\right]}{1 - ib\cos\theta\left[1 - \left(\frac{c_{\text{и}}}{c}\sin\theta\right)^4\right]}$$

— коэффициент отражения звука от безграничной пластины. Таким образом, при принятых допущениях получается выражение, совпадающее с приближением Кирхгофа.

Для расчета характеристики направленности рассеяния при малых значениях μ можно принять следующее приближенное выражение для рассеянного поля на поверхности пластины

$$p_s(u) = P_s^{(0)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{\mu^2}}. \tag{9}$$

Это выражение удовлетворяет первому из граничных условий (6) и, кроме того, удовлетворяет условию Мейкснера на ребрах [4]. На фиг. 2 приведено сравнение функции (9) с результатами непосредственного решения системы (4), (5).

Для функции $H_1^{(0)}|u - u_1|$ используем приближение

$$H_0^{(1)}|u - u_1| \approx 1 + i\left(\frac{2}{\pi}\ln|u - u_1| - 0{,}0738\right).$$

Считая, что $k_{\text{п}}a \ll 1$, можно в уравнении (5) пренебречь первым слагаемым в левой части.

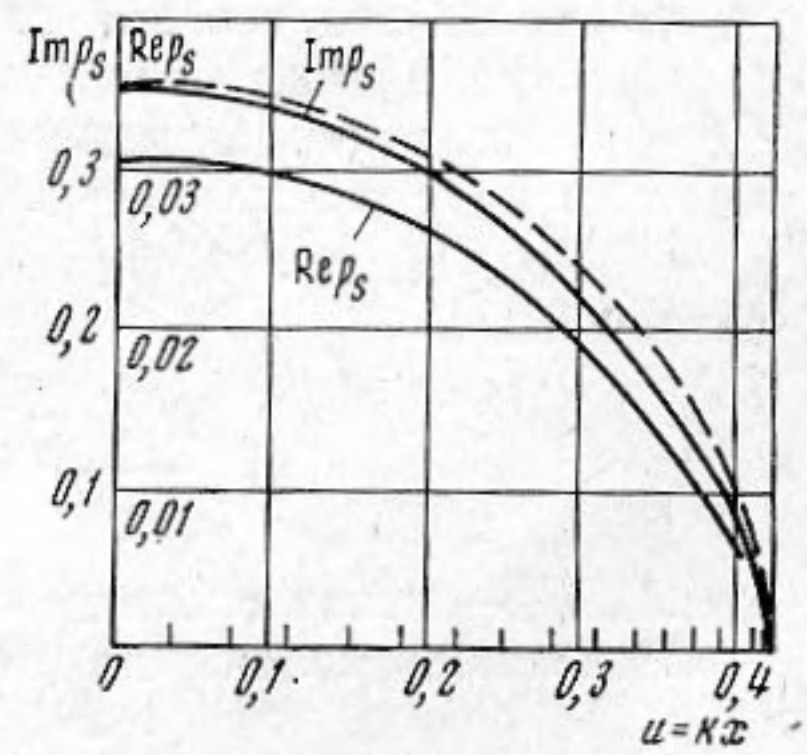
Пренебрегая членом $\mu^2 \ln \mu$ по сравнению с единицей и слагаемым более высокого порядка малости, находим

$$F(\alpha) = \frac{i\pi\mu^2 \cos\alpha \cos\theta}{4\left(1 + \frac{\rho}{\rho_{\text{м}}}\frac{2a}{h}\right)}. \tag{10}$$

Последнее выражение отличается от формулы, описывающей рассеяние на абсолютно жесткой и неподвижной полосе, наличием в знаменателе второго слагаемого, зависящего от плотности материала и размеров полосы.

Решение системы уравнений (4) можно производить различными способами. Один метод основан на разложении неизвестных функций в ряды по собственным функциям ограниченной пластины в вакууме. Могут быть применены также различные вариационные методы или конечно-разностные способы.

Рассмотрим сначала первый из указанных методов в связи с тем, что он дает возможность провести физический анализ возникновения различных форм колебаний. Преобразуем сначала несобственный интеграл, входящий в уравнение (4). Пос-



Фиг. 2

ле первого дифференцирования, понимая интеграл в смысле главного значения, получим

$$\int_{-\mu}^{\mu} p_s'(u_1) H_0^{(1)} |u-u_1| du_1 + p_s(-\mu) H_0^{(1)} |u+\mu| - p_s(\mu) H_0^{(1)} |u-\mu|.$$

Из условия на краю пластины следует, что два последних слагаемых обращаются в нуль. (Применение этого условия предотвращает появление неинтегрируемых особенностей на краях, которые возникли бы после дифференцирования последнего выражения.) Дифференцирование второй раз дает

$$\int_{-\mu}^{\mu} p_s''(u_1) H_0^{(1)} |u-u_1| du_1 + p_s'(-\mu) H_0^{(1)} |u+\mu| - p_s'(\mu) H_0^{(1)} |u-\mu|. \tag{11}$$

Разложим колебательную скорость пластины в ряд по собственным функциям, удовлетворяющим однородному уравнению свободных колебаний

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - k_n^4 v(x) = 0. \tag{12}$$

Собственные функции для пластины со свободными краями имеют вид $X_n(k_n x) = \cos k_n(x+a) + \operatorname{ch} k_n(x+a) + \alpha_n[\sin k_n(x+a) + \operatorname{sh} k_n(x+a)]$, где

$$\alpha_n = -\frac{\cos 2\mu_n - \operatorname{ch} 2\mu_n}{\sin 2\mu_n - \operatorname{sh} 2\mu_n}, \quad \mu_n = k_n a. \tag{13}$$

Величины $2\mu_n$ являются собственными числами и удовлетворяют уравнению $\operatorname{ch} 2\mu_n \cdot \cos 2\mu_n = 1$.

Функции (13) удовлетворяют второму и третьему граничным условиям (6) и образуют ортогональную систему на участке $(-a, a)$ с нормой, равной $2a$

$$\int_{-a} X_n X_m \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2a & n = m \end{cases}.$$

К этим функциям следует добавить еще функции, соответствующие собственному значению $k_n = 0$. Из уравнения (12) следует, что значению $k_n = 0$ соответствует решение однородного уравнения в виде полинома третьей степени.

Из граничных условий следует, что коэффициенты при квадратичном и кубичном членах равны нулю. В результате мы получим решение $X = a_1 + a_2 x$, определяющее смещение пластины как твердого тела и поворот вокруг точки $x = 0$. Из условия нормировки получим $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{3}/a$. Теперь можно представить колебательную скорость в виде разложения

$$v(x) = \frac{1}{\rho c}\left[A_0 + \frac{\sqrt{3}}{a} B_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(k_n x)\right], \tag{14}$$

где A_n, B_n — неизвестные коэффициенты.

Подставив разложение (14) в уравнение (5), получим

$$Z_0\left(A_0 + \frac{\sqrt{3}}{a} x B_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n X_n(k_n x) = -2p_s(x), \tag{15}$$

где $Z_n = -\frac{i\omega M}{\rho c}\left(1-\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right)$ –нормированные безразмерные импеданцы механических колебаний пластины, $\omega_n = \frac{\mu_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{g}{M}}$ – угловые частоты собственных колебаний пластины в вакууме.

Подставим теперь выражения (14), (15) в уравнение (4); преобразовав его с помощью (11), получим уравнение

$$A_0 + \frac{\sqrt{3}}{a}xB_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(k_n x) = \cos\theta e^{ikx\sin\theta} -$$

$$-\frac{1}{4k}\int_{-a}^{a}\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n [k_n^2 X_n''(k_n\xi) + k^2 X_n(k_n\xi)] H_0^{(1)}(k|x-\xi|)\,d\xi -$$

$$-\frac{kZ_0}{4}\int_{-a}\left(A_0 + \frac{\sqrt{3}}{a}\xi B_0\right) H_0^{(1)}(k|x-\xi|)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{4k}\left[Z_0\frac{\sqrt{3}}{a}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n k_n X_n'(-\mu_n)\right] H_0^{(1)}(k|x+a|) +$$

$$+\left[Z_0\frac{\sqrt{3}}{a}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n k_n X_n'(\mu_n)\right] H_0^{(1)}(k|a-x|). \qquad (16)$$

Для сокращения дальнейших записей введем обозначения:

$$Z_{00} = \frac{1}{8\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu} H_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv;$$

$$Z_{0n} = \frac{1}{8\mu^3}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\mu_n^2 X_n''\left(\frac{\mu_n}{\mu}v\right) + \mu^2 X_n\left(\frac{\mu_n}{\mu}v\right)\right] H_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv +$$

$$+\frac{F(\mu)}{4\mu^2}\alpha_n\mu_n[1-(-1)^n];$$

$$Z_{-1,-1} = \frac{3}{8\mu^3}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu} uvH_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv + \frac{3}{2\mu^2}\left[H_1^{(1)}(2\mu) - \frac{F(\mu)}{2} + \frac{i}{\pi\mu}\right];$$

$$Z_{-1,n} = \frac{\sqrt{3}}{8\mu^4}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\mu_n^2 X_n''\left(\frac{\mu_n}{\mu}v\right) + \mu^2 X_n\left(\frac{\mu_n}{\mu}v\right)\right] uH_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{\mu^2}\mu_n\alpha_n\left[1+(-1)^n\right]\left[H_1^{(1)}(2\mu) - \frac{F(\mu)}{2} - \frac{i}{\pi\mu}\right];$$

$$Z_{nm} = \frac{1}{8\mu^3}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\mu_n^2 X_n''\left(\frac{\mu_n}{\mu}v\right) + \mu^2 X_n\left(\frac{\mu_n}{\mu}v\right)\right]\times \qquad (17)$$

$$\times X_m\left(\frac{\mu_m}{\mu}u\right) H_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv + \frac{\mu_n\alpha_n}{4\mu^2}(1+(-1)^n]S_m(\mu);$$

$$Z_{0m}=\frac{1}{8\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu}X_m\left(\frac{\mu_m}{\mu}u\right)\ H_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv;$$

$$Z_{-1,m}=\frac{\sqrt{3}}{8\mu^2}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{-\mu}^{\mu}vX_m\left(\frac{\mu_m}{\mu}u\right)H_0^{(1)}|u-v|\,du\,dv-\frac{\sqrt{3}}{8\mu^2}[1+(-1)^m]S_m(\mu);$$

$$F(\mu)=\int_0^{2\mu}H_0^{(1)}(u)\,du;\quad S_m(\mu)=\int_0^{2\mu}X_m\left(\frac{\mu_m}{\mu}(\mu-u)\right)H_0^{(1)}(u)\,du.$$

Проинтегрируем уравнение (16) по переменной x. В результате получим первое уравнение (18). Затем проинтегрируем (16), предварительно умножив обе его части на $\frac{\sqrt{3}}{a}x$, получим второе уравнение (18) и, наконец, умножив обе части на $X_m(k_m x)$ и проинтегрировав с учетом ортогональности собственных функций, получим третье уравнение

$$A_0(1+Z_0Z_{00})+\sum_{n=1}^{\infty}A_nZ_nZ_{0n}=\cos\theta\,a_0;$$

$$B_0(1+Z_0Z_{-1,-1})+\sum_{n=1}^{\infty}A_nZ_nZ_{-1,n}=\cos\theta\,a_{-1};\tag{18}$$

$$A_0Z_0Z_{0m}+B_0Z_0Z_{-1,m}+A_m+\sum_{n=1}^{\infty}A_nZ_nZ_{nm}=\cos\theta\,a_m\quad(m=1,2,\ldots)$$

Свободные члены определяются выражениями

$$a_0=\frac{\sin\mu_x}{\mu_x};\quad a_{-1}=\frac{i\sqrt{3}}{\mu_x^2}(\sin\mu_x-\mu_x\cos\mu_x);\ \mu_x=\mu\sin\theta.$$

При этом $a_0(0)=1$, $a_{-1}(0)=0$.

Для $n>0$ получим

$$a_n=\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}X_n\left(\frac{\mu_n}{\mu}u\right)e^{iu\sin\theta}\,du.$$

Вычисление интеграла удобно производить четырехкратным интегрированием по частям с учетом уравнения (13)

$$a_n=\frac{\mu_x^3}{\mu_x^4-\mu_n^4}\left\{(-1)^n e^{i\mu_x}\left(\frac{\mu_n}{\mu_x}\alpha_n+i\right)-e^{-i\mu_x}\left(\frac{\mu_n\alpha_n}{\mu_x}-i\right)\right\}.$$

Один из двойных интегралов в формулах (17) может быть вычислен аналитически путем применения формулы Дирихле. Это резко уменьшает объем вычислений при определении коэффициентов системы (18).

Рассмотрим возникновение незеркального отражения при дифракции звука на полосе. Заметим, что коэффициенты Z_{nn} определяют импеданцы излучения для поверхности, колеблющейся с распределением колебательной скорости $X_n(k_nx)$. При этом предполагается, что экран в плоскости пластины отсутствует. Величины Z_{nm} при $n\neq m$ являются импеданцами взаимодействия между различными формами колебаний.

Для пластины, размеры которой велики по сравнению с длиной волны, влияние экрана сказывается лишь на некоторой области вблизи краев пластины. При этом импеданцы излучения для пластины без экрана будут практически совпадать с импеданцами излучения для пластины

с экраном; для плоского поршня с равномерным распределением это имеет место уже при $l > \lambda$ (см., например, [5]).

При $\mu > 10$ импеданцы излучения Z_{nn} оказываются много больше импеданцев взаимодействия Z_{mn}. (Результаты расчета этих импеданцев приведены в работе [6].) Однако и при малых значениях μ оказывается, что Z_{nn} в несколько раз больше Z_{mn}. Это дает нам право в первом приближении пренебречь всеми импеданцами Z_{mn} при $m \neq n$. Из третьего уравнения системы (18) для изгибных движений пластины, полагая $A_0 = B_0 = 0$, получаем

$$A_m \approx \frac{a_m \cos\theta}{1 + Z_m Z_{mn}}. \tag{19}$$

В работе [3] показано, что при отражении звука от ограниченной пластины можно различать два типа резонансов — частотный и пространственный. Пусть для некоторой формы колебаний с номером m имеет место резонанс по частоте, т. е. $\omega = \omega_m$ и $Z_m = 0$. Тогда для этой частоты будет выполняться соотношение

$$\mu_m = \frac{\omega 2a}{c_{\text{и}}} \tag{20}$$

Максимальное по модулю значение a_m достигается при $\mu_x \approx \mu_m$ («пространственный резонанс» по терминологии работы [3]). В этом можно убедиться, приняв приближенно $\mu_m \approx \frac{\pi}{4}(1 + 2m)$. При условии $\mu_x \approx \mu_m$ максимальное значение a_m будет

$$(a_m)_{\max} = \sqrt{2}/2, \text{ т. е. } (A_m)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta.$$

Приравнивая μ_x правой части (20), получаем условие

$$\sin\theta \approx \frac{c}{c_{\text{и}}}. \tag{21}$$

В пределах принятых приближений это условие совпадает с условием возникновения максимума незеркального отражения от ограниченной упругой полосы в абсолютно жестком экране, подробно исследованным в работе [3].

Вычислим теперь максимально возможное значение амплитуды незеркального отражения. Зная амплитуду колебательной скорости, можно определить вклад резонансной формы колебаний

$$(p_s)_{\max} = \frac{\omega\rho}{2}\int_{-a}^{a} v(x) H_0^{(1)}(kr)\,dx.$$

При $kr \gg 1$ с учетом (14) найдем

$$(p_s)_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{ikr - i\pi/4}\, \frac{k\sqrt{2}}{4}\cos\theta \int_{-a}^{a} X_m(k_m x)\, e^{-ikx\sin\alpha}\, d\alpha.$$

Для больших значений m собственные функции принимают вид $X_m(k_m x) \approx \approx \cos k_m(x + a) - \sin k_m(x + a)$. Для направлений, соответствующих незеркальному отражению звука, следует положить $\alpha = -\theta$. После вычисления интеграла находим приближенно

$$(p_s)_{\max} = \mu\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{ikr - \frac{i\pi}{4}}\, \frac{\cos\theta}{2}.$$

Заметим теперь, что множитель, стоящий перед $^1/_2\cos\theta$, определяет поле, отраженное от абсолютно жесткой полосы больших волновых раз-

меров при нормальном падении звука. Обозначив эту величину через $p_s^{(0)}$, найдем

$$\left(\frac{p_s}{p_s^{(0)}}\right)_{\max} = \frac{\cos\theta}{2}. \tag{22}$$

Формула (21) дает оценку теоретически максимально возможного значения амплитуды незеркального отражения. Практически амплитуда незеркального отражения никогда не достигает этой величины. Действительно, стоит допустить некоторое искривление края пластины (порядка длины волны изгиба), неидеальные граничные условия на концах или наличие колебаний с распределением вдоль оси z, чтобы ухудшить возможность возникновения стоячей волны вдоль оси x и уменьшить амплитуду незеркального отражения. Кроме того, для возникновения интенсивного незеркального отражения необходимо, чтобы длина пластины была существенно меньше длины пространственного установления. Последний параметр был впервые введен в книге [3]. В этой работе также показано, что интенсивное незеркальное отражение может быть обусловлено не только изгибными колебаниями пластины, но и симметричными колебаниями сжатия. При этом угол максимума незеркального отражения определяется из условия $\sin\theta = c / c_{\text{пр}}$, где $c_{\text{пр}}$ — скорость продольной волны в пластинке.

Численные расчеты были выполнены в Вычислительном Центре Ленинградского государственного университета. Расчет производился по формулам (4′), (5′) с учетом формул (6) методом сеток с неравномерными интервалами между узлами, сгущавшимися к концам отрезка. Дифференциальное уравнение аппроксимировалось в узлах системой уравнений.

Применение неравномерной сетки необходимо в связи с тем, что по условию Мейкснера на ребре при $u = \pm\mu$ производная функции $p_s(x, y)$ может иметь особенность типа $1/\sqrt{u \pm \mu}$. Оценка показывает, что сетка с узлами $u_m = \mu\cos(m\pi / n)$, $n = 0, 1, \ldots, m$ для подобной функции дает погрешность вычисления интеграла порядка $O(1/n^2)$, т. е. ту же погрешность, что и для гладкой функции на равномерной сетке.

Дифференциальный и интегродифференциальный операторы, входящие в уравнения, аппроксимировались путем применения интерполяционно-квадратурных формул на заданной сетке, причем в уравнении (4′) сначала выделялась особенность. Минимальное количество узлов сетки равнялось 34. Это число ограничивалось необходимостью иметь в оперативной памяти машины (кроме программы) как минимум место для двух матриц, чтобы иметь возможность производить матричные умножения. Как показали вычисления, этого количества узлов оказалось достаточно для получения верных результатов счета (2—3 знака) вплоть до значения волнового параметра $2\mu = 62{,}8$, т. е. при длине пластины, равной десяти длинам звуковой волны. При большем значении волнового параметра хорошие результаты можно получить с помощью обычного приближенного метода Кирхгофа.

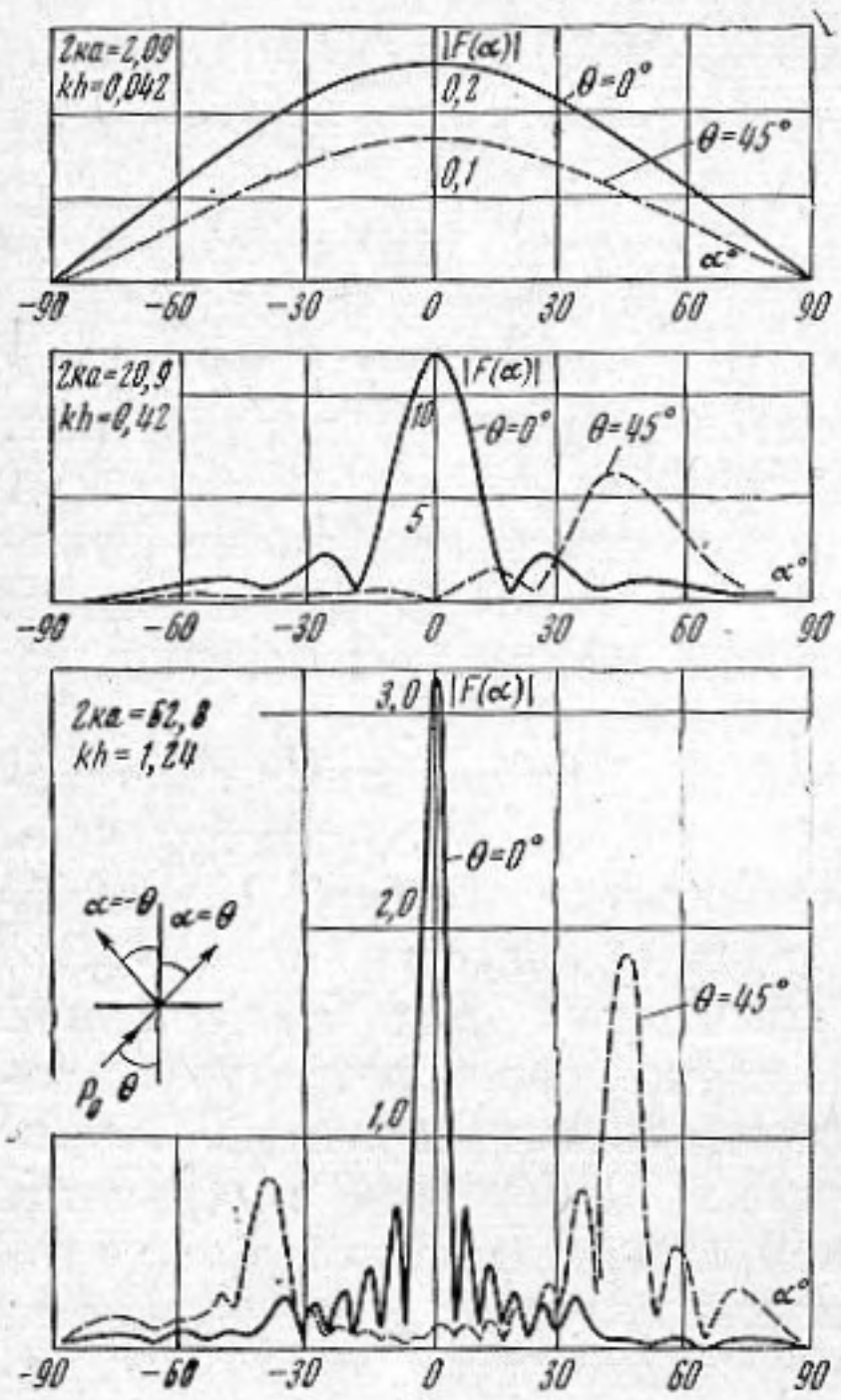
На фиг. 2 приведено для примера распределение рассеянного поля на поверхности полосы в низкочастотной области. В соответствии с условием Мейкснера на конце выполняется условие $p_s(\mu) = 0$, а производная имеет особенность типа $1/\sqrt{\mu - u}$. Для сравнения штриховой кривой показан график функции (9), использованной для получения низкочастотной асимптотики. Штрихи на оси абсцисс соответствуют узлам сетки.

На фиг. 3 показаны диаграммы направленности рассеяния плоской волны на упругой полосе при различных значениях частоты звука при фиксированных толщине и длине пластины при углах падения $\theta = 0°$ и $\theta = 45°$.

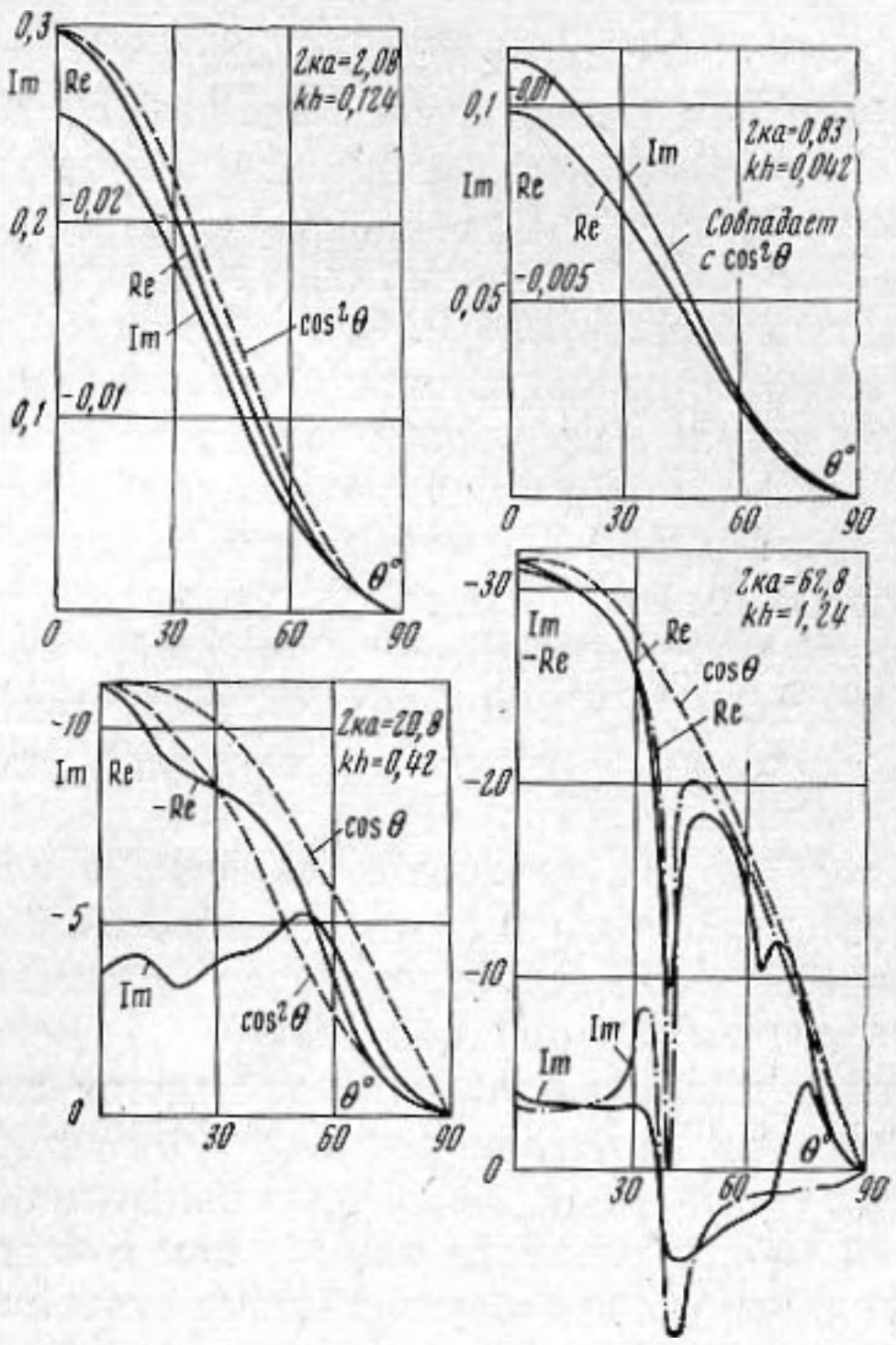
В соответствии с формулой (10) при малом значении μ диаграмма направленности рассеяния практически совпадает с функцией $\cos\alpha$. Отличия диаграммы при углах 0 и 45° проявляются лишь в изменении макси-

мального значения. При этом максимум диаграммы при наклонном падении не направлен зеркально по отношению к направлению падающей волны, а практически остается на нормали к пластине.

По мере увеличения волнового размера пластины максимум становится более узким. При наклонном падении вершина максимума начинает смещаться и при $\mu \gg 1$ для $\theta = 45°$ максимум появляется также при $\alpha = 45°$ в соответствии с геометрическими представлениями.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фигуре для значения $2\mu = 62{,}8$ четко виден максимум слева от оси ординат, соответствующий интенсивному незеркальному отражению звука. Его относительное значение равно 0,26. Наибольшее возможное значение по формуле (22), равное 0,35 для данного частного случая, здесь не достигается, т. к. $c/c_и = 0{,}63$, в то время как $\sin\theta = 0{,}707$. Заметим, что даже при точном соблюдении равенства (21) максимальное значение могло оказаться несколько ниже величины $^1/_2 \cos\theta$, поскольку это условие является приближенным, и для поиска максимального значения следовало бы численно в небольших пределах варьировать параметры. Кроме того, учет конечной длины пространственного установления также должен исказить оценку.

Можно сравнить полученные результаты для упругой пластинки с известными данными по рассеянию на абсолютно жесткой полосе. В низкочастотном диапазоне ниже частоты первого резонанса свободной пластины все импеданцы механических колебаний Z_n являются большими величинами $(Z_n \gg 1,\ Z_n \gg Z_m)_n$. Поэтому изгибные колебания пластины практически не возбуждаются и пластина ведет себя как недеформируемое тело, обладающее конечной массой и моментом инерции. Формула (10) учитывает возможность смещения пластины как твердого тела. Она является аналогом формулы Рэлея для абсолютно жестких цилиндра или сферы. Расчет показывает, что в данном примере при $\mu \approx 1$ амплитуда в макси-

муме диаграммы направленности рассеяния приблизительно вдвое меньше амплитуды для абсолютно жесткой полосы. При увеличении толщины пластины, как и следует ожидать, эта разница уменьшается.

При больших значениях μ основной максимум диаграммы рассеяния почти полностью совпадает с кривой, полученной в приближении Кирхгофа (8). Поскольку при принятых значениях параметров пластины $A_{\text{отр}} \approx \approx 1$, то $|F(0)| \approx \mu$. Действительно, на фиг. 2 значения ординат кривых для $\mu \gg 1$ при $\alpha = 0$ приблизительно равны параметру $\mu = ka$. Упругие колебания пластины при этих значениях μ приводят к появлению уже упоминавшегося незеркального отражения.

На фиг. 4 показаны зависимости вещественной и мнимой частей диаграммы рассеяния в направлении «вперед» $\alpha = 0$ от угла падения звука на пластину.

При малых значениях μ в соответствии с формулой (10) кривые спадают по закону $\cos^2\theta$. Это и понятно, т. к. при увеличении угла падения, проекция полосы уменьшается по закону $\cos\theta$, а при малых μ рассеяние уменьшается пропорционально квадрату волнового размера препятствия.

При увеличении волновой длины кривые приближаются к закону $\cos\theta$. Например, при $2ka = 20{,}8$ график для $\mathrm{Re}F$ лежит между графиками функций $\cos\theta$ и $\cos^2\theta$. При дальнейшем увеличении волновой длины закон изменения значений $\mathrm{Re}\,F$ и $\mathrm{Im}\,F$ приближается к закону, описываемому формулой (8), т. е. фактически к приближению Кирхгофа.

Рассмотрим подробнее графики для $2\mu = 62{,}8$. При заданных значениях волновых параметров имеет место соотношение $c_{\text{и}} > c$, причем $\theta_{\text{и}} = = \arcsin(c/c_{\text{и}}) \approx 40°$. При $\theta = \theta_{\text{д}}$ в соответствии с формулой (8) коэффициент отражения от безграничной пластины обращается в нуль. Это значение угла соответствует резонансу совпадений для безграничной пластины. Поэтому вблизи $\theta = \theta_{\text{и}}$ рассеяние звука вперед резко уменьшается и пластина оказывается почти полностью звукопрозрачной. В приближении Кирхгофа (штрих-пунктирные кривые) $\mathrm{Re}\,F$ и $\mathrm{Im}\,F$ обращаются также в нуль. Однако, если бы ограниченная пластина вблизи этого угла вела себя в точности так же как и безграничная пластина, то в связи с ее полной звукопрозрачностью незеркальное отражение звука при $\theta = \theta_{\text{и}}$ отсутствовало бы. Однако теория дает при $\theta \doteq \theta_{\text{и}}$ не минимальное, а максимальное значение уровня незеркального отражения. Это говорит о том, что ограниченная пластина не может быть полностью звукопрозрачной даже на частоте резонанса совпадений. Как видно из фиг. 4, результаты точного расчета (сплошная кривая) дают значения, не равные нулю вблизи $\theta = \theta_{\text{и}}$.

Огибающая кривой хорошо описывается функцией $\cos\theta$ в соответствии с приближением Кирхгофа. Следует обратить внимание на отклонение от этого закона вблизи скользящих углов падения. Действительно, вблизи скользящих углов проекция пластины становится малой и приближение Кирхгофа будет неприменимым. В этой области углов функция $\cos^2\theta$ лучше аппроксимирует теоретические кривые.

Экспериментальное исследование незеркального отражения звука было выполнено в работах [1—3], причем в работе [1] приведена фотография аномального прохождения звука через пластину, а в книге [3] подробно исследовано возникновение аномалий в результате изгибных и продольных волн.

Фотографии звукового поля, дифрагированного на ограниченной упругой пластинке, приведены в работе. Если условие (21) не выполняется, то волна практически полностью отражается. За пластиной образуется глубокая тень. При выполнении условия (21) появляется заметное прохождение звуковой волны. Появление аномального прохождения можно проследить по боковому лучу, возникающему со стороны прошедшей волны. Незеркальное отражение непосредственно со стороны падающей волны выделить труднее, т. к. оно накладывается на интенсивную падающую

волну. Однако и здесь его можно заметить, обратив внимание на фронты в стоячей волне вблизи поверхности пластины. В треугольнике, образованном падающей и зеркально отраженной волной, наблюдаются обычные фронты, параллельные поверхности пластины, однако вне этого треугольника видны фронты, перпендикулярные направлению падения. Они являются следствием интерференции падающей волны и незеркально отраженной волны.

Фотометрическая обработка негативов фотографий, выполненная по методике, приведенной в работе дала возможность определить максимальный уровень незеркального отражения. Он оказался равным 0,19, что несколько ниже, чем значение, полученное по формуле (21).

Простой расчет показывает, что длина пространственного установления для пластины с заданными параметрами меньше длины самой пластины. Поэтому интенсивное незеркальное отражение дают лишь участки вблизи края пластины. Это хорошо заметно на фотографии.

В заключение выражаю признательность В. Я. Ривкинду, Б. А. Самокишу, И. В. Царицыной за программирование и выполнение расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. I. Makarov, S. N. Rshevkin. Untersuchungen der Schallausbreitung in festen Körpern Platten und Schallen mittels eines optischen Verfahrens im Dunkelfeld. Proc. 3rd Intern. Congr. on Acoustics. Sept. 1959, p. 398—403.
2. W. F. Finney. Reflection of Sound from Submerged Plates. J. ASA, v. 20, 1948, 626—633.
3. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости. Изд. АН СССР, М., 1955.
4. Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. «Мир», М., 1964 г.
5. Л. Я. Гутин. К теории излучения звука осциллирующим поршнем. ЖТФ, 1937, 7, 10, 1534—1541.
6. Е. Л. Шендеров. Прохождение звука через тонкую пластину с опорами. Акуст. ж., 1964, 10, 2, 229—234.

Ленинград

Поступила в редакцию
6 мая 1971 г.