$$M_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{(\pi - k\sin\theta)^2 - k^2}}{8\pi}.$$

Поскольку $\mu(\xi, \eta)$ найдена, функция $f_0(\xi, \eta)$ определяется по формуле (13). Функции f_m определяются из условия квазипериодичности

$$f_m(\xi, \eta + 2hm) = f_0(\xi, \eta)\exp(2iKhm\sin\theta)$$

Замечание. В том случае, когда на экране задано однородное условие Дирихле $U|_\Gamma = 0$, задача решается аналогично, только поле $V(x, y)$ следует искать в виде

$$V(x, y) = \int\limits_{L_0} \mu(\xi, \eta)\frac{i}{2}[G(\xi, \eta, x, y) - G(\xi, \eta, -x - 2h_1, y)]ds.$$

Акустический институт АН СССР,
Москва

Поступила в редакцию
23 марта 1971 г.

УДК 534.231.1

К ВОПРОСУ ОБ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ ПЛОСКОГО ИМПУЛЬСА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКИХ СРЕД

И. Д. Иванов

§ 1. В казалось бы простой задаче об отражении плоского звукового импульса от плоской границы раздела двух жидкостей, исследованной в работах [1—3] (см. также работу [4]), до сих пор существовали принципиальные неясности. Действительно, в указанных работах для случая полного внутреннего отражения для отраженного и преломленного импульсов получены решения, содержащие предвестники, приходящие как угодно рано, и хвосты, существующие сколь угодно долго после прихода основного импульса. С другой стороны, случай плоского импульса можно получить как предельный случай отражения сферического импульса при удалении источника на бесконечность. Последняя задача была рассмотрена Тауном [5, 6]. При этом оказалось, что как предвестники, так и хвосты в отраженной и преломленной волнах отсутствуют. В частности, предвестник, который обычно отождествлялся с боковой волной, здесь исчезает потому, что его амплитуда (см. работу [4]) убывает при увеличении R — расстояния до источника как $1/R^2$ по сравнению с $1/R$ для обычной отраженной и преломленной волн.

Противоречие в результатах двух подходов к задаче объясняется, по-видимому, тем, что задача об отражении плоского импульса ставилась без привлечения начальных условий и, следовательно, неоднозначно. Кроме решений, найденных в работах [1—3] и в работе [5], можно было бы, по-видимому, найти сколько угодно других решений, удовлетворяющих тем же волновым уравнениям и граничным условиям, но разным начальным условиям.

После анализа решений, полученных в работах [1—3], нами получено решение задачи о плоском импульсе, которое, как и при предельном переходе в работах [4, 5], не имеет ни предвестников, ни хвостов, и отлично от нуля только в ограниченном интервале времени, если в этом интервале времени ограничен падающий импульс.

§ 2. Пусть c_1, ρ_1 и c_2, ρ_2 — акустические параметры в верхней ($z < 0$) и нижней ($z > 0$) средах соответственно, $n = c_1/c_2$, $m = \rho_2/\rho_1$, причем $n < 1$, p — падающий импульс в верхней среде (фиг. 1)

$$p = f\left(\xi - \frac{z}{c_1}\cos\theta_1\right), \qquad \xi = t - \frac{x}{c_1}\sin\theta_1, \tag{1}$$

представимый интегралом Фурье

$$p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega\zeta^-}d\omega, \qquad \zeta^- = \xi - \frac{z}{c_1}\cos\theta_1. \tag{2}$$

Требуется найти p_1 — отраженный импульс и p_2 — преломленный импульс, т. е. найти решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_j}{\partial z^2} = \frac{1}{c_j^2}\frac{\partial^2 p_j}{\partial t^2}, \qquad j = 1, 2 \tag{3}$$

при соответственных граничных условиях на плоскости $z = 0$.

При $\theta_1 < \theta_n$, $\theta_n = \arcsin n$, отраженный и преломленный импульсы представляются интегралами, аналогичными (2), и отличаются от падающего импульса постоянными множителями

$$p_1 = Vf(\zeta), \qquad \zeta = \xi + \frac{z}{c_1}\cos\theta_1,$$

$$p_2 = Wf\left(\xi - \frac{z}{c_1}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}\right) = Wf\left(\xi - \frac{z}{c_2}\cos\theta_2\right);$$

они удовлетворяют вместе с падающим импульсом (1) граничным условиям

$$p + p_1 = p_2, \tag{4}$$

$$m\frac{\partial}{\partial z}(p + p_1) = \frac{\partial p_2}{\partial z} \tag{5}$$

на границе раздела $z = 0$ в полосе, для которой выполняется неравенство

$$|\xi| < T, \tag{6}$$

причем $2T$ — длительность падающего импульса. Выше V и W — вещественные коэффициенты отражения и прохождения.

Предположим теперь, что $\theta_1 > \theta_n$. Решения p_1 и p_2 можно представить в виде интеграла по частотам от частных решений:

$$p_1(\omega) = Ve^{-i\omega\zeta} = (\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)\, e^{-i\omega\zeta}, \tag{7}$$

$$p_2(\omega) = We^{-i\omega\xi - \omega\frac{z}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} = (2\cos^2\varphi - i\sin 2\varphi)\, e^{-i\omega\xi - \omega\frac{z}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}, \tag{8}$$

где

$$V = e^{2i\varphi}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}{m\cos\theta_1}. \tag{9}$$

В задаче об отражении плоского импульса волновое уравнение (3) решается без начальных данных. Интегрируя выражения (7) и (8) по разным контурам в плоскости комплексного переменного ω, можно получить различные решения уравнения (3).

§ 3. Умножая выражения (7) и (8) на спектральную функцию и интегрируя по вещественной оси, как и в случае, когда $\theta_1 < \theta_n$, вводя множитель

$$\operatorname{sign}\omega = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \omega > 0 \\ -1, & \text{если} \quad \omega < 0 \end{cases}$$

при корне $\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}$ в формулах (7)—(9), Вильямс [1] получил:

$$p_1 = f_1(\zeta) = f_1^{(0)}(\zeta) + f_1^{(1)}(\zeta),$$

$$p_2 = f_2(\xi, \eta) = f_2^{(0)}(\xi, \eta) + f_2^{(1)}(\xi, \eta), \qquad \eta = \frac{z}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2},$$

где

$$f_1^{(0)}(\xi) = \cos 2\varphi f(\zeta), \qquad f_1^{(1)}(\zeta) = \sin 2\varphi f_{\text{н}}(\zeta),$$

$f_{\text{н}}(\zeta)$ — преобразование Гильберта функции $f(\zeta)$,

$$f_{\text{н}}(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - \xi}$$

(интеграл понимается в смысле главного значения),

$$f_2^{(0)}(\xi, \eta) = 2\cos^2\varphi\,\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha - \xi)^2 + \eta^2},$$

$$f_2^{(1)}(\xi, \eta) = \sin 2\varphi\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\alpha - \xi)f(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha - \xi)^2 + \eta^2}.$$

Эти решения ранее получил Фридлендер [2], преобразуя волновое уравнение (3) с граничными условиями (4)—(5) при $z = 0$ в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} = 0$$

с граничным условием

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi}\right)_{\eta=0} - \operatorname{tg}\varphi \left(\frac{\partial f_2}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = 2f'(\xi) \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad -\infty \leqslant \xi \leqslant \infty.$$

Из приведенных решений получается, в частности, при $f(\zeta^-) = e^{-\lambda\zeta^-}h(\zeta^-)$ решение Аронса и Йенни [3]

$$p_1 = \cos 2\varphi e^{-\lambda\zeta}h(\zeta) - \frac{1}{\pi}\sin 2\varphi e^{-\lambda\zeta}Ei(\lambda\zeta),$$

где $Ei(\lambda\zeta)$ — интегральная показательная функция, $h(\zeta)$ — единичная функция.

Таким образом, отраженный импульс представляется в виде суперпозиции двух импульсов, $f_1^{(0)}(\zeta)$ и $f_1^{(1)}(\zeta)$, первый из которых имеет длительность падающего импульса, отличаясь от него постоянным множителем $\cos 2\varphi$, второй импульс не равен нулю при всех значениях ξ; преломленный импульс представляется в виде суперпозиции импульсов $f_2^{(0)}(\xi, \eta)$ и $f_2^{(1)}(\xi, \eta)$, причем решения $f(\zeta^-)$, $f_1^{(0)}(\zeta)$, $f_2^{(0)}(\xi, \eta)$, с одной стороны, и $f_1^{(1)}(\zeta)$, $f_2^{(1)}(\xi, \eta)$, с другой стороны, в отдельности удовлетворяют граничному условию (4). Однако для производных этих решений по отдельности граничное условие (5) не выполняется, хотя решения $f(\zeta^-)$, $f_1(\zeta)$, $f_2(\xi, \eta)$ ему удовлетворяют, поскольку производные подчиняются при $z = 0$ условиям

$$m\frac{\partial}{\partial z}(f + f_1^{(0)}) = \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial z}, \qquad m\frac{\partial f_1^{1}}{\partial z} = \frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial z}.$$

§ 4. Умножая выражения (7) и (8) на $g(\omega)$ и интегрируя по контуру, проходившему в правой полуплоскости, в которой выражения (7) и (8) являются аналитическими функциями, можно получить другое решение задачи об отражении импульса. Получим это решение в одном конкретном случае. Пусть излучаемый импульс описывается вещественной частью функции

$$f(\zeta^-) = \begin{cases} e^{-i\omega_0\zeta^-} & \text{при} \quad -T < \zeta^- < T \\ 0 & \text{вне интервала} \; -T < \zeta^- < T \end{cases} \tag{10}$$

Сначала можно рассмотреть импульс, описываемый функцией

$$f(\zeta^-) = \begin{cases} e^{-i\omega_0\zeta^-} & \text{при} \quad \zeta^- > 0 \\ 0 & \text{при} \quad \zeta^- < 0, \quad \zeta^- = t - \dfrac{x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1}{c_1}, \end{cases} \tag{11}$$

обобщенным преобразованием Фурье которой является функция

$$g(\omega) = \frac{1}{i(\omega - \omega_0 + i\varepsilon)}, \qquad \varepsilon \to +0. \tag{12}$$

Учитывая, что решение волнового уравнения (3) в пространственно-временных областях, разделенных характеристикой $\zeta^- = 0$, можно представить интегралом вида (2) по различным контурам, получаем для падающего импульса (11) вместо выражения (2) интегральное представление

$$p = \begin{cases} p^- & \text{при} \quad \zeta^- < 0 \\ p^+ & \text{при} \quad \zeta^- > 0 \end{cases}, \tag{13}$$

где

$$p^{\mp} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^{\pm}} \frac{e^{-i\omega\zeta^-}}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon}\,d\omega. \tag{14}$$

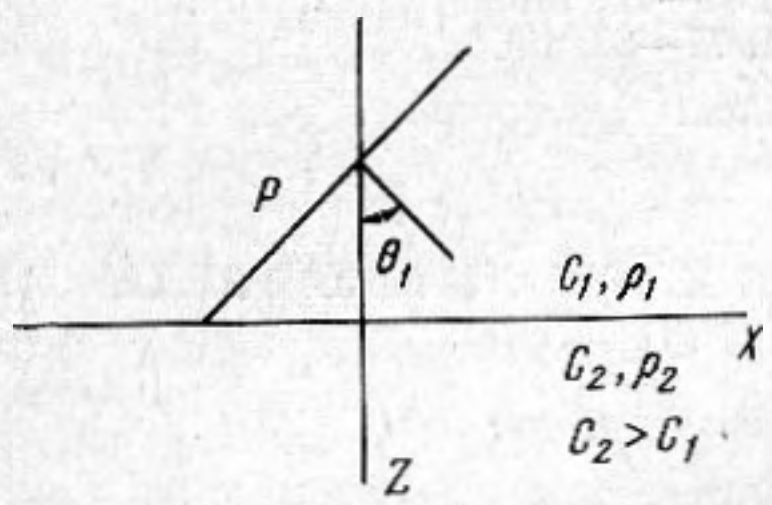
Контур C^- проходит по положительной оси из бесконечности до нуля и по положительной вещественной оси, контур C^+ проходит по отрицательной мнимой оси из бесконечности до нуля и по положительной вещественной оси (фиг. 2). В интеграле (14) надо перейти к пределу $\varepsilon \to 0$ и обходить полюс ω_0 сверху. Для падающего импульса интегральные представления (14) и (2), где $g(\omega)$ определяется равенством (12), эквивалентны, поскольку контуры C^- и C^+ можно совместить с вещественной осью.

Отраженный и преломленный импульсы представляются интегралами, аналогичными интегралу (14)

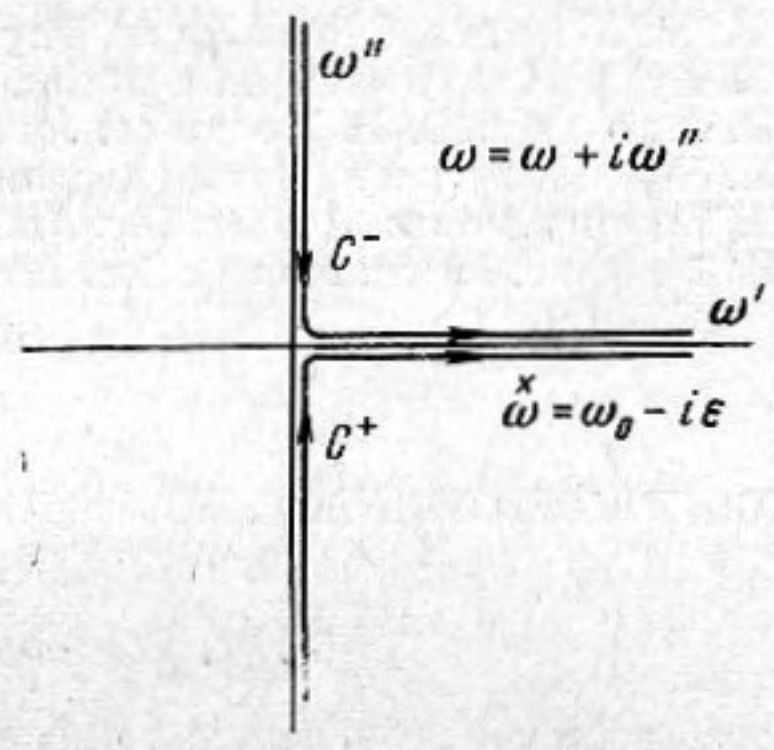
$$p_1^{\mp} = \frac{1}{2\pi i} e^{-2i\varphi} \int\limits_{C^{\mp}} \frac{e^{-i\omega\zeta}}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} d\omega \quad \text{при} \quad \zeta \lessgtr 0, \tag{15}$$

$$p_2^{\mp} = \frac{1}{\pi i} \cos\varphi \cdot e^{-i\varphi} \int\limits_{C^{\mp}} \frac{e^{-i\omega\xi - \omega \frac{z}{c_1} \sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}}}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} d\omega \quad \text{при} \quad \xi \lessgtr 0. \tag{16}$$

Деформируя контур C^- в контур C_∞^-, совпадающий с дугой окружности $0 \leqslant \arg\omega \leqslant \pi/2$ при $|\omega| \to \infty$ в первом квадранте, и аналогично деформируя C^+



Фиг. 1



Фиг. 2

в четвертом квадранте, получаем из формул (15) и (16) решения p_1 и p_2

$$p_1 = \begin{cases} p_1^- = 0 & \text{при} \quad \zeta < 0 \\ p_1^+ = e^{-i(\omega_0\zeta + 2\varphi)} & \text{при} \quad \zeta > 0, \end{cases}$$

$$p_2 = \begin{cases} p_2^- = 0 & \text{при } \xi < 0 \\ p_2^+ = 2\cos\varphi \cdot e^{-i(\omega_0\xi + \varphi) - \omega_0 \frac{z}{c_1} \sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} & \text{при } \xi > 0 \end{cases}$$

или, отделяя вещественную часть,

$$p_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \zeta < 0 \\ \cos(\omega_0\zeta + 2\varphi) & \text{при} \quad \zeta > 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$p_2 = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \xi < 0 \\ 2\cos\varphi \cos(\omega_0\xi + \varphi)\, e^{-\omega_0 \frac{z}{c_1} \sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} & \text{при} \quad \xi > 0. \end{cases} \tag{18}$$

Теперь найдем выражения отраженного и преломленного импульсов в случае, когда падающий импульс описывается функцией (10). Для отраженного импульса получаем интегральное представление

$$p_1^{\mp} = \frac{1}{2\pi i} \left[e^{-2i\varphi + i\omega_0 T} \int\limits_{C^{\mp}} \frac{e^{-i\omega(\zeta + T)}}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} d\omega - e^{-2i\varphi - i\omega_0 T} \int\limits_{C^{\mp}} \frac{e^{-i\omega(\zeta - T)}}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} d\omega \right]. \tag{19}$$

Деформируя контуры $C^{\mp}$ так же, как при вычислении интеграла (15), получаем из формулы (19) выражение для отраженного импульса

$$p_1 = \begin{cases} \cos(\omega_0\zeta + 2\varphi) = \cos^2\varphi \cos\omega_0\zeta - \sin 2\varphi \sin\omega_0\zeta & \text{при} \quad -T < \zeta < T, \\ 0 \quad \text{вне интервала} \quad -T < \zeta < T, \end{cases} \tag{20}$$

из которого следует, что длительность импульса не изменяется при отражении, но форма отраженного импульса отличается от формы падающего импульса. Аналогично получаем выражения для преломленного импульса

$$p_2 = \begin{cases} 2\cos\varphi \cos(\omega_0\xi + \varphi)\, e^{-\omega_0 \frac{z}{c_1} \sqrt{\sin^2\theta_1 - n^2}} & \text{при} \quad -T < \xi < T \\ 0 \quad \text{вне интервала} \quad -T < \xi < T. \end{cases} \tag{21}$$

Решения (20) и (21) удовлетворяют граничным условиям (4) и (5) в полосе, определяемой равенством (6), как и в случае, когда $\theta_1 < \theta_n$.

Неоднозначность решения задачи об отражении и преломлении плоского импульса можно устранить, решая задачу об отражении и преломлении сферического импульса с начальными данными и удаляя излучатель в бесконечность в фиксированном направлении, определяемом углом, превышающем угол полного внутреннего отражения. Решение такой задачи методом Лапласа — Каньяра получил Тауп [5, 6]. Предельный переход в этом решении показывает, что если падающий импульс отличен от нуля в конечном интервале, то отраженный плоский импульс отличен от нуля также в конечном интервале времени.

Автор приносит благодарность академику Л. М. Бреховских за дискуссию по рассматриваемому кругу вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

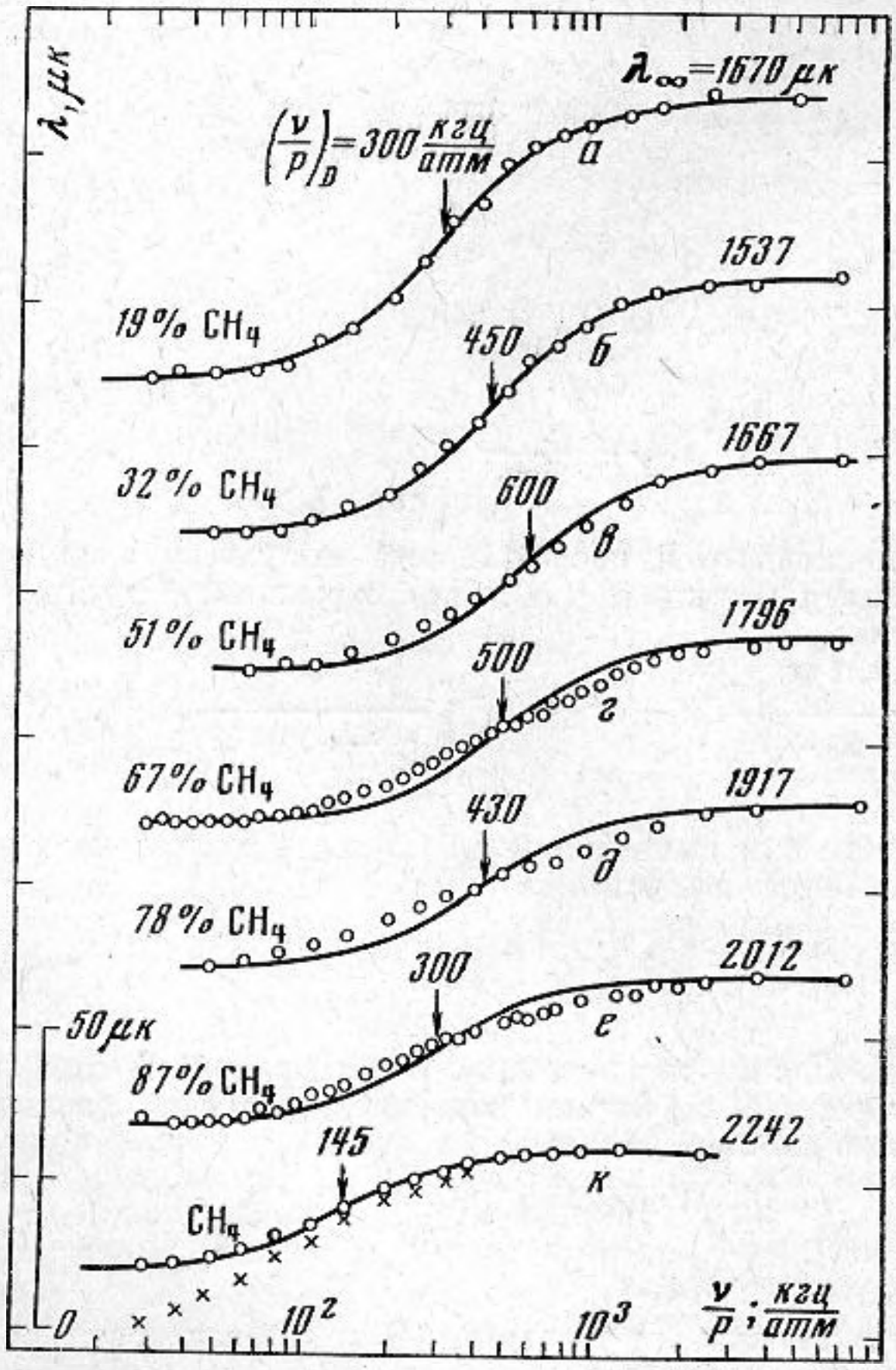
1. W. E. Williams. Canad. Journ. Phys., **39**, 2, 272—275, 1961.
2. F. G. Friedlander. Quart. Journ. Mech. a. Appl. Math., **1**, 4, 376—384, 1948.
3. A. B. Arons a. D. R. Yennie. Journ. Acoust. Soc. Am., **22**, 2, 231—137, 1950.
4. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, 1957 г.
5. D. H. Towne. Journ. Acoust. Soc. Am., **44**, 1, 65—76, 1968.
6. D. H. Towne. Journ. Acoust. Soc. Am., **44**, 1, 77—83, 1968.

УДК 534.286

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В ГАЗОВОЙ СМЕСИ CO_2 — CH_4

Ч. С. Лайдабон, В. Ф. Яковлев

Колебательная релаксация в смеси CO_2 с CH_4 была исследована по поглощению Бауэром и Шоттером [1] при 80° С. Было измерено поглощение ультразвука при пяти значениях концентрации и для некоторых из них был обнаружен сложный релаксационный процесс, описываемый двумя временами релаксации. Было интересно провести исследование релаксационных такого рода явлений на основе измерения скорости ультразвука.



Поскольку даже малейшие примеси воды сильно влияют на колебательную релаксацию в CO_2 [2, 3], производилась дополнительная очистка газов. Исходная двуокись углерода (ГОСТ-8050-64) содержала примеси азота и инертных газов до 5% и ее влажность составляла примерно 0,1%. CO_2 дополнительно очищалась от примесей методом «отгонки по Релею» и степень чистоты контролировалась стандартным газоанализатором МХТИ-3. Исходный метан (МРТУ-6-09-4559-67) содержал 0,5% примесей (этан — 0,4%, пропан — 0,05% и бутан — 0,05%) и его влажность составляла около 0,02%. Применяемые газы очищались от воды методом адсорбции паров воды цеолитом типа NaX-TK и контролировались на приборе КИВГ. В результате примесь в CO_2 оказалась не более 0,5% и влажность смеси не превышала $4{,}5 \cdot 10^{-3}$%. Концентрации смесей определялись с точностью до 0,5%.

Измерение длины волны ультразвука производилось акустическим интерферометром с приемным кварцем на частоте 200,7 *кгц* при температуре 20° С. Перемещение кварца и контроль базы интерферометра осуществлялись с точностью до 2 *мк*, что позволяло измерять длину волны ультразвука с точностью до 0,01%.

Исследование области колебательной релаксации смесей про-