АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 2

УДК 534.12

О КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

С. А. Рыбак

Для задачи о колебаниях тонких упругих оболочек, параметры которых мало изменяются на расстояниях порядка длины безмоментной волны в случае точечного источника, найдены решения в форме бегущих волн. Определены входные импедансы в предположении, что отраженные волны отсутствуют.

Исследование динамики оболочек представляет значительные трудности из-за громоздкости системы уравнений, описывающих их деформацию. В отличие от тонких пластин для оболочек в общем случае характерна связь различных типов колебаний, вследствие чего приходится рассматривать одновременно систему трех дифференциальных уравнений относительно трех компонент вектора смещения. Коэффициенты этих уравнений содержат в сложных комбинациях параметры первой квадратичной формы средней поверхности оболочки $A_1(\alpha_1\alpha_2)$ и $A_2(\alpha_1\alpha_2)$ и главные кривизны $q_1(\alpha_1\alpha_2)$ и $q_2(\alpha_1\alpha_2)$ как функции ортогональной системы координат $\alpha_1\alpha_2$. Аналитические решения имеются по существу лишь для малого числа характерных для механики ограниченных оболочек краевых задач, отвечающих частным видам геометрии оболочек.

Однако при высоких частотах возможен более простой подход к задаче о колебаниях оболочек, предполагающий в первую очередь рассмотрение бегущих волн, так как отражение от границ и препятствий может быть рассмотрено отдельно, а в оболочках с сильным затуханием либо с сильным рассеянием на неоднородностях (для среднего поля) отражение от границ может оказаться несущественным.

Мы рассмотрим ниже случай, когда величины A_1, A_2, q_1, q_2 — плавно изменяющиеся функции, так что их изменение на расстояниях характерного изменения поля λ (длина волны) мало. Система дифференциальных уравнений будет при этом содержать лишь медленно изменяющиеся параметры, и ее асимптотические решения можно будет искать в форме бегущих волн.

Для описания колебаний оболочки воспользуемся системой уравнений технической теории оболочек, в форме, предложенной Власовым [1]. Существуют различные варианты уточнения этих уравнений, позволяющие сделать их применимыми при не слишком малых частотах. Однако в области средних частот, когда выполняются неравенства $kh \approx 1$, где $k = \dfrac{\omega}{C_t}$ необходимо последовательное обращение к трехмерной задаче теории упругости. Разложение соответственных уравнений по малым параметрам типа kh и дает искомые поправки (см., например, работу [2]). Ниже мы всюду предполагаем $kh \ll 1$. При этих условиях теория оболочек, развитая В. З. Власовым, применима с достаточной точностью.

В символической форме уравнения движения имеют вид:

$$L_{ik}U_k - m\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = P_i \tag{1}$$

$$i,\ k = 1,\ 2,\ 3.$$

Напишем матрицу линейных дифференциальных операторов L_{ik} в криволинейной ортогональной системе координат, заданной на средней поверхности оболочки, причем первую квадратичную форму поверхности представим выражением

$$dS^2 = A_i^2 d\alpha_i^2$$

$$i = 1,\ 2. \tag{2}$$

В принятых выше обозначениях

$$\frac{1}{B} L_{11} U_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 U_1) \right\} +$$

$$+ (1-\nu) \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ \frac{1}{2A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 U_1) \right\} + (1-\nu) q_1 q_2 U_1;$$

$$\frac{1}{B} L_{12} U_2 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left\{ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 U_2) \right\} -$$

$$-(1-\nu) \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ \frac{1}{2A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 U_2) \right\};$$

$$\frac{1}{B} L_{13} U_3 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [(q_1 + q_2) U_3] - (1-\nu) \frac{q_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} U_3;$$

$$\frac{1}{B} L_{31} U_1 = -(q_1 + q_2) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 U_1) + (1-\nu) \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 q_2 U_1);$$

$$\frac{1}{B} L_{33} U_3 = \frac{h^2}{12} [\Delta (q_1^2 + q_2^2) + \Delta^2] U_3 + (q_1 + q_2)^2 U_3 - 2(1-\nu) q_1 q_2 U_3; \tag{3}$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2},$$

где

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right].$$

Выражения $L_{2,1}U$; $L_{2,2}U_2$; $L_{2,3}U_3$; $L_{3,2}U_2$ получаются, если поменять местами индексы 1, 2 в написанных выше операциях.

Будем искать решение системы (1) в виде

$$U_l = a_l e^{iS(\alpha_1 \alpha_2)} \tag{4}$$

при $l = 1, 2, 3$; a_l, вообще говоря, функции от α_1, α_2.

Следуя предположению о плавности функций A_ν, q_ν ($\nu = 1, 2$), будем считать, что выполняются неравенства

$$\left| \frac{1}{A_\nu} \frac{\partial A_\nu}{\partial \alpha_\nu} \right| \ll |K_\mu|, \qquad \left| \frac{1}{q} \frac{\partial q_\mu}{\partial \alpha_\nu} \right| \ll |K_\nu|, \qquad \left| \frac{1}{q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \alpha_\nu} \right| \ll |K_\nu|, \tag{5}$$

где $k_\nu = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_\nu}$ и ν, $\mu = 1, 2$. При выполнении этих условий можно, определяя $S(\alpha_1, \alpha_2)$ путем подстановки выражений (4) в систему (1), пренебречь в первом приближении производными от $A_\nu q_\nu$ и a_l сравнительно с $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_\nu}$.

Можно показать, что следствием неравенств (5) является неравенство

$$\frac{1}{A_\nu^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_\nu} \right)^2 \gg \frac{1}{A_\mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} \left(\frac{1}{A_\nu} \frac{\partial S}{\partial \alpha_\nu} \right), \tag{6}$$

физический смысл которого станет ясен, если ввести обозначение $\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial S}{\partial \alpha_\nu}=\frac{\omega}{C_\nu}$, где $\omega=\frac{2\pi C_\nu}{\lambda_\nu}$ — круговая частота, а C_ν имеет смысл локальной скорости распространения некоторого типа волн. Подставив $\frac{\omega}{C_\nu}$ в неравенство (6), получим

$$\frac{\lambda_\nu}{A_\nu C_\nu}\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}(C_\nu)\ll 1, \tag{7}$$

т. е. параметр C_ν слабо изменяется на расстоянии порядка длины волны.

В качестве характерного примера рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль направляющей α_1 цилиндрической оболочки ($q_1=1/R$, $q_2=0$, $A_2=1$), имеющие компоненты U_1 и U_3. Полагая $dx=A_1 d\alpha_1$, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}-\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}(qU_3)-P^2U_1=0,\\ -q\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 U_3}{\partial x^4}+q^2\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2}\right)+q^2U_3-P^2U_3=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Во втором уравнении можно пренебречь членом $\frac{h^2}{12}q^2\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2}$ сравнительно с q^2U_3, так как их отношение имеет порядок $\frac{h^2}{12}k^2$, где $k=\frac{2\pi}{\lambda}$. Подставив в систему (8) решения в форме (4), т. е. $U_e e^{i\int k dx}$, мы получим систему уравнений

$$\begin{gathered}(k^2-ik'-p^2)U_1+(ikq+q')U_3=0,\\ -ikqU_1+\left[\frac{h^2}{12}(ik'''-3(k')^2-4kk''-i6k^2k'+k^4)+q^2-p^2\right]U_3=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Приравняем нулю определитель однородной системы (9), сохранив члены с k и k':

$$(k^2-ik'-p^2)\left[\frac{h^2}{12}(k^4-6ik^2k')+q^2-p^2\right]+ikq(ikq+q')=0 \tag{9a}$$

и будем искать k методом последовательных приближений

$$k=k_0+k_1+\ldots.$$

В нулевом приближении пренебрежем членами с k' и q' и получим уравнение для k_0

$$(k_0^2-p^2)\left[\frac{h^2}{12}k_0^4+q^2-p^2\right]-k_0^2q^2=0. \tag{10}$$

Подставив затем k_0+k_1 в уравнение (9а), мы найдем для k_1 выражение

$$k_1=\frac{ik_0'}{2k_0}\left[\frac{1+\dfrac{6k^2\frac{h^2}{12}(k_0^2-p^2)-k_0q\frac{q'}{k_0'}}{\frac{h^2}{12}k_0^4+q^2-p^2}}{1+\dfrac{2k_0^2\frac{h^2}{12}(k_0^2-p^2)-q^2}{\frac{h^2}{12}k_0^4+q^2-p^2}}\right] \tag{10a}$$

Это выражение упрощается при высоких частотах, когда $p^2 \gg q^2$. В этом случае четыре корня уравнения (10) соответствуют изгибным волнам, а два – продольным. Для изгибных волн $k_1 \approx \frac{3}{2} i \frac{k_0'}{k_0}$, чему соответствует решение

$$U_i \sim \frac{l^{i \int k_0 dx}}{k^{3/2}}. \tag{10б}$$

Для продольных волн

$$k_1 \approx \frac{1}{2} i \frac{k_0'}{k_0}.$$

Соответствующее решение будет

$$U_i \sim \frac{l^{i \int k_0 dx}}{k_0^{1/2}}. \tag{10в}$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда k_0 отлично от нуля во всей области существования решений. Поскольку k_0 – медленно меняющаяся функция координат, при вычислении главной части поля мы не будем интересоваться видом знаменателей в выражениях (10б) и (10в), определяя лишь экспоненту.

Из шести корней уравнения (10) два по порядку величины равны $k_{1-2} \sim p$, остальные четыре

$$k_{3-6} \sim \left(\frac{p^2}{h^2/12}\right)^{1/4}. \tag{11}$$

Поэтому разложение многочлена в левой части формулы (10) на множители с точностью до $\sim h^2 k^2$ сравнительно с единицей имеет вид

$$\frac{h^2}{12}\left(k^4 - \frac{p^2}{\frac{h^2}{12}}\right)\left(k^2 + \frac{p^2(q^2-p^2)}{p^2}\right) = 0, \tag{12}$$

откуда

$$k_{1,2}^2 = (p^2 - q^2) \quad (\text{а}); \qquad k_{3-6}^4 = \frac{p^2}{\frac{h^2}{12}} \quad (\text{б}). \tag{13}$$

При $p^2 > q^2$ мы получим отсюда оценки

$$\left(\frac{k'}{k^2}\right)_{1,2} \sim \frac{q'}{p^2} \ll 1;$$

$$\text{и при } q^2 > p^2 \quad \left(\frac{k'}{k}\right)_{3-6} \sim \frac{q'a}{p^2} \ll 1; \quad \left(\frac{k'}{k^2}\right)_{1,2} \sim \frac{q'}{q^2} \ll 1. \tag{14}$$

Как видно, выполнение неравенств (5) влечет за собой выполнение неравенств (6)–(7). Интересно оценить отношение $\frac{U_3}{U_1}$ в волнах типа 13(а) и 13(б).

На основании первого уравнения системы (9)

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{k^2 - p^2}{kq} \tag{15}$$

Для волн типа (13а) при $p^2 \gg q^2$ (высокие частоты)

$$\left|\frac{U_3}{U_1}\right| \sim \frac{q}{p} \tag{16а}$$

и при $q^2 \gg p^2$ (низкие частоты)

$$\left|\frac{U_3}{U_1}\right| \sim \frac{p}{q} \tag{16б}$$

Решения (13а) соответствуют безмоментным колебаниям, которые в пределе $q \to 0$ переходят в продольные колебания тонкой пластинки.

Для волн типа (13б)

$$\frac{U_1}{U_3} = \frac{qh}{\sqrt{12}} \frac{\left[\frac{h^2}{12}(p^2 - 2q^2)\right]^{1/4}}{\left[\frac{h^2}{12}(p^2 - 2q^2)\right]^{1/2} - \frac{h^2}{12}p^2}.$$

при $p \gg q$

$$\left|\frac{U_1}{U_3}\right| \approx \frac{qh}{\sqrt{12}}\left(\frac{h^2}{12}p^2\right)^{1/4}; \tag{17а}$$

и при $p \ll q$

$$\left|\frac{U_1}{U_3}\right| \approx \frac{qh}{\sqrt{12}}\left(\frac{h^2}{12}q^2\right)^{1/4}. \tag{17б}$$

Решения (13б) соответствуют моментным колебаниям, которые в пределе $q \to 0$ переходят в изгибные колебания тонкой пластинки.

Применим изложенный выше способ решения к общему случаю оболочки двоякой кривизны. Поскольку в выбранном приближении мы пренебрегаем производными от параметров A_ν, удобно изменить масштаб независимых переменных, введя обозначения:

$$\begin{aligned} dx &= A_1 d\alpha_1; \\ dy &= A_2 d\alpha_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Отметим, что при вычислении второго приближения приходится учитывать производные $\frac{\partial A_\nu}{\partial \alpha_\mu}$, поэтому введение переменных x, y по формулам (18) уже незаконно.

Матрица величин $L_{ik} - p^2\delta_{ik}$ имеет вид

$$\begin{gathered} L_{11} - p^2 = k_x^2 + \frac{1-\nu}{2}k_y^2 - \frac{\omega^2}{c_п^2}; \quad L_{12} = \frac{1+\nu}{2}k_x k_y; \\ L_{13} = (q_1 + \nu q_2)\, i k_x. \\ L_{2,1} = \frac{1+\nu}{2}k_x k_y; \quad L_{22} - p^2 = k_y^2 + \frac{1-\nu}{2}k_x^2 - \frac{\omega^2}{c_п^2}; \\ L_{23} = (q_2 + \nu q_1)\, i k_y. \\ L_{31} = -(q_1 + \nu q_2)\, i k_x; \quad L_{32} = -(q_2 + \nu q_1)\, i k_y; \\ L_{33} - p^2 = \frac{h^2}{12}[(k_x^2 + k_y^2)^2 - (k_x^2 + k_y^2)(q_1^2 + q_2^2)] - \\ - \frac{\omega^2}{c_п^2} + (q_1 + q_2)^2 - (1-\nu)2q_1q_2. \end{gathered} \tag{19}$$

(в первых двух уравнениях этой системы члены $\sim q_1 q_2$ исключены, поскольку они компенсируются производными от A_ν согласно условию Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right)=-A_1 A_2 q_1 q_2.$$

Система уравнений (19) применима в том случае, когда волны распространяются в области, где координатные кривые $\alpha_\nu = \text{const}$ (если они замкнуты) имеют характерный размер $l \gg \lambda$. В окрестности же полюса, т. е. точки, где $l \to 0$, введение системы координат (18) неудобно, поскольку они не будут совпадать с линиями главных кривизн (кроме случая сферы). В окрестности полюса один из параметров, например A_1, стремится к нулю, и для него не имеет места условие (5), хотя оно по-прежнему выполняется для величин q_ν. Если оболочка представляет собой тело вращения, то в окрестности ее пересечения с осью симметрии удобно ввести квазиполярную систему координат (мы говорим «квази», чтобы подчеркнуть, что система вводится не на плоскости, а на криволинейной поверхности).

Для оболочки в виде тела вращения можно положить

$$A_1 = 1; \quad A_2 = r(\gamma); \quad d\alpha_1 = d\gamma, \tag{20}$$

где γ — дуга, отсчитываемая вдоль меридиана.

Положим $r(\gamma) = \gamma\rho(\gamma)$, где $\rho(\gamma)$ — медленно изменяющаяся функция, удовлетворяющая условиям (5). Например, для сферы $\rho(\gamma) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$, где $\gamma = R\theta$, θ — полярный угол. Выражения 3) принимают в координатах (20) вид:

$$L_{11}U_1 = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho\gamma U_1)\right]+\frac{1-\nu}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{2\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}U_1\right];$$

$$L_{12}U_2 = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}U_2\right]-(1-\nu)\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{2\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho\gamma U_2)\right].$$

$$L_{13}U_3 = \frac{\partial}{\partial\gamma}[(q_1+q_2)U_3]-(1-\nu)q_2\frac{\partial U_3}{\partial\gamma};$$

$$L_{21}U_1 = \frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho\gamma U_1)\right]-(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{1}{2\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}U_1\right];$$

$$L_{22}U_2 = \frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}U_2\right]+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{1}{2\rho\gamma}(\rho\gamma U_2)\right];$$

$$L_{23}U_3 = \frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}[(q_1+q_2)U_3]+\frac{(1-\nu)q_1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}U_3;$$

$$L_{31}U_1 = -(q_1+q_2)\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(\rho\gamma U_1)+(1-\nu)\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}(q_2\rho\gamma U_1);$$

$$L_{32}U_2 = -(q_1+q_2)\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}U_2+\frac{1-\nu}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}(q_1 U_2);$$

$$L_{33}U_3 = \frac{h^2}{12}[\Delta^2+\Delta(q_1^2+q_2^2)]+(q_1+q_2)^2U_3-2(1-\nu)q_1q_2U_3.$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\rho\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\rho\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right]. \tag{21}$$

Осесимметричные решения уравнений (21) мы будем искать в форме

$$U_\nu = a_\nu H_1^{(1)}[S(\gamma)], \qquad U_3 = a_3 H_0^{(1)}[S(\gamma)], \tag{22}$$

при $\nu = 1, 2$. Тогда система уравнений для a_i может быть представлена матрицей коэффициентов

$$\begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 0 & (q_1 + \nu q_2) k \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} k^2 - p^2 & 0 \\ (q_1 + \nu q_2) k & 0 & \frac{h^2}{12} k^4 + q_1^2 + q_2^2 + 2\nu q_1 q_2 p^2 \end{vmatrix} \tag{23}$$

Определитель системы распадается на два сомножителя. Первый дает уравнение

$$\frac{1-\nu}{2} k^2 - p^2 = 0, \tag{24}$$

отвечающее автономным сдвиговым колебаниям со смещением U_2, причем

$$k^2 = p_t^2, \qquad p_t^2 = \rho \frac{\omega^2}{G}. \tag{25}$$

Второй сомножитель дает уравнение

$$(k^2 - p^2) \left[\frac{h^2}{12} k^4 + (q_1 + q_2)^2 - 2(1-\nu) q_1 q_2 - p^2 \right] - (q_1 + \nu q_2)^2 k^2 = 0. \tag{26}$$

или

$$\frac{h^2}{12} \left[k^4 - \frac{q_2^2 (1-\nu^2)}{\frac{h^2}{12}} \right] \left[k^2 - \frac{p^2 [(q_1 + q_2)^2 - 2(1-\nu) q_1 q_2 - p^2}{q_2^2 (1-\nu^2) - p^2} \right] = 0. \tag{27}$$

Исследуем корни этого уравнения. Моментным (квазиизгибным) колебаниям отвечают четыре корня:

$$k_{1-4}^4 = \frac{p^2 - q_2^2 (1-\nu^2)}{\frac{h^2}{12}}. \tag{27a}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Конус. Волны распространяются вдоль образующих

$$q_1 = 0; \qquad k_{1-4}^4 = \frac{p^2 - (1-\nu^2) q_2^2}{\frac{h^2}{12}}. \tag{28}$$

Волновое движение возникает, начиная с частот, удовлетворяющих условию

$$p^2 > (1-\nu^2) q_2^2. \tag{29}$$

Ниже этой границы источник порождает лишь неоднородное поле.

б) Сфера. Здесь $q_1 = q_2 = q$ и

$$k_{1-4}^4 = \frac{p^2 - (1-\nu^2) q^2}{\frac{h^2}{12}}. \tag{30}$$

Этот случай подобен предыдущему.

Безмоментным (квазипродольным) колебаниям отвечают два корня:

$$k_{5-6}^2 = \frac{p^2 [(q_1 + q_2)^2 + 2(1-\nu) q_1 q_2 - p^2]}{q_2^2 (1-\nu^2) - p^2}. \tag{31}$$

в) Конус. Здесь $q_1 = 0$ и

$$k_{5-6}^2 = p^2 \left[1 + \frac{q_2^2 \nu^2}{q_2^2 (1 - \nu^2) - p^2} \right]. \tag{32}$$

При $p^2 \ll q_2^2 (1 - \nu^2)$ мы получим

$$k_{5-6}^2 = \frac{\omega^2}{E} \rho, \tag{33}$$

т. е. волны распространяются со скоростью продольных волн в стержне. При $p^2 \to q_2^2 (1 - \nu^2)$

$$k_{5-6}^2 \to \infty.$$

В этом случае условие $kh \ll 1$ становится неприменимым. В действительности соответственная мода колебаний переходит в изгибную. Для кругового цилиндра это показано в работе [3]. Бегущие волны появляются лишь начиная с частоты

$$p = q_2. \tag{34}$$

При $p \to \infty$ мы приходим к случаю дисперсии продольных волн в пластинке $k_{5-6}^2 = p^2$.

б) Сфера. Здесь $q_1 = q_2 = q$ и

$$k_{5-6}^2 = \frac{p^2 [2q^2 (1 + \nu) - p^2]}{q^2 (1 - \nu^2) - p^2}. \tag{35}$$

При $p^2 \ll q^2 (1 - \nu^2)$ мы получим

$$k_{5-6}^2 = \frac{\omega^2 \rho}{G}, \tag{36}$$

т. е. волны распространяются со скоростью сдвиговых волн. При

$$p^2 \to q^2 (1 - \nu^2); \qquad k_{5-6}^2 \to \infty.$$

Затем следует область неоднородного поля. Начиная с частоты $p^2 = 2q^2 (1 + \nu)$ вновь возникает бегущая волна. При $p \to \infty$ мы приходим к случаю дисперсии продольных волн в пластинке.

Отношение амплитуд продольной и поперечной компонент в волне каждого типа можно найти из первого уравнения системы (23):

$$\frac{U_1}{U_3} = -\frac{(q_1 + \nu q_2) k}{k^2 - p^2} = \beta \tag{37}$$

Подставив сюда k из выражений (27)–(36), убеждаемся, что для частот $P \gg q$ и для волн изгибного типа

$$\frac{U_1}{U_3} \approx \left(\frac{q}{p} \right)^{1/2} (qh)^{1/2}, \tag{38}$$

в то время как для волн продольного типа

$$\frac{U_1}{U_3} \sim \frac{p}{q} \tag{39}$$

Общее решение для поля точечного источника состоит из двух моментных ($S_1' = k_1$, $S_2' = k_2$) волн и одной безмоментной ($S_3' = k_3$). Волны, набегающие на источник, отсутствуют в силу условия излучения.

Получив систему корней характеристических уравнений, перейдем к написанию самих решений системы (21)

$$U_3(r) = a_1 H_0 \left[\int k_1 \, dr \right] + a_2 H_0 \left[\int k_2 \, dr \right] + a_3 H_0 \left[\int k_3 \, dr \right].$$

$$U_1(r) = a_1\beta(k_1)H_1\left[\int k_1\,dr\right] + a_2\beta(k_2)H_1\left[\int k_2\,dr\right] + a_3\beta(k_3)H_1\left[\int k_3\,dr\right]; \tag{40}$$

где k_i определяются выражениями (37). Постоянные a_i мы найдем из условий в полюсе оболочки.

При $r = 0$

$$\frac{dU_3}{dr} = 0, \qquad U_1 = 0, \qquad \frac{2\pi r d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_3}{\partial r}\right)\right] = \frac{P}{D}. \tag{41}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Заметим, что $I_0'(0) = I_0'''(0) = 0$. Особенность $H_0^{(n)}(0)$ определяется особенностью функции $N_0^{(n)}(0)$, которая вблизи $r \to 0$ имеет вид $N_0^{(n)}(r) = -\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{2}{r}\right)^{(n)}$. Индекс (n) означает номер производной. Заметим также, что $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial N_0(kr)}{\partial r}\right) = k^2 N_0$ и на основании (27а) $k_2 = ik_1$. Поэтому из условий (41) следуют уравнения:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 = 0,$$

$$k_2^2(a_1 - a_2) + a_3 k_3^2 = \frac{P}{4D}. \tag{42}$$

Из первого и второго уравнений (42) и выражений (38)--(39) мы получаем отношение между амплитудами безмоментных и моментных волн при возбуждении оболочки нормальной силой:

$$|a_2| \sim |a_1|,$$

$$\frac{a_3}{a_1} \sim \frac{\beta_1}{\beta_3} \sim \left(\frac{q}{p}\right)^{3/2}(qh)^{1/2}. \tag{43}$$

Решения этой системы суть

$$a_1 = \frac{P}{4D\Delta}(\beta_2 - \beta_3), \qquad a_2 = -\frac{P}{4D\Delta}(\beta_1 - \beta_3), \tag{44}$$

где

$$\Delta = k_1^2(\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3) + k_3^2(\beta_1 - \beta_2); \qquad a_3 = \frac{P}{4D\Delta}(\beta_1 - \beta_2).$$

Воспользовавшись выражениями (40) и (44), найдем компоненту скорости $V_3 = -i\omega U_3$ в точке приложения силы P:

$$\frac{U_3}{p} = \frac{1}{Z} = -\frac{i\omega}{4D\Delta}\left[-i(\beta_1 - \beta_2) + \frac{2}{\pi}(\beta_1 - \beta_2)\ln\frac{k_1}{k_3}\right], \tag{45}$$

где Z — входной импеданц оболочки. При высоких частотах $(p^2 \gg q^2)$ мы имеем $|\beta_3| > |\beta_1|$ и $|\beta_3| \gg |\beta_2|$, т. е.

$$z \approx \frac{8Dk_1^2}{\omega}. \tag{46}$$

Для сферы $z \approx 8\sqrt{mD}\sqrt{1 - \frac{q^2B}{m\omega^2}(1-\nu^2)}$. Для низких частот $(p^2 < (1-\nu^2)q^2)$ входной импеданц является комплексным.

Рассмотрим теперь колебания оболочки двоякой кривизны, возбуждаемой вдоль координатной линии $\alpha_2 = \text{const}$. В этом случае в выбранном приближении волны распространяются вдоль координаты α_1. В системе уравнений (19) нужно положить $k_y = 0$; при этом получится система алгебраических уравнений относительно k_x, формально совпадающая с системой (23). Поэтому остаются применимыми и соотношения (24)–(39). Решения имеют вид

$$U_3(x) = a_1 l^{i\int k_1 dx} + a_2 l^{-\int k_2 dx} + a_3 l^{i\int k_3 dx},$$

$$U_1(x) = a_1\beta_1 l^{i\int k_1 dx} + a_2\beta_2 l^{-\int k_1 dx} + a_3\beta_3 l^{i\int k_3 dx}. \tag{47}$$

Граничные условия при $x = 0$, т. е. $U_3' = U_1 = 0$, $DU_3''' = P/2$, дают уравнения

$$a_1 ik_1 - a_2 k_1 + a_3 ik_3 = 0,$$

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0,$$

$$-ik_1^3 a_1 - k_1^3 a_2 - ik_3^3 a_3 = \frac{p}{2D}. \tag{48}$$

Отсюда

$$a_1 = -\frac{P}{2D\Delta}\left(\beta_1 + \frac{k_1}{ik_3}\beta_3\right);$$

$$a_2 = \frac{P}{D\Delta}\left(\beta_1 - \frac{k_1}{k_3}\beta_3\right);$$

$$a_3 = \frac{P}{2D\Delta}\frac{k_1}{ik_3}(\beta_1 + i\beta_2);$$

$$\Delta = -\left(\beta_1 - \frac{k_1}{k_3}\beta_3\right)(k_1^3 + k_1 k_3^2) - \left(\beta_2 + \frac{k_1}{ik_3}\beta_3\right)(-ik_1^3 + ik_1 k_3^2).$$

Входной импеданц выражается следующим образом:

$$Z = \frac{2D\Delta}{-i\omega\left\{\beta_1\left(1 + \frac{k_1}{ik_3}\right) + \beta_2\left(\frac{k_1}{k_3} - 1\right) - \beta_3\frac{k_1}{k_3}(1 - i)\right\}} \tag{49}$$

и для высоких частот $(p^2 \gg q^2)$

$$Z = \frac{4Dk_1^3}{\omega(1+i)} = \frac{4D}{\omega(1+i)}\left(\frac{m\omega^2}{D}\right)^{3/4}\left(1 - \frac{B}{m\omega^2}f(q)\right)^{3/4},$$

$$f(q) = q_2^2(1 - \nu^2).$$

Из выражения для $f(q)$ следует, что на входной импеданц, а также на расстояние затухания изгибной волны влияет кривизна в поперечном направлении и при $\lambda_{\text{пр}} > R$ волна становится экспоненциально спадающей, а входной импеданц — мнимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Избранные труды, т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. И. М. Рапопорт. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М. «Машиностроение», 1967.
3. Р. Н. Михайлов. К вопросу о распространении и затухании нормальных волн в замкнутой цилиндрической оболочке. В сб.: Вибрации и шумы. М., «Наука», 1969.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
22 июня 1970 г.