АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 2

УДК 534.26

РАСЧЕТ ПОЛЯ ЗВУКОВОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ТОРЦЕ ЦИЛИНДРА

Е. М. Чечеткина

В данной работе предлагается метод расчета поля звукового давления, образующегося при дифракции плоской ступенчатой волны на осесимметричных препятствиях. Изложение метода делается для цилиндрического тела. Приводится функция, описывающая главную часть решения задачи о дифракции плоской волны на торце полубесконечного абсолютно жесткого цилиндра, кратко излагается построение устойчивой схемы для расчета «невязки» (разность между искомым решением и главной частью решения). Основное внимание в статье уделено исследованию дифракционного поля; к работе прилагаются графики, иллюстрирующие поведение различных физических характеристик поля со временем, а также их распределение по осям цилиндрических координат.

Задача нестационарной дифракции звука на торце жесткого стержня рассмотрена в работе [1], где автор дает приближенно значения результирующей силы на торце цилиндра в различные моменты времени. В отличие от работы [1] нами предлагается метод расчета нестационарного поля давления при дифракции произвольной плоской волны на осесимметричных телах различной формы. В качестве конкретного примера был выбран цилиндр, для которого и приводятся результаты расчета.

Пусть акустическая ступенчатая волна избыточного давления $A_0H(at+z)$ набегает на торец полубесконечного кругового цилиндра, занимающего область $(r\leqslant R,\ z\leqslant 0)$, и дифрагирует на нем. Будем считать цилиндр абсолютно жестким и обозначим цилиндрические координаты точки наблюдения через r, φ, z. Введем безразмерные переменные $r'=r/R$, $z'=z/R$, $t'=at/R$, $P'=P/A_0$ (здесь P — избыточное давление) и условимся в дальнейшем опускать штрихи у этих переменных. В силу осевой симметрии задачи мы ограничимся рассмотрением явлений в меридианной плоскости. Функция $P(t,\ r,\ z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\qquad\left(\Delta\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

всюду вне области $(r\leqslant 1,\ z\leqslant 0)$ и граничному условию $(\partial P/\partial n)_S=0$, где S — поверхность цилиндра; здесь n — нормаль к поверхности цилиндра. При $t<0$ решение должно совпадать с падающей плоской волной (при $t=0$ фронт волны достигает поверхности цилиндра).

Предлагаемый метод основан на аналитическом представлении главной части решения и в дальнейшем численном расчете «невязки». Главная часть строится с помощью лучевого метода так, чтобы всюду в рассматриваемой области она была непрерывной функцией, имеющей непрерывные первые производные. Введем лучевые координаты (фиг. 1): $r=1+\rho_1\sin\theta_1$, $z=\rho_1\cos\theta_1$; $r=-1-\rho_2\sin\theta_2$, $z=\rho_2\cos\theta_2$. Так как задача симметрична относительно оси цилиндра, то достаточно построить

решение в области, находящейся по одну сторону от оси. Через каждую точку в рассматриваемой области проходят два фронта дифрагированной волны: первый фронт при $t=\rho_1$, второй — при $t=\rho_2$ $(\rho_2>\rho_1)$. Обозначим главную часть решения задачи через $v(t, r, z)$ и будем представлять $v(t, r, z)$ при $\rho_1<t<\rho_2-{}^1/_2$ в виде

$$v(t, r, z)=w(t, r, z)-u_2(t, r, z)/2, \tag{1}$$

где

$$w(t, r, z)=[\tilde{u}(t, r, z)-d^*(t, z)-u_1(t, r, z)](1/r)^{1/2}+d^*(t, z)+u_1(t, r, z).$$

Здесь $d^*(t, z)$ — падающая волна, $u_1(t, r, z)$ — отраженная волна, которая в рассматриваемом случае есть

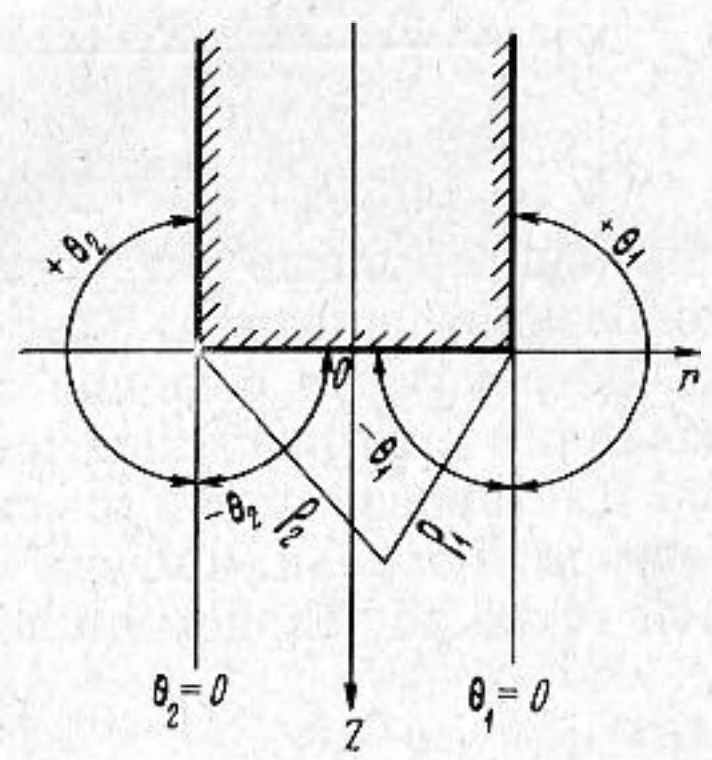
$$u_1(t, r, z)=\begin{cases}1 & \text{при } r<1, \quad z>0, t\geqslant z,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Функция $\tilde{u}(t, r, z)$ аналогична описывающей поля давлений при дифракции ступенчатой волны на клине [2, 3]; функция $u_2(t, r, z)$ ликвидирует разрыв первой производной $w(t, r, z)$ по r при $r=1$ и выражается следующим образом:

$$u_2(t, r, z)=\frac{1}{2\pi}\left\{(t^2-\rho_1^2)^{1/2}-\right.$$

$$-z\ln\frac{\rho_1}{t+(t^2-\rho_1^2)^{1/2}}-$$

$$\left.-|r-R|\arccos\frac{\rho_1^2-tz}{\rho_1(t-z)}\right\}.$$



Фиг. 1

Из-за наличия осевой каустики в окрестности второго фронта дифрагированной волны, который при $t=1$ достигает оси цилиндра и при $t>1$ входит в рассматриваемую область, необходимо другое представление главной части. Поэтому при $\rho_2-{}^1/_4\leqslant t<\rho_2$

$$v(t, r, z)=A(t, r, z)\left(\arcsin\frac{2t-\rho_1-\rho_2}{\rho_2-\rho_1}+\frac{\pi}{2}\right)+d^*(t, z)+u_1(t, r, z), \tag{2}$$

где $A(t, r, z)$ — функция, построенная с помощью линейной интерполяции по t по двум значениям, полученным из условия совпадения выражений (1) и (2) при $t\approx\rho_1$ и $t\approx\rho_2$. При $\rho_2-{}^1/_2\leqslant t\leqslant\rho_2-{}^1/_4$

$$v(t, r, z)=[1-\eta(t, r, z)]v_1(t, r, z)+\eta(t, r, z)v_2(t, r, z), \tag{3}$$

где через v_1 обозначена функция (1), а через v_2 — функция (2). Функция $\eta(t, r, z)$ «склеивает» функции v_1 и v_2 до третьей производной включительно. При $t>\rho_2$ мы представляем $v(t, r, z)$ в виде

$$v(t, r, z)=A(t, r, z)\pi+d^*(t, z)+u_1(t, r, z). \tag{4}$$

Легко видеть, что выражения (2) и (4) при $t=\rho_2$ совпадают.

Вблизи обоих фронтов

$$P(t, r, z)-v(t, r, z)=O((t-\rho)^{3/2}),$$

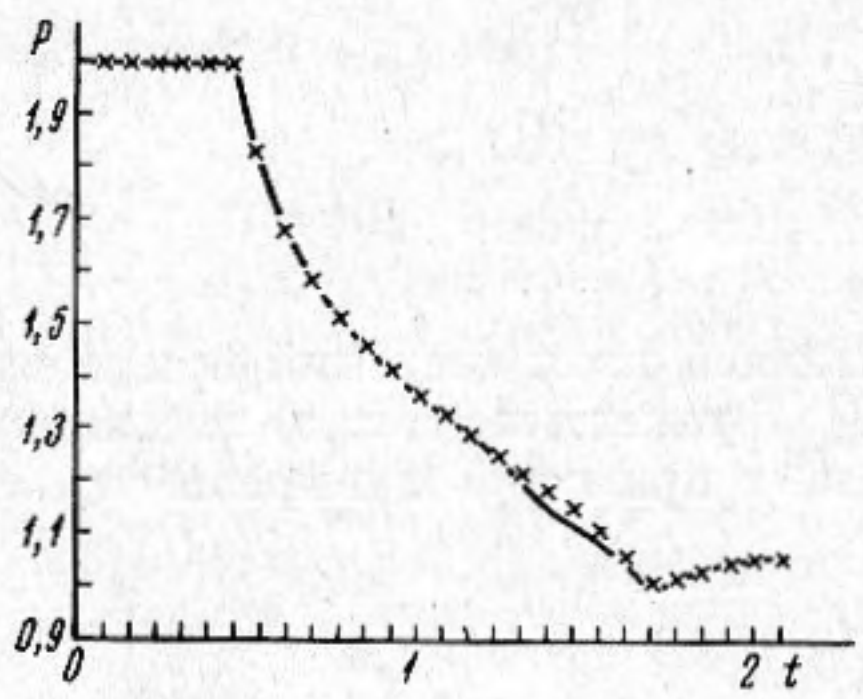
$$\Box(P(t, r, z)-v(t, r, z))=O((t-\rho)^{1/2}).$$

Выделив главную часть решения аналитически, мы получаем для «невязки», которую обозначим через u, следующую задачу:

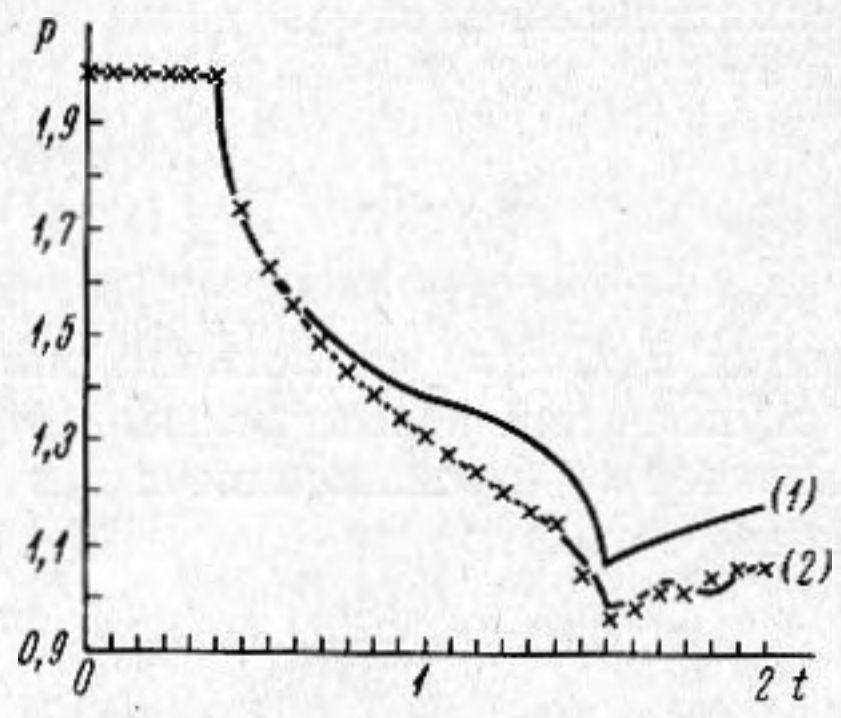
$$\Box u(t, r, z) = F(t, r, z),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s = f(t, r, z), \quad (u)_{t=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

где $F(t, r, z) = -\Box v(t, r, z)$, $f(t, r, z) = -\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_s$. Эта задача решалась нами численно. Для расчета была составлена разностная схема, которая аппроксимировала дифференциальную задачу на классе функций, имею-



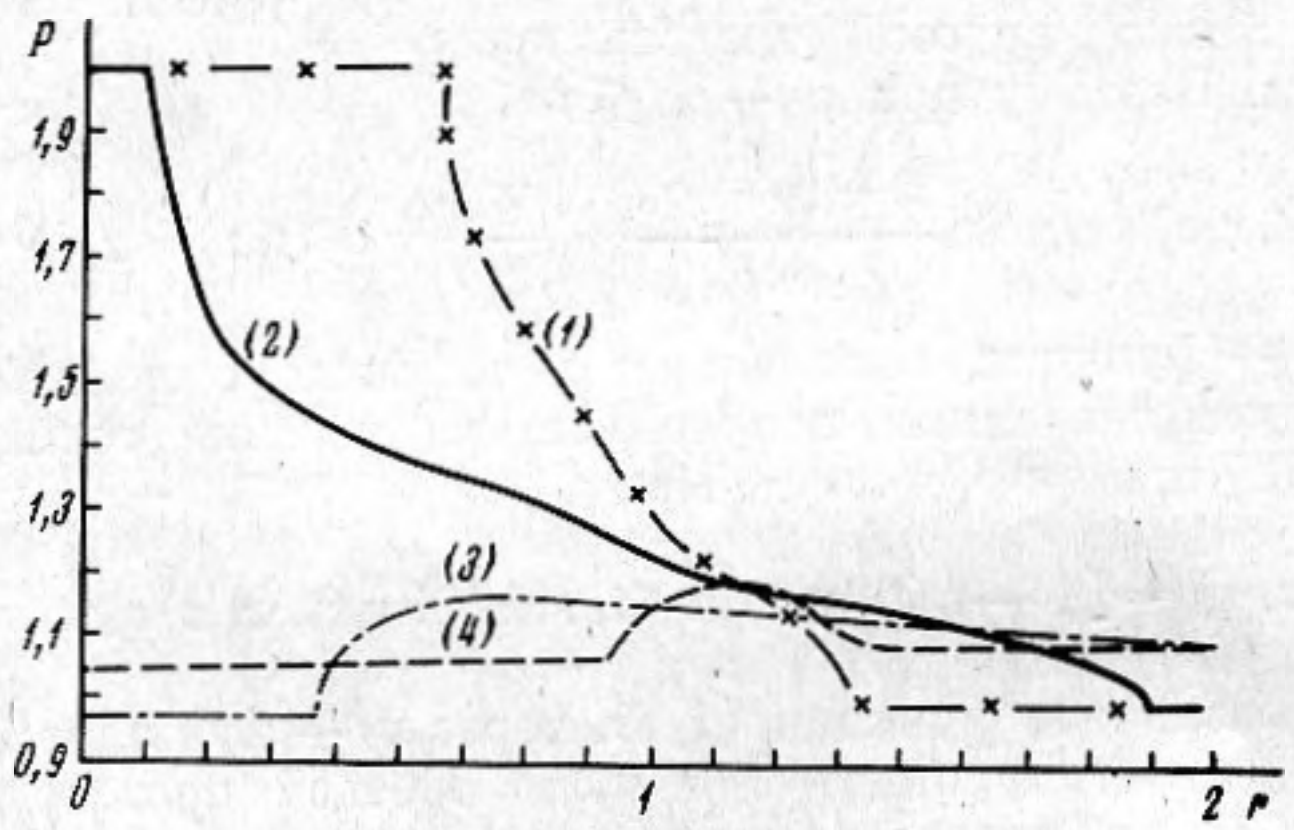
Фиг. 2



Фиг. 3

щих непрерывные четвертые производные, с погрешностью $O(h^2)$ и методом «замораживания» коэффициентов доказана ее устойчивость.

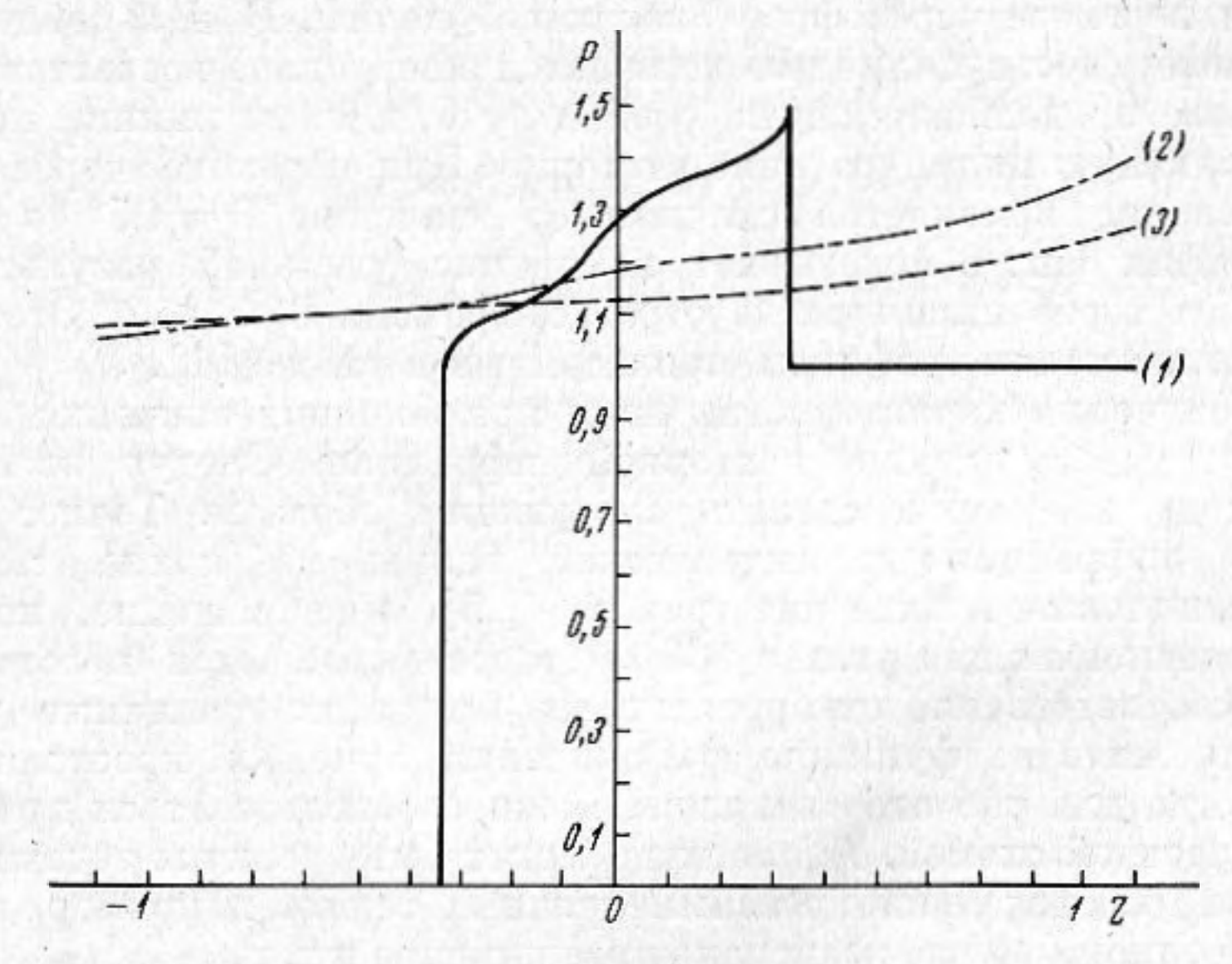
В результате решения задачи в целом было получено поле звуковых давлений при дифракции единичной ступенчатой волны на торце цилиндра. Для произвольной плоской волны решение обобщается с помощью интеграла Дюамеля. Фигура 2 показывает изменение давления в произвольной точке под торцом цилиндра на отрезке времени от $t = 0$ до появления



Фиг. 4

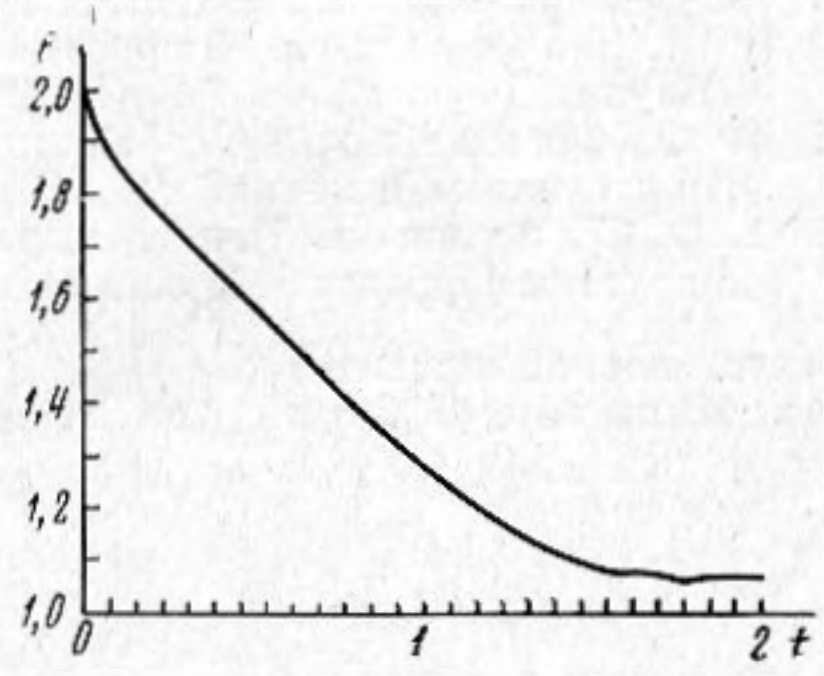
дифракции второго фронта дифрагированной волны на ребре цилиндра. Как видно из графика, давление в данной точке остается постоянным и равным двум (сумме давлений за падающей и отраженной волнами) до прихода первого фронта дифрагированной волны; за первым фронтом начинается резкое падение давления до значения, меньшего единицы, которое достигается в момент прихода в точку наблюдения второго фронта дифрагированной волны. После прохождения двух фронтов волны давле-

ние несколько возрастает, отклоняясь от значения $P=1$ не более чем на 6%. Крестиками на графике показаны значения давления, полученные при расчете «невязки» с уменьшенным в два раза шагом. Графики на фиг. 3 дают изменение давления в зависимости от времени в произвольной точке рассматриваемой области (для примера была выбрана точка на торце цилиндра) при вычислении его для сравнения по трем алгоритмам. Линия (*1*) построена по значениям, которые даются главной частью решения (функции $v(t, r, z)$). Линия (*2*) характеризует изменение давления в точке наблюдения, когда вычисление «невязки» осуществляется



Фиг. 5

при крупном шаге аргументов; соответственно крестиками показаны значения, полученные при расчете «невязки» с малым шагом ($h_1 = h/2$). Как следует из графиков, значения давления, вычисленные при расчете с крупным и малым шагом, до определенного момента времени совпадают и лишь в окрестности второго фронта дифрагированной волны несколько отличаются друг от друга. Из графиков хорошо видно, что разность результатов вычисления при расчете с крупным и малым шагом значительно меньше значений «невязки» и лишь в отдельных точках достигает 10%. Графики на фиг. 4 дают распределение давления на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 2$ прямой $z=0$ в различные моменты времени. Линия (*1*) соответствует значению времени $t = 10/27$, линия (*2*) отвечает $t = 8/9$, линия (*3*) — $t = 38/27$, линия (*4*) — $t = 52/27$. Линии (*1*) и (*2*) дают распределение давления в те моменты времени, когда дифрагированная волна еще не прошла половины торца цилиндра; хорошо видно, как давление постепенно изменяется от значения $P=2$ на торце цилиндра до значения $P=1$ в области $r>1$. Область изменяющегося давления со временем увеличивается. Линии (*3*) и (*4*) соответствуют тем моментам времени, когда второй фронт, перейдя через осевую каустику, находится уже в рассматриваемой области. Из рассмотрения кривых ясно определяется область, захваченная вторым фронтом дифрагированной волны: за фронтом давле-



Фиг. 6

ние остается почти постоянным, перед фронтом наблюдается резкое возрастание давления. Давление начинает спадать за ребром цилиндра и при приближении к первому фронту дифрагированной волны стремится к значению $P = 1$. Графики фиг. 5 дают распределение звукового давления на отрезке прямой $r = 1$ (точка с координатами (1, 0) соответствует положению ребра цилиндра в меридианной плоскости) в различные моменты времени: линия (*1*) отвечает значению времени $t = 10/27$, линия (*2*) соответствует $t = 32/27$ и линия (*3*) — $t = 14/9$. Кривая (*1*) хорошо показывает, что давление изменяется скачком от значения $P = 0$ до значения $P = 1$ при переходе через фронт падающей волны. В дальнейшем вдоль боковой поверхности цилиндра начинается монотонное возрастание давления, которое продолжается и на особом луче, т. е. на линии, продлевающей образующую цилиндра вниз от торца. При переходе через волновой фронт давление изменяется скачком от значения $P = 1{,}5$ до значения $P = 1$. График фиг. 6 показывает изменение удельной результирующей нагрузки на торце цилиндра на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 2$. Этот график хорошо согласуется с графиком, приведенным в работе [1].

Для получения характеристик поля при больших значениях времени необходимо учесть влияние повторной дифракции. Следуя изложенному выше методу, это можно сделать следующим образом. Точное решение задачи о дифракции цилиндрической волны на клине, полученное А. Ф. Филипповым в виде интегралов [4, 5], или решение, полученное В. А. Боровиковым для угла в 360°, которое выражается простыми формулами (соответственно откорректировав при этом граничные условия), нужно умножить на функцию расхождения лучей в пространственном случае. Тогда для расчета «невязки» можно воспользоваться приведенной выше разностной схемой. Аналогично могут быть решены задачи дифракции волн на произвольных осесимметричных телах, например на эллипсоиде, усеченном конусе, коаксиальном цилиндре и т. п.

В заключение автор благодарит А. Ф. Филиппова за большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Jones. The Scattering of a Scalar Wave by a Semi-infinite Rod of Circular Cross Section. Philos. Trans. Roy. Soc., 1955, A247.
2. С. А. Соболев. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Франк и Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937, т. 2, гл. XII.
3. В. А. Боровиков. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Наука», 1966.
4. А. Ф. Филиппов. Дифракция произвольной акустической волны на клине. Прикл. матем. и механ., 1964, 28, вып. 2.
5. А. Ф. Филиппов. Точные выражения для многократно дифрагированной волны с круговым фронтом. Прикл. матем. и механ., 1964, 28, вып. 6.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
19 марта 1971 г.