АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 4

УДК 534.222.1

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОДВОДНОГО ЗВУКА В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ

Н. Н. Комиссарова

Решена задача о поле точечного гармонического источника в клиновидной области, состоящей из двух клиньев произвольного угла раствора с одной общей гранью и общим ребром. Одна из внешних граней области — абсолютно мягкая, другая — абсолютно жесткая. Плотности жидких сред, заполняющих клинья, различны, а скорости звука в них одинаковы. Решение представлено в виде суммы нормальных волн, для них получено асимптотическое представление. Исследовано влияние параметров одной среды на характеристики поля в другой среде.

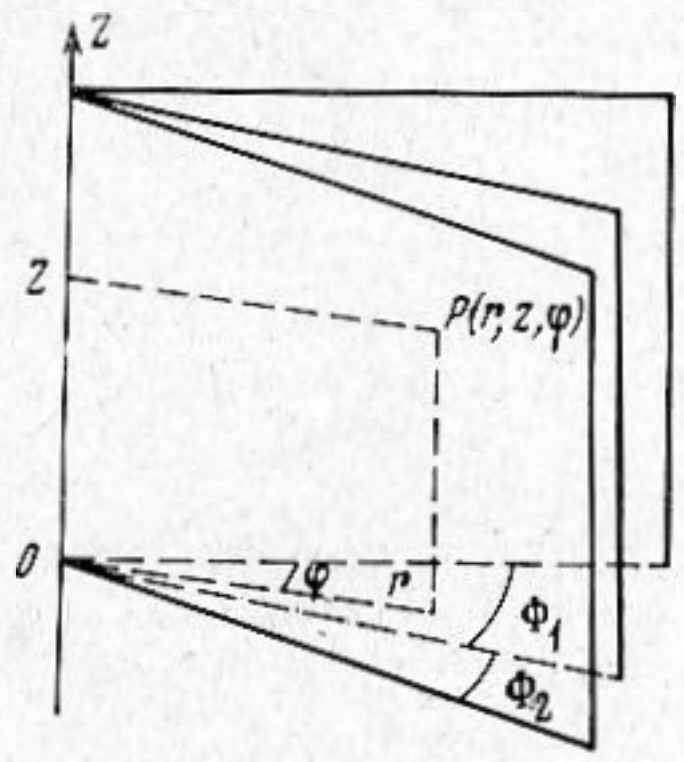
Ввиду сложности задачи о распространении подводного звука в прибрежной зоне приходится использовать идеализированные модели, в большей или меньшей степени соответствующие реальным условиям. Так, в работе [1] в качестве модели прибрежной зоны рассматривался клин с одной абсолютно мягкой, другой абсолютно жесткой гранями. Эта модель достаточно хорошо соответствует условиям распространения звука в районе континентального шельфа. Однако геофизические исследования показывают, что под слоем воды часто имеется слой осадков, отделяющих его от пород с большой скоростью звука. Таким условиям больше отвечала бы модель среды, представляющая собой систему двух клиньев с разными углами растворов Φ_1 и Φ_2, с одной общей гранью и ребром, причем угловые области заполнены однородными жидкими средами с разными плотностями и скоростями звука. Одна из внешних граней системы — абсолютно мягкая, другая — абсолютно жесткая. Двумерная задача дифракции плоской гармонической волны в одном из клиньев такой системы была решена Завадским [2] для случая, когда угол раствора другого клина кратен $\pi/2$ и внешние грани свободные. Точное решение задачи при произвольных углах раствора Φ_1 и Φ_2 представляет большие трудности. Мы рассмотрим более простую модель среды, когда скорости звука в обеих угловых областях равны. Такая модель позволяет исследовать влияние плотности осадков на формирование звукового поля в прибрежной зоне.

Двумерная задача дифракции плоской гармонической волны в секториальной среде, состоящей из клиновидных областей с разными плотностями и равными скоростями звука, решена Малюжинцем [3]. Ниже другим методом (используется интегральное преобразование Конторовича — Лебедева) решена задача о поле точечного гармонического источника в среде, составленной из двух соприкасающихся угловых областей с абсолютно отражающими внешними гранями. Звуковое поле представлено в виде суммы нормальных волн и найдена их асимптотика.

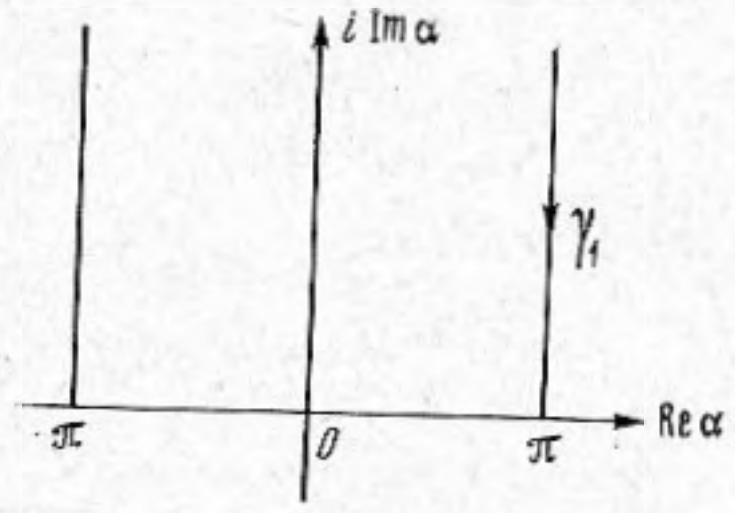
Пусть точечный гармонический источник с объемной скоростью $-1/4\pi$ расположен в точке $Q(r_0, 0, \varphi_0)$ области D, определяемой в цилиндрической системе координат (r, z, φ) неравенствами $0 < r < \infty$, $|z| < \infty$, $0 < \varphi < \Phi$. Область D состоит из двух клиновидных областей D_1 и D_2

с углами раствора клина Φ_1 и Φ_2 соответственно, так что $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$ (ось z совпадает с общим ребром обоих клиньев; см. фиг. 1). Плотности сред в областях D_1 и D_2 обозначим через ρ_1 и ρ_2; скорость звука в области D постоянна и равна c. Грань клина $\varphi = 0$ — абсолютно мягкая, грань $\varphi = \Phi$ — абсолютно жесткая.

Потенциалы скоростей ψ_1 в области D_1 и ψ_2 в области D_2 ($\psi_{1,2} \sim e^{-i\omega t}$) должны быть однозначными, непрерывными и ограниченными (в том чис-



Фиг. 1



Фиг. 2

ле и на границах областей) функциями, удовлетворяющими волновому уравнению

$$\Delta\psi_{1,2} + k^2\psi_{1,2} = 0, \tag{1}$$

граничным условиям

$$\psi_1 = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = \Phi; \tag{2}$$

$$\rho_1\psi_1 = \rho_2\psi_2, \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} \quad \text{при } \varphi = \Phi_1 \tag{3}$$

и условию излучения. Для определенности будем считать, что источник расположен в области D_1. Тогда особенность функции $\psi_1(P)$ в точке $P = Q$ должна быть такой, что $\lim\limits_{P\to Q} R(\varphi - \varphi_0)\left[\psi_1(P) - \dfrac{e^{ikR(\varphi-\varphi_0)}}{R(\varphi-\varphi_0)}\right] = 0$,

где $R(\varphi) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + z^2 - 2rr_0\cos\varphi}$.

Задачу будем решать с помощью преобразования Фурье по координате z и преобразования Конторовича — Лебедева — по координате r. Для функций $\tilde\psi_{1,2}(r, \xi, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi z}\psi_{1,2}(r, z, \varphi)\,dz$ мы имеем в цилиндрических координатах уравнения:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde\psi_{1,2}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\tilde\psi_{1,2}}{\partial\varphi^2} + r^2\zeta^2\tilde\psi_{1,2} = r^2\tilde g(r, \xi, \varphi), \tag{4}$$

где $\tilde g(r, \xi, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi z}g(r, z, \varphi)\,dz$, $g(r, z, \varphi) = -4\pi\delta(P - Q)$, $\delta(P)$ — трехмерная δ-функция и $\zeta^2 = k^2 - \xi^2$. К уравнениям (4) и граничным условиям для функций $\tilde\psi_{1,2}$ применим преобразование Конторовича — Лебедева в той форме, которая приводится в работе [4]:

$$\bar F(\nu) = \int\limits_0^\infty F(\zeta r)\frac{H_\nu^{(1)}(\zeta r)}{r}\,dr. \tag{5}$$

Формула обращения для этого преобразования имеет вид

$$F(\zeta r)=\frac{1}{2}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\mu\bar{F}(\mu)J_\mu(\zeta r)\,d\mu=\frac{1}{4i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\mu\bar{F}(\mu)e^{i\pi\mu}\sin\mu\pi\,H_\mu^{(1)}(\zeta r)\,d\mu. \quad (6)$$

Здесь $H_\mu^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя. Тогда для функций $\bar{\psi}_{1,2}(\nu,\xi,\varphi)=\int\limits_0^\infty\bar{\psi}_{1,2}(r,\xi,\varphi)H_\nu^{(1)}(\zeta r)r^{-1}\,dr$ мы получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_{1,2}}{d\varphi^2}+\nu^2\bar{\psi}_{1,2}=\int\limits_0^\infty r\tilde{g}H_\nu^{(1)}(\zeta r)\,dr \quad (7)$$

и граничные условия:

$$\bar{\psi}_1=0 \quad \text{при } \varphi=0, \qquad \frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\varphi}=0 \quad \text{при } \varphi=\Phi, \quad (8)$$

$$\rho_1\bar{\psi}_1=\rho_2\bar{\psi}_2, \qquad \frac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\varphi}=\frac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial\varphi} \quad \text{при } \varphi=\Phi_1.$$

Здесь выбрана та ветвь корня $\zeta=\sqrt{k^2-\xi^2}$, для которой $\operatorname{Im}\zeta>0$.

Решениями уравнений (7), удовлетворяющими граничным условиям (8), являются функции

$$\bar{\psi}_{1,2}(\nu,\xi,\varphi)=4\pi H_\nu^{(1)}(\zeta r_0)\nu^{-1}f_{1,2}(\nu), \quad (9)$$

где

$$f_1(\nu)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\cos\nu(\Phi_1-\varphi_0)\cos\nu\Phi_2-\sin\nu(\Phi_1-\varphi)\sin\nu\Phi_2}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\cos\nu\Phi_1\cos\nu\Phi_2-\sin\nu\Phi_1\sin\nu\Phi_2}\sin\nu\varphi \text{ при } \varphi<\varphi_0,\\[2ex] \dfrac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\cos\nu(\Phi_1-\varphi)\cos\nu\Phi_2-\sin\nu(\Phi_1-\varphi)\sin\nu\Phi_2}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\cos\nu\Phi_1\cos\nu\Phi_2-\sin\nu\Phi_1\sin\nu\Phi_2}\sin\nu\varphi_0 \text{ при } \varphi>\varphi_0,\end{cases} \quad (10)$$

$$f_2(\nu)=\frac{\sin\nu\varphi_0\cos\nu(\Phi-\varphi)}{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\cos\nu\Phi_1\cos\nu\Phi_2-\sin\nu\Phi_1\sin\nu\Phi_2}. \quad (11)$$

Применяя формулу обращения преобразования Конторовича — Лебедева (6), для функций $\bar{\psi}_{1,2}(r,\xi,\varphi)$ получаем выражения

$$\bar{\psi}_{1,2}(r,\xi,\varphi)=\frac{1}{4i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\mu\bar{\psi}_{1,2}(\mu)e^{i\pi\mu}\sin\mu\pi H_\mu\ (\zeta r)\,d\mu. \quad (12)$$

Интегралы (12) сходятся при условии

$$2\alpha>\pi-|\varphi-\varphi_0|, \quad (13)$$

где $\alpha=\arg\sqrt{k^2-\xi^2}$ $\left(\frac{\pi}{2}>\alpha>0\right)$. Это условие может быть выполнено при достаточно больших значениях ξ^2. Следовательно, в этом случае функ-

ции $\tilde{\psi}_{1,2}(r, \xi, \varphi)$, определяемые формулами (12), являются решениями уравнений (4) и удовлетворяют преобразованным по Фурье граничным условиям (3). Выражение для $\tilde{\psi}_1$ в (12) можно, используя равенство

$$H_\mu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\mu}(z) - e^{-i\mu\pi} J_\mu(z)}{i \sin \mu\pi}, \tag{14}$$

написать еще в следующем виде:

$$\tilde{\psi}_1(r, \xi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} J_\mu(\zeta r) \mu \bar{\psi}_1(\mu) d\mu = I_1 + I_2, \tag{15}$$

где

$$I_1 = 2\pi i \int_{-i\infty}^{+i\infty} J_\mu(\zeta r) J_\mu(\zeta r_0) e^{-i\mu\pi} \sin^{-1} \mu\pi f_1(\mu) d\mu, \tag{16}$$

$$I_2 = -2\pi i \int_{-i\infty}^{+i\infty} J_\mu(\zeta r) J_{-\mu}(\zeta r_0) \sin^{-1} \mu\pi f_1(\mu) d\mu. \tag{17}$$

Контур интегрирования в интегралах I_1 и I_2 дополним полуокружностью C_μ бесконечно большого радиуса, расположенной в правой полуплоскости комплексного переменного μ. Интегралы по C_μ равны нулю (при $r < r_0$), поскольку для произведений бесселевых функций справедливы асимптотические представления [5]:

$$J_\mu(\zeta r) J_\mu(\zeta r_0) \sim \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\zeta r}{2}\right)^\mu \left(\frac{\zeta r_0}{2}\right)^\mu \mu^{-2\mu-1}, \tag{18}$$

$$J_\mu(\zeta r) J_{-\mu}(\zeta r_0) \sim \frac{1}{\mu} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\mu, \tag{19}$$

а при $\operatorname{Re} \mu > 0$

$$f_1(\mu) \sim \frac{1}{2i} e^{-\mu|\varphi - \varphi_0|}. \tag{20}$$

При $r > r_0$ в интеграле (17) заменим μ на $-\mu$. Тогда

$$I_2 = -2\pi i \int_{-i\infty}^{+i\infty} J_{-\mu}(\zeta r) J_\mu(\zeta r_0) \sin^{-1} \mu\pi f_1(\mu) d\mu. \tag{21}$$

Контур интегрирования в этом интеграле также дополним контуром C_μ. Интеграл (21) по этому контуру равен нулю. Теперь можно воспользоваться теоремой о вычетах. Объединив два интеграла I_1 и I_2 снова в один, получаем

$$\tilde{\psi}(r, \xi, \varphi) = 2\pi \int_{-i\infty}^{+i\infty} Z_\mu(\xi) f_1(\mu) d\mu = 4\pi^2 i \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\mu_n}(\xi) T_1(\mu_n, \varphi). \tag{22}$$

Здесь введены обозначения:

$$Z_{\mu_n}(\xi) = \begin{cases} J_{\mu_n}(\sqrt{k^2 - \xi^2}\, r) H_{\mu_n}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}\, r_0) & \text{при } r < r_0, \\ J_{\mu_n}(\sqrt{k^2 - \xi^2}\, r_0) H_{\mu_n}^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2}\, r) & \text{при } r > r_0, \end{cases} \tag{23}$$

$$T_1(\mu_n, \varphi) = \frac{\sin \mu_n \varphi \sin \mu_n \varphi_0}{\Phi_1 + \Phi_2 \dfrac{\sin 2\mu_n \Phi_1}{\sin 2\mu_n \Phi_2}}, \tag{24}$$

а суммирование в формуле (22) производится по всем положительным корням уравнения

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\cos\mu\Phi_1\cos\mu\Phi_2-\sin\mu\Phi_1\sin\mu\Phi_2=0. \tag{25}$$

(Значения μ_n расположены в возрастающем порядке.) Для $\tilde{\psi}_2(r,\xi,\varphi)$ аналогичным способом получим выражение

$$\tilde{\psi}_2(r,\xi,\varphi)=4\pi^2 i\sum_{n=0}^{\infty}Z_{\mu_n}(\xi)\,T_2(\mu_n,\varphi), \tag{26}$$

где

$$T_2(\mu_n,\varphi)=\frac{\sin\mu_n\varphi_0\cos\mu_n(\Phi-\varphi)}{\Phi_1+\Phi_2\dfrac{\sin 2\mu_n\Phi_1}{\sin 2\mu_n\Phi_2}}\,\frac{\cos\mu_n\Phi_1}{\sin\mu_n\Phi_2}. \tag{27}$$

Ряды (22) и (26) сходятся равномерно по ζ в области $|\zeta|<N$, $N<\infty$. Их можно аналитически продолжить на всю действительную ось ξ и определить звуковые потенциалы $\psi_{1,2}$, проинтегрировав ряды почленно:

$$\psi_{1,2}(r,z,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi z}\tilde{\psi}_{1,2}(r,\xi,\varphi)\,d\xi=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}T_{1,2}(\mu_n,\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi z}Z_{\mu_n}(\xi)\,d\xi. \tag{28}$$

Воспользуемся следующим представлением функции $Z_{\mu_n}(\xi)$ [6]: при $\pi>\arg\zeta>0$

$$Z_{\mu_n}(\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}H_0^{(1)}\left(\zeta\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\alpha}\right)e^{i\mu_n\alpha}\,d\alpha. \tag{29}$$

Контур γ_1 изображен на фиг. 2. Изменив порядок интегрирования и учитывая соотношение [7]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi z}H_0^{(1)}\left(r\sqrt{k^2-\xi^2}\right)d\xi=-2i\frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}}, \tag{30}$$

справедливое при $0<\arg\sqrt{k^2-\xi^2}<\pi$, $0\leqslant\arg k<\pi$, r, z — действительные величины, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi z}Z_{\mu_n}(\xi)\,d\xi=\frac{i}{\pi}\int_{\gamma_1}\frac{e^{ikR(\alpha)+i\mu_n\alpha}}{R(\alpha)}\,d\alpha, \tag{31}$$

где

$$R(\alpha)=\sqrt{r^2+r_0^2+z^2-2rr_0\cos\alpha}.$$

Для звуковых потенциалов $\psi_{1,2}(r,z,\varphi)$ получается выражение в виде суммы нормальных волн

$$\psi_{1,2}(r,z,\varphi)=-2\sum_{n=0}^{\infty}T_{1,2}(\mu_n,\varphi)\int_{\gamma_1}\frac{e^{ikR(\alpha)+i\mu_n\alpha}}{R(\alpha)}\,d\alpha. \tag{32}$$

Если источник расположен в области D_2, т. е. $\Phi_1<\varphi_0<\Phi$, то аналогично можно получить для $\psi_{1,2}(r,z,\varphi)$ следующие выражения:

$$\psi_{1,2}(r,z,\varphi)=-2\sum_{n=0}^{\infty}S_{1,2}(\mu_n,\varphi)\int_{\gamma_1}\frac{e^{ikR(\alpha)+i\mu_n\alpha}}{R(\alpha)}\,d\alpha, \tag{33}$$

где

$$S_1(\mu_n, \varphi) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sin \mu_n \varphi \cos \mu_n (\Phi - \varphi_0)}{\Phi_1 + \Phi_2 \dfrac{\sin 2\mu_n \Phi_1}{\sin 2\mu_n \Phi_2}} \frac{\cos \mu_n \Phi_1}{\sin \mu_n \Phi_2}, \tag{34}$$

$$S_2(\mu_n, \varphi) = \frac{\cos \mu_n (\Phi - \varphi) \cos \mu_n (\Phi - \varphi_0)}{\Phi_1 + \Phi_2 \dfrac{\sin 2\mu_n \Phi_1}{\sin 2\mu_n \Phi_2}} \frac{\sin 2\mu_n \Phi_1}{\sin 2\mu_n \Phi_2}. \tag{35}$$

При выводе формул (32)–(35) не учитывалось следующее: при отношении между углами Φ_1 и $\Phi_2 \dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = \dfrac{2l+1}{2m}$ или $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = \dfrac{2l}{2m+1}$ (l, m — целые числа), найдутся такие значения μ, что одновременно будут выполняться равенства

$$\cos \mu \Phi_1 = 0, \quad \sin \mu \Phi_2 = 0 \tag{36}$$

или

$$\cos \mu \Phi_2 = 0, \quad \sin \mu \Phi_1 = 0. \tag{37}$$

При этом уравнение (25) удовлетворяется независимо от значения ρ_2 / ρ_1. Уравнения (36) имеют решение, только если $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = \dfrac{2l+1}{2m}$. При этом все значения

$$\mu_k' = \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\Phi_1} (2k+1) = \frac{m\pi}{\Phi_2} (2k+1) \tag{38}$$

удовлетворяют уравнениям (36) и являются корнями уравнения (25). При $\Phi_1 / \Phi_2 = 2l / (2m+1)$ значения μ_k''

$$\mu_k'' = \frac{l\pi}{\Phi_1} (2k+1) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\Phi_2} (2k+1) \tag{39}$$

удовлетворяют уравнениям (37) и являются решениями уравнения (25). Следовательно, при переходе от выражений (12) к формулам (22) и (26) нужно учитывать и вычеты в точках μ_k' или μ_k''. В этих случаях окончательное выражение для звуковых потенциалов $\psi_{1,2}(r, z, \varphi)$ при $\varphi < \Phi_1$ можно написать следующим образом:

$$\psi_{1,2}(r, z, \varphi) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} T_{1,2}'(\mu_n, \varphi) \int_{\gamma_1} \frac{e^{ihR(\alpha) + i\mu_n \alpha}}{R(\alpha)} d\alpha, \tag{40}$$

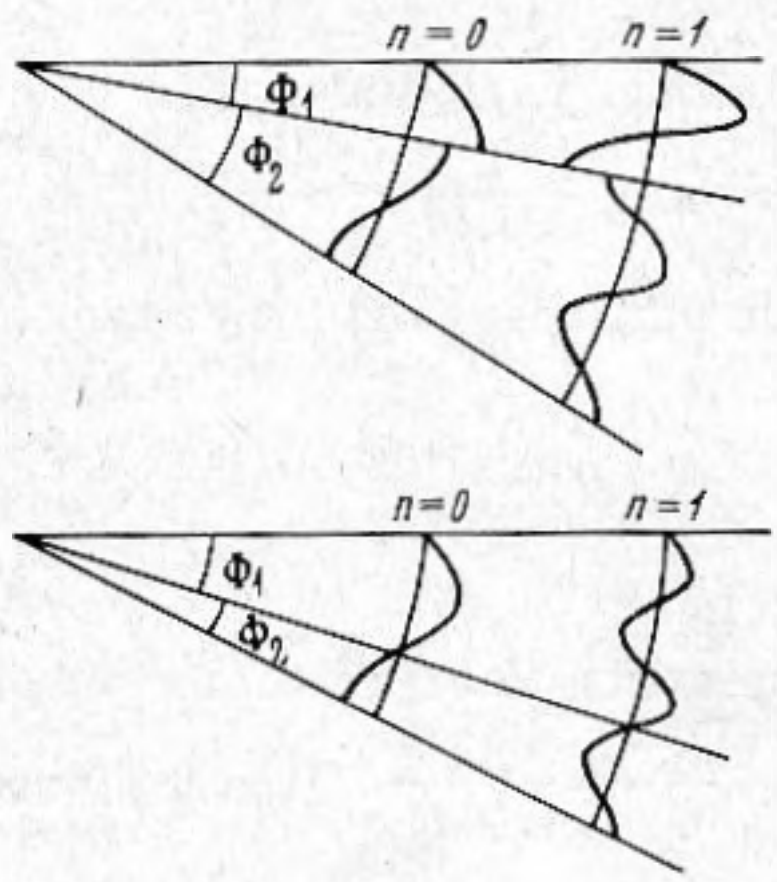
где $T_{1,2}'(\mu_n, \varphi) = T_{1,2}(\mu_n, \varphi)$, если μ_n не совпадают ни с одним из значений μ_k' или μ_k'', и при $\Phi_1 / \Phi_2 = (2l+1) / 2m$

$$T_1'(\mu_n, \varphi) = \frac{\sin \mu_n \varphi \sin \mu_n \varphi_0}{\Phi_1 + \Phi_2 \dfrac{\rho_1}{\rho_2}}, \qquad T_2'(\mu_n, \varphi) = \frac{\sin \mu_n \varphi \sin \mu_n \varphi_0}{\Phi_2 + \Phi_1 \dfrac{\rho_2}{\rho_1}}, \tag{41}$$

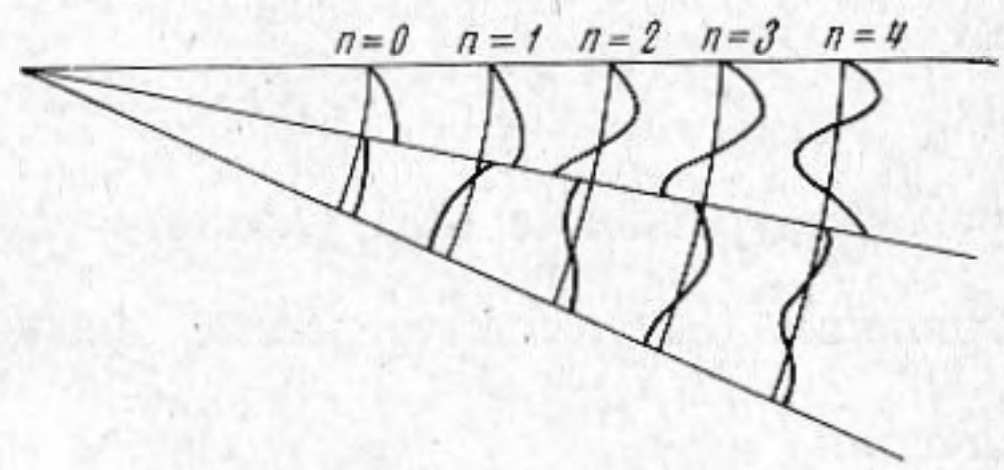
если $\mu_n = \mu_k'$, а при $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2} = \dfrac{2l}{2m+1}$

$$T_1'(\mu_n, \varphi) = T_2'(\mu_n, \varphi) = \frac{\sin \mu_n \varphi \sin \mu_n \varphi_0}{\Phi_1 + \Phi_2 \dfrac{\rho_2}{\rho_1}}, \tag{42}$$

если $\mu_n = \mu_k''$. Формулы (32) и (40) в предельном случае $\rho_2 / \rho_1 \to \infty$ переходят в выражение для звукового потенциала, приведенное в работе [1] для клина с углом раствора Φ_1 с одной абсолютно мягкой, другой абсолютно жесткой гранями. С этим же выражением, только для клина с углом раствора $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, совпадают формулы (32) и (40) при $\rho_2 = \rho_1$. При $\Phi_1 / \Phi_2 = 2l / 2m + 1$ звуковой потенциал нормальной волны, соответствующей значению μ_k'', обращается в нуль на границе двух сред, а при $\Phi_1 / \Phi_2 = 2l / 2m + 1$ обращается в нуль нормальная производная звукового потенциала волны, соответствующей значению μ_k'. Распределение поля нормальной волны по координате φ в этих случаях имеет вид, изображенный на фиг. 3, где принято $\Phi_1 / \Phi_2 = 2$ и $\Phi_1 / \Phi_2 = 1/2$, $n = 0, 1$, $\rho_2 / \rho_1 = 2$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для других номеров нормальных волн зависимость звукового потенциала ψ_n от координаты φ описывается множителем $\sin \mu_n \varphi$, где μ_n является корнем уравнения $\operatorname{tg} \mu_n \Phi_1 \operatorname{tg} \mu_n \Phi_2 = \rho_2 / \rho_1$. Эта зависимость при $\Phi_1 = \Phi_2$ и $\rho_2 / \rho_1 = 9{,}47$ ($\operatorname{arcctg} \sqrt{\rho_2 / \rho_1} = 2\pi / 5$) для первых пяти нормальных волн изображена на фиг. 4. Максимум звукового потенциала, который имеет место при $\varphi = \Phi_1$, если $\rho_2 \to \infty$, при $\rho_2 / \rho_1 < \infty$ смещается от грани клина $\varphi = \Phi_1$. Значение потенциала на грани клина $\varphi = \Phi_1$ тем меньше, чем меньше отношение ρ_2 / ρ_1. Однако оно не слишком сильно отличается от максимального значения. Так, при $\Phi_1 = \Phi_2$ и $\rho_2 / \rho_1 > 1$ отношение ψ_n при $\varphi = \Phi_1$ к максимальному значению ψ_n не меньше чем $1 / \sqrt{2}$. Так же ведет себя и зависимость потенциала нормальной волны от угловой координаты источника φ_0, которая описывается множителем $\sin \mu_n \varphi_0$. Степень возбуждения нормальной волны зависит также от множителя $M = \left[\Phi_1 + \Phi_2 \dfrac{\sin 2\mu_n \Phi_1}{\sin 2\mu_n \Phi_2} \right]^{-1}$, который является сложной функцией параметров задачи и номера n. Можно показать, что $[\Phi_1 + \Phi_2 \rho_2 / \rho_1]^{-1} \leqslant M \leqslant [\Phi_1 + \Phi_2 \rho_1 / \rho_2]^{-1}$ при $\rho_2 / \rho_1 \gg 1$. Величина M мало отличается от единицы при близких значениях плотностей ρ_2 и ρ_1 или при малых по сравнению с Φ_1 значениях угла Φ_2.

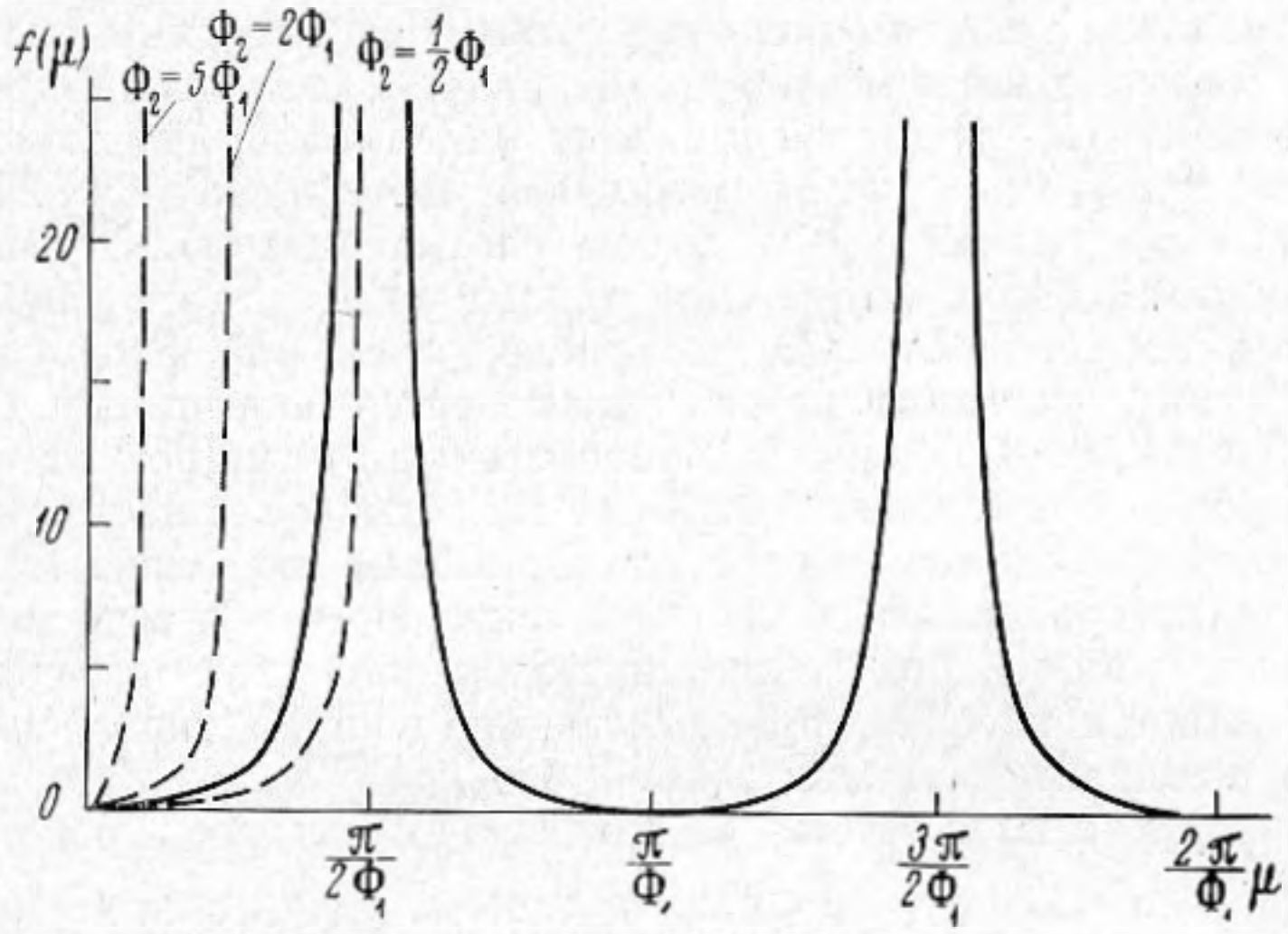
Зависимость поля нормальной волны от координат r и z определяется интегралом $I = \int\limits_{\gamma_1} \exp [ikR(\alpha) + i\mu_n \alpha] R^{-1}(\alpha)\, d\alpha$. Для этого интеграла в работе [8] получено асимптотическое представление при $\mu_n \to \infty$. После некоторых преобразований это асимптотическое представление можно свести к более простому виду, который приводится в работе [1]:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{ikR(\alpha) + i\mu_n \alpha}}{R(\alpha)}\, d\alpha = -\frac{2\sqrt[3]{2}\sqrt{\pi} \exp \left[ik\sqrt{w^2 - u^2} - i\mu_n \arccos \dfrac{u}{w} \right]}{\sqrt[3]{ku}\sqrt{w^2 - u^2}} \cdot v(t_n). \quad (43)$$

где $t_n = \sqrt[3]{2k^2}\,\dfrac{L_n - u}{\sqrt[3]{u}}$, $L_n = \dfrac{\mu_n}{k}$, $v(t)$ — функция Эйри, u и w — новые переменные, связанные с координатами r и z соотношениями

$$2u = \sqrt{(r+r_0)^2+z^2} - \sqrt{(r-r_0)^2+z^2},$$
$$2w = \sqrt{(r+r_0)^2+z^2} + \sqrt{(r-r_0)^2+z^2}. \qquad (44)$$

Эта асимптотика при $kr_0 > \mu_n \gg 1$ хорошо описывает поле n-й нормальной волны в освещенной области $(u > L_n)$, в зоне тени $(u < L_n)$, на каустике



Фиг. 5

$(u = L_n)$ и в ее окрестности. При $\mu_n \lesssim 1$ точка наблюдения должна быть достаточно далеко удалена от ребра клина, так чтобы $ku \gg 1$. Интеграл I при $\mu_n > kr_0$ также можно описывать формулой (43), но значение μ_n не должно быть много больше величины kr_0, так что $\mu_n - kr_0 \ll \mu_n$. В работе [8] получено асимптотическое представление интеграла I для случая, когда $\mu_n > kr_0$, в том числе и для $\mu_n \gg kr_0$. Поскольку нормальные волны больших номеров $(\mu_n > kr_0)$ быстро затухают при удалении точки наблюдения от источника и дают вклад в общее поле на несколько порядков ниже, чем нормальные волны низких номеров $(\mu_n < kr_0)$, знания асимптотики (43) достаточно для анализа звукового поля. Характер зависимости поля нормальной волны от координат r и z подробно исследуется в работе [1] и без изменений переносится на случай ограниченных значений ρ_2/ρ_1, который рассматривается в данной работе. Только значения μ_n, определяемые из уравнения (25), зависят от углов Φ_1 и Φ_2, от отношения ρ_2/ρ_1 и не являются, вообще говоря, линейной функцией номера n.

Рассмотрим функцию $f(\mu) = \operatorname{tg}\mu\Phi_1 \operatorname{tg}\mu\Phi_2$ при $\mu > 0$. Эта функция обращается в нуль, если μ равно $m\pi/\Phi_1$ или $m\pi/\Phi_2$ $(m = 0, 1, \ldots)$, и стремится к бесконечности при $\mu \to (m + 1/2)\pi/\Phi_1$ или $(m + 1/2)\pi/\Phi_2$. Обозначим значения μ, при которых $f(\mu) \to \infty$, через $\mu_{n\infty}$, расположив их в возрастающем порядке, а значения μ, при которых $f(\mu) = 0$,— через μ_{n0}. Тогда $\mu_{00} < \mu_{0\infty} < \mu_{10} < \mu_{1\infty} \ldots < \mu_{n0} < \mu_{n\infty}$. В каждом интервале значений μ $(\mu_{n0}, \mu_{n\infty})$ или $(\mu_{(n-1)\infty}, \mu_{n0})$, который относится к области положительных значений $f(\mu)$, $df/d\mu$ в нуль не обращается. Следовательно, в этих интервалах $f(\mu)$ монотонна, изменяется от нуля до бесконечности, и найдутся значения μ_n из этих интервалов такие, что $f(\mu_n) = \rho_2/\rho_1$. При $\rho_2 = \rho_1$ корнями уравнения $f(\mu) = 1$ являются значения μ, равные $(n + 1/2)\pi/\Phi$. Таким образом, каждому значению $(n + 1/2)\pi/\Phi$ можно

поставить в соответствие корень μ_n уравнения $f(\mu_n) = \rho_2 / \rho_1$, лежащий в том же интервале $(\mu_{n0}, \mu_{n\infty})$ или $(\mu_{(n-1)\infty}, \mu_{n0})$, что и значение $(n + {}^1/_2)\pi / \Phi$. Можно утверждать также, что между соседними значениями чисел $(n + {}^1/_2)\pi / \Phi$ лежат не больше двух корней μ_n. График функции $f(\mu)$ при $\Phi_1 = \Phi_2$ изображен на фиг. 5. Пересечения горизонтальной прямой $f(\mu) = \rho_2 / \rho_1$ с кривыми графика определяют положение корней μ_n. На этой же фигуре пунктиром изображены кривые $\operatorname{tg} \mu_0\Phi_1 \operatorname{tg} \mu_0\Phi_2$ при $\Phi_2 = \Phi_1 / 2, 2\Phi_1, 5\Phi_1$.

Проникновение поля в направлении к ребру клина определяется каустикой нулевой нормальной волны $u = L_0$. Чем больше угол Φ_2 при постоянных значениях Φ_1 и ρ_2 / ρ_1, тем меньше значение μ_0, тем дальше нулевая нормальная волна проникает в клин. При постоянных значениях Φ_1 и Φ_2 чем больше отношение ρ_2 / ρ_1, тем меньше волна проникает в клин. При этом величина L_0 стремится к своему максимальному значению, равному $\pi / 2\Phi_1 k$, при $\rho_2 / \rho_1 \to \infty$. Минимальное значение $L_0 = \pi / 2\Phi k$ достигается при $\rho_2 = \rho_1$ (случай $\rho_2 < \rho_1$ мы не рассматриваем). С увеличением номера нормальной волны расстояние между каустикой и ребром клина увеличивается. Значение L_n примерно равно $(n + {}^1/_2)\pi / \Phi$, но расстояние между соседними каустиками на оси r не остается постоянным.

Таким образом, слой осадков с плотностью ρ_2, отличной от плотности воды ρ_1, оказывает существенное влияние на звуковое поле в прибрежной зоне, а именно: изменяется распределение полей нормальных волн по координате φ (по сравнению со случаем, когда $\rho_2 \to \infty$), в частности, нет максимума давления на дне; меняется положение каустик нормальных волн; увеличивается глубина проникновения поля в клин; изменяется степень возбуждения нормальных волн.

Автор благодарит Н. С. Агееву за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Комиссарова. Асимптотическое представление поля точечного источника для одной модели берегового клина. Акуст. ж. 1972, **18**, 2, 259—264.
2. В. Ю. Завадский. О некоторых вопросах дифракции в соприкасающихся жидких и упругих клиньях. Акуст. ж., 1966, **12**, 192—205.
3. Г. Д. Малюжинец. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн. Докт. дис., М., Физический ин-т им. П. Н. Лебедева АН СССР, 1950.
4. Г. Д. Малюжинец. Связь между формулами обращения интеграла Зоммерфельда и формулами Конторовича — Лебедева. Докл. АН СССР, 1958, **119**, 1, 49—51.
5. М. И. Конторович, Н. Н. Лебедев. Об одном методе решения некоторых задач теории дифракции и родственных ей проблем. ЖЭТФ, 1938, 8, 10—11, 1192.
6. А. А. Тужилин. Новые представления дифракционных полей в клиновидных областях с идеальными границами. Акуст. ж., 1963, **9**, 2, 209—214.
7. И. С. Рыжик, И. М. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
8. А. А. Тужилин. Исследование задач дифракции (синусоидальных) волн в клиновидной области с идеальными гранями. Канд. дис., М., Акустический ин-т АН СССР, 1963.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
3 июля 1972 г.