АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 4

УДК 534.2:532.031

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКА, ОГРАНИЧЕННОГО УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

А. Д. Лапин

Исследована устойчивость потока идеальной жидкости, ограниченного снизу упругой стенкой (мембраной, пластиной и тому подобным) и сверху абсолютно жесткой стенкой. Скорость движения жидкости предполагается постоянной по сечению потока и равной U. Показано, что для мембраны движение устойчиво при $U \leqslant c$ и неустойчиво при $U > c$, где c — скорость распространения свободных волн на мембране. Для пластины движение неустойчиво при любой скорости U. Исследована также устойчивость потока, ограниченного стенками, характеризующимися реактивным импедансом. Показано, что движение устойчиво при импедансе упругого типа и неустойчиво при импедансе массового типа.

В работе [1] было показано, что поток, ограниченный абсолютно жесткими стенками, является устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям. Естественно возникает вопрос об исследовании устойчивости потока, ограниченного упругими стенками. Ниже это исследование выполнено для идеальной жидкости, движущейся между двумя параллельными плоскостями.

Рассмотрим жидкий однородный слой, ограниченный снизу упругой стенкой $z=0$ и сверху абсолютно жесткой стенкой $z=H$. Будем считать, что стенки неподвижны, а жидкость движется относительно них со скоростью U в положительном направлении оси x. Исследуем это движение жидкости на устойчивость по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Следуя обычному методу определения устойчивости [2–4], наложим на основное движение бесконечно малое возмущение, в котором все величины зависят от времени t и координат x и y соответственно множителю $\exp[i(mx+ny-\omega t)]$. Возмущение p давления в жидкости и смещение ζ стенки удовлетворяют уравнениям

$$\Delta p + \left(k + i\beta \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p = 0, \tag{1}$$

$$(\rho\omega^2 + L)\zeta = p(x, y, 0, t), \tag{2}$$

где $k=\omega/c_0$, $\beta=U/c_0$, c_0 — скорость звука в неподвижной жидкости, ρ — поверхностная плотность стенки, L — линейный дифференциальный оператор, характеризующий упругие свойства стенки. Например, для мембраны оператор L равен $T\nabla^2$, где T — натяжение мембраны. Для пластины, совершающей изгибные колебания, этот оператор имеет вид

$$L = -\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\nabla^4,$$

где h — толщина пластины, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона.

На границах слоя возмущение удовлетворяет следующим условиям:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = \rho_0 c_0^2 \left(k + i\beta \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \zeta, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=H} = 0, \tag{4}$$

где ρ_0 — плотность жидкости.

Следуя работам [2—4], величины p и ζ мы будем искать в виде

$$p(x, y, z, t) = A(m, n, z) \exp\left[i(mx + ny - \omega t)\right], \tag{5}$$

$$\zeta(x, y, t) = B(m, n) \exp\left[i(mx + ny - \omega t)\right]. \tag{6}$$

Из уравнений (1) и (2) и граничного условия (4) найдем $A(m, n, z)$:

$$A(m, n, z) = [\rho\omega^2 - L(m, n)] \frac{\cos[\gamma(H - z)]}{\cos(\gamma H)} B(m, n), \tag{7}$$

где

$$\gamma = \sqrt{(k - \beta m)^2 - (m^2 + n^2)},$$

$$L(m, n) = -\exp\left[-i(mx + ny)\right] L \exp\left[i(mx + ny)\right].$$

Например, для мембраны $L(m, n) = T(m^2 + n^2)$, для пластины $L(m, n) = \dfrac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}(m^2 + n^2)^2$.

Удовлетворим граничному условию (3). Подставляя в него величины p и ζ, определяемые по формулам (5)—(7), мы получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\rho_0(\omega - \tilde{U}\alpha)\cos(\gamma H) + \gamma[L(m, n) - \rho\omega^2]\sin(\gamma H) = 0, \tag{8}$$

где

$$\alpha = \sqrt{m^2 + n^2} \geqslant 0, \qquad \tilde{U} = \frac{m}{\alpha} U.$$

Это дисперсионное уравнение определяет «допустимые частоты». Если все корни этого уравнения вещественны или имеют отрицательную мнимую часть, то малое возмущение не нарастает со временем в данной точке слоя; поэтому основное движение является устойчивым по отношению к таким возмущениям. Если же какой-либо корень уравнения (8) имеет положительную мнимую часть, то малое возмущение будет нарастать со временем. Это означает, что основное движение является неустойчивым.

«Допустимые частоты» легко вычислить лишь для несжимаемой жидкости. В этом предельном случае ($c_0 = \infty$) дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2[\rho_0 \operatorname{ch}(\alpha H) + \alpha\rho \operatorname{sh}(\alpha H)] - 2\omega\tilde{U}\alpha\rho \operatorname{ch}(\alpha H) + {}$$
$$+ [\rho_0\tilde{U}^2\alpha^2 \operatorname{ch}(\alpha H) - \alpha L(m, n) \operatorname{sh}(\alpha H)] = 0. \tag{9}$$

Корни уравнения (9) определяются по формуле

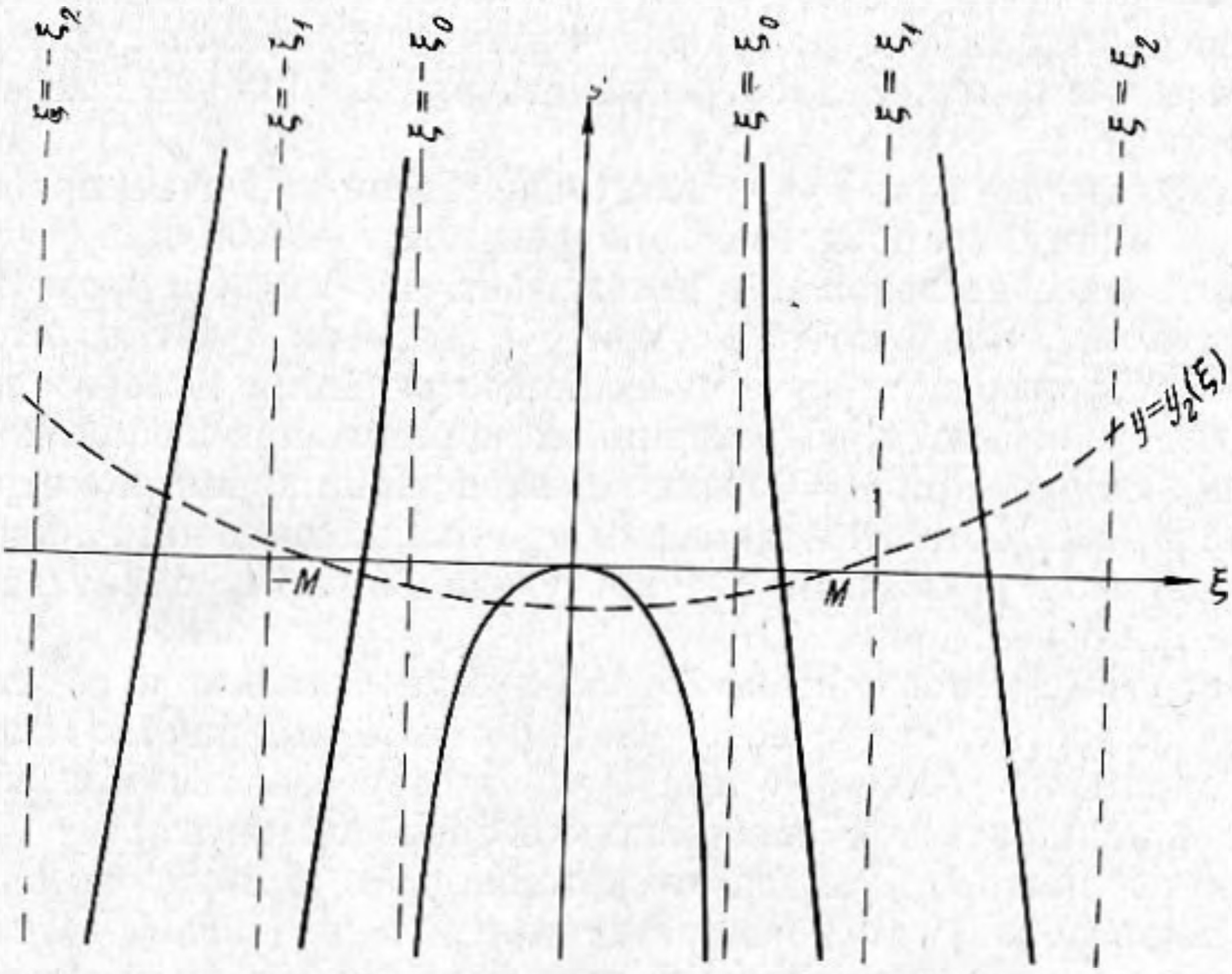
$$\omega = \frac{\tilde{U}\alpha\rho_0 \operatorname{ch}(\alpha H) \pm \sqrt{\rho_0\rho\,\alpha^3/2 \operatorname{sh}(2\alpha H)\left\{\dfrac{L(m, n)}{\rho\alpha^2}[1 + \alpha\rho/\rho_0 \operatorname{th}(\alpha H)] - \tilde{U}^2\right\}}}{[\rho_0 \operatorname{ch}(\alpha H) + \alpha\rho \operatorname{sh}(\alpha H)]}. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что при заданной скорости U движение несжимаемой жидкости будет устойчивым, если при любых вещественных значениях m и n выполняется соотношение

$$\frac{L(m,n)}{\rho\alpha^2}[1+\alpha\rho/\rho_0\,\mathrm{th}(\alpha H)]\geqslant U^2. \qquad (11)$$

Если же для некоторых вещественных значений m и n это соотношение не выполняется, то движение будет неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Например, для мембраны движение устойчиво при $U\leqslant c$ и неустойчиво при $U>c$, где $c=\left\{\frac{L(m,n)}{\rho\alpha^2}\right\}^{1/2}=\{T/\rho\}^{1/2}$ — скорость распространения свободных волн на мембране. Для пластины движение неустойчиво при любой скорости ($U\neq 0$) потока, так как величина $\frac{L(m,n)}{\rho\alpha^2}=\frac{Eh^3\alpha^2}{12(1-\sigma^2)\rho}$ стре-



мится к нулю при $\alpha\to 0$ и, следовательно, соотношение (11) не выполняется при малых значениях α.

Для сжимаемой жидкости корни дисперсионного уравнения (8) можно найти лишь численными методами. Однако точные значения этих корней и не нужны для исследования устойчивости движения; для этой цели достаточно знать лишь знак их мнимой части. Неустойчивость потока дают только корни с положительной мнимой частью.

Очевидно, что при $U=0$ корни уравнения (8) вещественны или имеют отрицательную мнимую часть. При увеличении U эти корни двигаются по комплексной плоскости ω и некоторые из них могут перейти на верхнюю полуплоскость. Переход хотя бы одного корня на верхнюю полуплоскость приводит к неустойчивости потока.

Исследуем поведение корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости при увеличении скорости потока. Для этого преобразуем уравнение (8) к виду

$$\frac{(\xi-\beta)^2}{\sqrt{(\xi-\beta)^2-1}}\mathrm{ctg}\left[(\alpha H)\sqrt{(\xi-\beta)^2-1}\right]=\rho\alpha/\rho_0(\xi^2-M^2), \qquad (12)$$

где

$$\tilde{\beta}=\bar{U}/c_0, \quad \xi=\frac{\omega}{\alpha c_0}, \quad M=\left\{\frac{L(m,n)}{\rho\alpha^2 c_0{}^2}\right\}^{1/2}.$$

Вещественные корни уравнения (12) являются точками пересечения кривых $y=y_1(\xi,\tilde{\beta})$ и $y=y_2(\xi)$, где

$$y_1(\xi,\tilde{\beta})=\frac{(\xi-\tilde{\beta})^2}{\sqrt{(\xi-\tilde{\beta})^2-1}}\operatorname{ctg}[(\alpha H)\sqrt{(\xi-\tilde{\beta})^2-1}], \tag{13}$$

$$y_2(\xi)=\rho\alpha/\rho_0(\xi^2-M^2).$$

Графики $y=y_1(\xi,0)$ и $y=y_2(\xi)$ изображены на фигуре соответственно сплошной и пунктирной линиями. Кривая $y=y_1(\xi,0)$ имеет асимптоты — прямые линии $\xi=\pm\xi_r$ где $\xi_r=\sqrt{1+\left(\frac{r\pi}{\alpha H}\right)^2}$, $r=0, 1, 2, \ldots$ График $y=y_1(\xi,\tilde{\beta})$ получается путем сдвига графика $y=y_1(\xi,0)$ по оси абсцисс на величину $\tilde{\beta}$.

Из приведенных на фигуре графиков можно сделать следующие заключения о поведении корней дисперсионного уравнения (12) на комплексной плоскости ξ.

1. Корни, которые при $\beta=0$ были вещественными и не превосходили по модулю единицу, становятся комплексными корнями при $\beta>M$.

Дополнительное исследование показывает, что мнимая часть этих корней положительна. Следовательно, при $\beta>M$ поток будет неустойчивым.

2. Корни, которые при $\beta=0$ были вещественными и превосходили по модулю единицу, остаются вещественными корнями при любом значении β.

3. Корни, которые при $\beta=0$ были комплексными корнями с отрицательной мнимой частью, остаются таковыми при любом значении β. Это следует из того факта, что в уравнении (12) при увеличении β не появляется новых вещественных корней.

Таким образом, поток сжимаемой жидкости становится неустойчивым при тех же скоростях, что и поток несжимаемой жидкости. Именно для мембраны движение устойчиво при $U\leqslant c$ и неустойчиво при $U>c$; для пластины движение неустойчиво при любой скорости потока.

Аналогично можно исследовать устойчивость потока, ограниченного стенками, характеризующимися реактивным импедансом. Пусть поток ограничен снизу стенкой, характеризующейся безразмерным акустическим импедансом Z, и сверху абсолютно жесткой стенкой. Исследуем этот поток на устойчивость по отношению к бесконечно малым возмущениям. Применяя обычный метод исследования устойчивости, получим, что дисперсионное уравнение для «допустимых частот» имеет вид

$$\frac{(\xi-\tilde{\beta})^2}{\sqrt{(\xi-\tilde{\beta})^2-1}}\operatorname{ctg}[(\alpha H)\sqrt{(\xi-\tilde{\beta})^2-1}]=i\xi Z(\xi), \tag{14}$$

где величины $\tilde{\beta}$, α, H и ξ имеют те же значения, что и в уравнении (12).

Вещественные корни уравнения (14) являются точками пересечения кривых $y=y_1(\xi,\tilde{\beta})$ и $y=y_3(\xi)$, где $y_3(\xi)=i\xi Z(\xi)$, а $y_1(\xi,\tilde{\beta})$ определяется по формуле (13). График $y=y_1(\xi,0)$ изображен на фигуре сплошной линией. Для построения графика $y=y_3(\xi)$ и, следовательно, нахождения корней уравнения (14) нужно знать частотную зависимость импеданса. Некоторые заключения об устойчивости потока можно сделать при довольно общих предположениях об этой зависимости.

Пусть импеданс стенки является импедансом упругого типа при любой вещественной частоте. Тогда $y_3(\xi)$ будет отрицательной величиной при любом вещественном ξ. Например, для импеданса $Z=(-i\varkappa\omega)^{-1}$, где $\varkappa>0$, имеем $y_3 = -(\alpha c_0 \varkappa)^{-1}$. Это приводит к тому, что корни уравнения (14), которые при $\beta = 0$ были вещественными или имели отрицательную мнимую часть, остаются таковыми при любом значении β (при любом сдвиге по оси абсцисс графика $y = y_1(\xi, 0)$). Следовательно, поток, ограниченный стенками, характеризующимися импедансом упругого типа, при любой скорости U является устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Исследуем устойчивость потока, ограниченного стенками, характеризующимися импедансом массового типа. При таком импедансе имеем $y_3(0) = 0$ и $y_3(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Например, для импеданса $Z = -i\omega m$, где $m > 0$, получим $y_3 = (\alpha c_0 m)\xi^2$. При $U = 0$ кривые $y = y_1(\xi, \tilde{\beta})$ и $y = y_3(\xi)$ пересекаются в точке $\xi = 0$. Это пересечение пропадает при $U \neq 0$. Исследование показывает, что при этом соответственный корень уравнения (14) становится комплексным корнем с положительной мнимой частью. Это означает, что поток является неустойчивым при любой скорости U.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. C. Lin. On the stability of two-dimensional paral'el flows. Parts I—III. Quart. Appl. Math., 1945, 3, 2, 117—142, 3, 218—234, 4, 277—301.
2. Линь. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат., 1954.
4. А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
2 апреля 1972 г.