АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

УДК 534.26

ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОВЕРХНОСТНОГО РЕЗОНАНСА

В. К. Гавриков, А. В. Кац

Рассмотрено вынужденное рассеяние звука на поверхности раздела двух маловязких жидкостей в условиях поверхностного резонанса, когда амплитуды скользящих вдоль границы комбинационных рассеянных волн аномально велики; теория возмущений по малому наклону поверхности в этом случае неприменима. Корректные результаты получены при решении существенно нелинейной самосогласованной задачи дифракции на периодической поверхности, возникающей в результате развития неустойчивости. Показано, что инкремент нарастания убывает с ростом амплитуды усиливаемых поверхностных колебаний. Получены условия возникновения стационарного режима вынужденного рассеяния. Найдена зависимость порога вынужденного рассеяния от амплитуды начальных колебаний поверхности. Показано, что при возникновении резонанса величина порога существенно уменьшается по сравнению с таковой при нерезонансной ситуации.

В работе [1] было показано, что при рассеянии достаточно мощной звуковой волны $\varphi = \mathrm{Re}\, A \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ на поверхности раздела двух жидкостей возникает неустойчивость, которая приводит к росту амплитуды колебаний поверхности $\zeta_\Omega = \mathrm{Re}\, a \exp(iqx - i\Omega t)$ и амплитуд A_n рассеянных волн на комбинационных частотах $\omega_n = \omega + n\Omega$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Эта неустойчивость возникает из-за обратного влияния падающего и рассеянных полей на движение границы раздела. Действительно, в силу нелинейности гидродинамических уравнений и граничных условий при $z = \zeta(x, t)$ возникает волна звукового давления на частоте поверхностных колебаний $p_{q\Omega} \sim A^* A_1 + A A_{-1}^*$, которая раскачивает колебания поверхности. При достаточно большой интенсивности падающей звуковой волны поток энергии, передаваемый ею поверхностным колебаниям, может превысить диссипативные потери, что и приведет к возникновению неустойчивости.

Теория возмущений по малым наклонам поверхности $qa \ll 1$ (см., например, работу [1]) приводит к заключению, что амплитуды рассеянных спектров $A_n \sim (iqa)^{|n|} A$, в частности,

$$A_1 \sim iqa \frac{(\rho_R - \rho_T) kA}{\rho_T k_{1z}^R - \rho_R k_{1z}^T}, \tag{1}$$

где $\rho_{R,T}$ — плотности сред, $k_{1z}^{R,T}$ — нормальные к границе компоненты волновых векторов рассеянных волн (см. (6)). Знаменатель в выражении (1), вообще говоря, порядка ρk и $A_{\pm 1} \sim iqaA$, звуковое давление $p_{q\Omega} \sim iqa|A|^2$. При этом порог неустойчивости $I_п \sim s\eta\Omega_0(q)$, где η — динамическая вязкость, $\Omega_0(q)$ — частота колебаний поверхности, s — скорость звука, $I_п$ — пороговая интенсивность.

Возможны, однако, ситуации, когда знаменатель в формуле (1) $\rho_T k_{1z}^R - \rho_R k_{1z}^T \ll \rho k$ и амплитуда A_1^R становится аномально большой *.

* Возникновение интенсивных рассеянных волн при дифракции звука на периодической границе раздела обсуждалось в работах [2—9]. Наиболее полно этот вопрос рассмотрен в работах [3—5].

$A_1^{R,T} \sim iqaA / (\xi + (qa)^2)$, $\xi \ll 1$. Эти ситуации соответствуют возникновению так называемого поверхностного резонанса. Звуковое давление $p_{q\Omega}$ вблизи резонанса существенно возрастает, что приводит к значительному уменьшению порога по сравнению с нерезонансной оценкой *.

Нетрудно видеть, что поверхностный резонанс возникает, если одна из комбинационных рассеянных волн распространяется вдоль границы раздела и совпадает при этом с собственными колебаниями системы. Действительно, собственные волны в системе с плоской границей существуют, если однородные граничные условия при $z = 0$ (ось z перпендикулярна границе и направлена из среды 1) для потенциалов $\varphi^{(1,2)}$: $\rho_1\dot{\varphi}^{(1)} = \rho_2\dot{\varphi}^{(2)}$ и $\partial\varphi^{(1)} / \partial z = \partial\varphi^{(2)} / \partial z$ допускают волновые решения вида $\varphi^{(1,2)} \sim \exp(ik_x x + ik_z^{(1,2)} z - i\omega t)$, где $(k_z^{(1,2)})^2 = \omega^2/s_{1,2}^2 - k_x^2$, причем в силу граничных условий на бесконечности $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\, k_z^{(1)} \leqslant 0$, $\mathrm{Re}, \mathrm{Im}\, k_z^{(2)} \geqslant 0$. Нетрудно видеть, что такие решения существуют, если

$$\rho_2 k_z^{(1)} - \rho_1 k_z^{(2)} = 0. \tag{2}$$

Так как $k_z^{(1)}$ и $k_z^{(2)}$ имеют разные знаки, соотношение (2) выполняется в двух случаях: 1) если $k_z^{(1)} = 0$, т. е. волна распространяется вдоль поверхности, причем скорости звука в средах равны ($s_1 = s_2$) и в силу этого $k_z^{(2)}$ также обращается в нуль — при произвольных плотностях сред; 2) если плотности сред существенно различаются, так что $\rho_2 / \rho_1 \to 0$ и одновременно $k_z^{(2)} = 0$ (или $\rho_1 / \rho_2 \to 0$ и $k_z^{(1)} = 0$), т. е. в существенно менее плотной среде волна бежит вдоль границы — при произвольном соотношении между скоростями звука.

Таким образом, при рассеянии звуковой волны на периодической поверхности раздела возникает резонанс, когда одна из рассеянных комбинационных волн скользит вдоль границы и выполнены условия 1) или 2). Амплитуда скользящей волны при этом аномально велика. Наличие на границе малых неровностей приводит к эффективному затуханию скользящей волны порядка $(qa)^2$ вследствие рассеяния на неровностях.

Легко видеть, что при выполнении условий 1) или 2) (т. е. при резонансе) знаменатель в формуле (1) обращается в нуль, что указывает на неприменимость теории возмущений по малым наклонам $qa \ll 1$. Оказывается, что для применимости теории возмущений требуется выполнение более сильного неравенства $(qa)^2 \ll \xi \ll 1$.

Поэтому при решении исходной системы уравнений ** (см. (5.1) — (6.1)) ***

$$\left[\rho_R \frac{\partial\varphi^R}{\partial t} - \rho_T \frac{\partial\varphi^T}{\partial t} + (\rho_R - \rho_T) gz\right]_{z=\zeta} + \sigma\Delta_\perp\zeta =$$

$$= \frac{1}{4}[\rho_R \Box_R (\varphi^R)^2 - \rho_T \Box_T (\varphi^T)^2]_{z=\zeta}, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi^R - \varphi^T) - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi^R - \varphi^T)\right]_{z=\zeta} = 0 \tag{4}$$

---

* Отметим, что аналогичная ситуация возникает и при вынужденном рассеянии электромагнитной волны на поверхности хорошо проводящей среды. Этот вопрос рассмотрен в работе [9].

** Для определенности мы всюду пишем уравнения для случая, когда звуковая волна падает из верхней (менее плотной) среды.

*** Формулы цитируемых работ мы снабжаем дополнительной цифрой, соответствующей номеру работы.

в случае резонанса мы не будем переносить граничные условия на невозмущенную границу $z=0$ * (ось z направлена вниз). В уравнениях (3), (4) индексом R отмечены величины, относящиеся к среде, из которой падает звуковая волна, индексом T — величины, относящиеся к другой среде, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\Box_{R,T}=\partial^2/\partial \mathbf{r}^2-s_{R,T}^{-2}\,\partial^2/\partial t^2$. Вследствие малых наклонов поверхности рассеянные поля можно искать в виде разложений по плоским волнам:

$$\varphi^R=\varphi+\varphi_{\text{пов}}^R+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n{}^R,\qquad \varphi^T=\varphi_{\text{пов}}^T+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n{}^T\qquad (n=0,1,2,\ldots).\quad (5)$$

Здесь $\varphi_{\text{пов}}^{R,T}$ — потенциалы в поверхностной волне, затухающие в глубь сред, $\varphi_n^{R,T}=\operatorname{Re}A_n^{R,T}\exp(ik_{nx}x+ik_{nz}^{R,T}z-i\omega_n t)$, где $k_{nx}=k_x+nq$, $\omega_n=\omega+n\Omega$,

$$(k_{nz}^{R,T})^2=\frac{\omega_n{}^2}{s_{R,T}^2}-k_{nx}^2;\ \operatorname{Re},\operatorname{Im}k_{nz}^R\leqslant 0,\ \operatorname{Re},\operatorname{Im}k_{nz}^T\geqslant 0.\qquad (6)$$

Будем считать в дальнейшем, что граница движется медленно, т. е. $\omega\gg\Omega$.

Подставляя формулы (3)—(4) выражения (5) для потенциалов $\varphi^{R,T}$ и разлагая возникающие экспоненциальные выражения вида $\exp[i\nu\times\cos(qx-\Omega t)]$ в ряды Фурье, получаем систему уравнений для относительных амплитуд $B_n^{R,T}=A_n^{R,T}/A$ рассеянных волн:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n-l}[\alpha B_n{}^T J_{n-l}(z_n{}^T)-B_n{}^R J_{n-l}(z_n{}^R)]=\delta_{l0}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n-l}[B_n{}^T J_{n-l}(z_n{}^T)\gamma_{n,n-l}^T+B_n{}^R J_{n-l}(z_n{}^R)\gamma_{n,n-l}^R]=\Lambda_l.\qquad (7)$$

Здесь $J_m(z_n^{R,T})$ — функция Бесселя, $\alpha=\rho_T/\rho_R$, $z_n{}^R=-ka\varepsilon_n{}^R$, $z_n{}^T=ka\varepsilon_n{}^T$, $\varepsilon_n{}^R=\lambda_n{}^R+\lambda_0{}^R$; $\varepsilon_n{}^T=\lambda_n{}^T-\lambda_0{}^R$, $\lambda_n^{R,T}$ — безразмерные z-компоненты волновых векторов рассеянных полей; согласно формуле (6)

$$\lambda_n{}^R(\varkappa,\theta)=[1-(\sin\theta+n\varkappa)^2]^{1/2},\quad \lambda_n{}^T(\varkappa,\theta)=[\beta^2-(\sin\theta+n\varkappa)^2]^{1/2};$$
$$\operatorname{Jm}\lambda_n^{R,T}\geqslant 0,\qquad (8)$$

$\varkappa=q/k$, θ — угол падения звуковой волны, $\beta=s_R/s_T$, $\Lambda_0=\cos\theta$, $\Lambda_{\pm1}=\mp{}^1/_2 iqa\sin\theta$, $\Lambda_{\pm2,\pm3}=0$, $\gamma_{n,m}^{R,T}=\lambda_n^{R,T}+m\varkappa(\sin\theta+n\varkappa)/\varepsilon_n^{R,T}$. В силу малости наклонов, как было показано Лысановым [6], можно произвести усечение системы уравнений (7). Имея в виду в дальнейшем рассмотрение резонанса в спектрах первого порядка ($\lambda_{\pm1}^{R,T}=0$), при нахождении амплитуд $B_{0,\pm1,\pm2}^{R,T}$ в системе (7) достаточно использовать лишь 10 уравнений (с $n,l=0,\pm1,\pm2$). При этом получим:

$$B_n^{R,T}=\frac{D_n^{R,T}}{D}\qquad (n=0,\pm1,\pm2),\qquad (9)$$

---

* Точное решение задачи о дифракции звука на периодической границе раздела сред при произвольной величине неровностей было дано в работах Урусовского [2, 3] и Машашвили и Урусовского [4, 5]. Для случая пологих неровностей, которым мы ограничимся, удобнее воспользоваться приближенным методом, использованным в работах Лысанова [6, 7].

где D — главный определитель, а $D_n^{R,T}$ — дополнительные определители, составленные из коэффициентов усеченной системы (7). Разлагая функции Бесселя по малому наклону и ограничиваясь слагаемыми до $(ka)^2$ включительно, получим

$$D=\prod_{i=-2}^{2} x_i\left[1+\left(\frac{ka}{2}\right)^2\sum_{n=-2}^{1}\frac{F_{n,n+1}}{x_n x_{n+1}}+O(ka)^4+\ldots\right], \tag{10}$$

где

$$x_j=\alpha\lambda_j^R+\lambda_j^T,\qquad F_{n,m}=\varepsilon_n^R\varepsilon_m^R(\gamma_{m,0}^T+\alpha\gamma_{n,-1}^R)(\gamma_{n,0}^T+\alpha\gamma_{m,1}^R)-$$

$$-\alpha\varepsilon_n^R\varepsilon_m^T(\gamma_{m,0}^R-\gamma_{n,-1}^R)(\gamma_{n,0}^T-\gamma_{m,1}^T)-\alpha\varepsilon_n^T\varepsilon_m^R(\gamma_{m,0}^T-\gamma_{n,-1}^T)(\gamma_{n,0}^R-\gamma_{m,1}^R)+$$

$$+\varepsilon_n^T\varepsilon_m^T(\alpha\gamma_{m,0}^R+\gamma_{n,-1}^T)(\alpha\gamma_{n,0}^R+\gamma_{m,1}^T);$$

$$D_0^R=(\alpha\Lambda_0-\gamma_{0,0}^T)x_{-2}x_{-1}x_1x_2+\left(\frac{ka}{2}\right)^2(x_1x_2\Delta_+^R+x_{-1}x_{-2}\Delta_-^R)+\ldots \tag{11}$$

где $\Delta_-^R=(\alpha\Lambda_0-\gamma_{0,0}^T)F_{1,2}-x_2\{\varepsilon_0^T\varepsilon_1^T(\alpha\gamma_{1,0}^R+\gamma_{0,-1}^T)(\gamma_{1,1}^T-\alpha\Lambda_0)+$

$$+\alpha\varepsilon_0^T\varepsilon_1^R(\gamma_{1,0}^T-\gamma_{0,-1}^T)(\gamma_{1,1}^R+\Lambda_0)+\alpha\varkappa\sin\theta[\varepsilon_1^T(\gamma_{1,1}^T-\gamma_{0,0}^T)-\varepsilon_1^R(\alpha\gamma_{1,1}^R+\gamma_{0,0}^T)]\},$$

Δ_+^R получается из Δ_-^R заменой $\varkappa\to-\varkappa$ (или, что то же самое, $\theta\to-\theta$). Заметим, что при такой замене меняются знаки индексов у λ_n, ε_n, x_n и $\gamma_{n,m}$, например, $\lambda_n(\varkappa,\theta)=\lambda_{-n}(-\varkappa,\theta)=\lambda_{-n}(\varkappa,-\theta)$, $\gamma_{n,m}(\varkappa,\theta)=\gamma_{-n,-m}(-\varkappa,\theta)=$ $=\gamma_{-n,-m}(\varkappa,-\theta)$. Поэтому при замене $\varkappa\to-\varkappa$ величина $F_{n,m}$ переходит в $F_{-m,-n}$; определитель (11) инвариантен относительно такой замены.

$$D_1^R=\frac{ika}{2}x_{-1}x_{-2}x_2[\varepsilon_0^R(\alpha\gamma_{0,-1}^R+\gamma_{1,0}^T)(\alpha\Lambda_0-\gamma_{0,0}^T)-\alpha x_0\varkappa\sin\theta- \tag{12}$$

$$-\alpha\varepsilon_0^T(\gamma_{0,-1}^T-\gamma_{1,0}^T)(\Lambda_0+\gamma_{0,0}^R)]+\ldots,$$

$$D_2^R=\left(\frac{ka}{2}\right)^2x_{-1}x_{-2}\{\varepsilon_0^R(\alpha\Lambda_0-\gamma_{0,0}^T)[\alpha\varepsilon_1^T(\gamma_{0,-1}^R-\gamma_{1,0}^R)(\gamma_{1,-1}^T-\gamma_{2,0}^T)-$$

$$-\varepsilon_1^R(\alpha\gamma_{0,-1}^R+\gamma_{1,0}^T)(\alpha\gamma_{1,-1}^R+\gamma_{2,0}^T)]+\alpha\varepsilon_0^R\varepsilon_0^T[\varepsilon_1^T(\gamma_{0,-1}^T+\alpha\gamma_{1,0}^R)(\gamma_{2,0}^T-\gamma_{1,-1}^T)-$$

$$-\varepsilon_1^R(\gamma_{1,0}^T-\gamma_{0,-1}^T)(\alpha\gamma_{1,-1}^R+\gamma_{2,0}^T)]-\alpha x_0\varkappa\sin\theta[\varepsilon_1^T(\gamma_{1,-1}^T-\gamma_{2,0}^T)-$$

$$-\varepsilon_1^R(\alpha\gamma_{1,-1}^R+\gamma_{2,0}^T)]\}+\ldots \tag{13}$$

Определители D_j^T $(j=0,1,2)$ получаются из формул (11)—(13) соответственно заменой $\alpha\gamma_{j,0}^R\rightleftarrows-\gamma_{j,0}^T$ и делением на α. Амплитуды $B_{-j}^{R,T}$ $(j=1,2)$ получаются из соответственных $B_j^{R,T}$ заменой $\varkappa\to-\varkappa$.

Нетрудно убедиться в том, что амплитуды рассеянных полей $B_{\pm1}^{RT}$, найденные по формулам (9), (10), (12), вдали от резонанса, т. е. при $x_j\sim1$, $D\sim1$, совпадают с вычисленными по теории возмущений (см. формулу (7.1)). При возникновении резонанса один из $x_j\ll1$ и определитель D становится существенно меньше единицы. Действительно, пусть спектр B_1^R или B_1^T становится скользящим ($\lambda_1^R=0$ или $\lambda_1^T=0$). Тогда при $\alpha\gg1$ и $\lambda_1^R=0$ ($\alpha\ll1$ и $\lambda_1^T=0$) или $s_R\approx s_T$ и $\lambda_1^R\approx\lambda_1^T\approx0$

$$\alpha\lambda_1^R+\lambda_1^T\ll\alpha\lambda_j^R+\lambda_j^T\quad(j\neq1) \tag{14}$$

Относительная амплитуда	Из менее плотной среды $\alpha=\rho_T/\rho_R>1,\quad \lambda_1^R=0,$ $\lvert\beta-1\rvert\ll 1$ или $\lvert\beta-1\rvert\sim 1$ и $\alpha\gg 1$	Из более плотной среды $\alpha=\rho_T/\rho_R<1,\quad \lambda_1^T=0,$ $\lvert\beta-1\rvert\ll 1$ или $\lvert\beta-1\rvert\sim 1$ и $\alpha\ll 1$
B_0^R	$R\left[\xi+\mu\dfrac{(\alpha-1)\lambda_0^R-(\alpha+1)\lambda_2^R}{(\alpha-1)\lambda_0^R\lambda_2^R}\right]\Delta^R$	$R\left[\xi+\mu\dfrac{(\alpha-1)\lambda_0^T-(\alpha+1)\lambda_2^T}{(\alpha-1)\lambda_0^T\lambda_2^T}\right]\Delta^T$
B_0^T	$T\left(\xi+\mu\dfrac{\varkappa_1^R+\lambda_1^T\lambda_2^R}{\varkappa_1^R\lambda_2^R}\right)\Delta^R$	$T\left(\xi+\mu\dfrac{\beta\varkappa_1^T+\lambda_2^T\lambda_1^R}{\beta\varkappa_1^T\lambda_2^T}\right)\Delta^T$
B_1^R	$(\alpha T/R)(iqa/2)\Delta^R$	$(\alpha T/R)(iqa/2\beta)\Delta^T$
B_1^T	$(T/R)(iqa/2)\Delta^R$	$(T/R)(iqa/2)(\beta\varkappa_1^T-\lambda_0^T\lambda_1^R)\Delta^T/\beta^2\varkappa_1^T$
B_2^R	$\alpha T\mu\Delta^R/\lambda_2^R$	$\alpha T\mu\dfrac{\beta\varkappa_1^T(\lambda_1^R\lambda_2^T+\beta\varkappa_1^T)+\lambda_0^T\lambda_1^R(\lambda_0^R\lambda_2^T-\beta\varkappa_1^T)}{\beta^2\lambda_2^T(\varkappa_1^T)^2}\Delta^T$
B_2^T	$T\mu\dfrac{\lambda_1^T\lambda_2^R+\varkappa_1^R}{\varkappa_1^R\lambda_2^R}\Delta^R$	$T\mu\dfrac{\beta\varkappa_1^T-\lambda_0^T\lambda_1^R}{\beta\varkappa_1^T\lambda_2^T}\Delta^T$

где

$$R=\frac{\alpha\lambda_0^R-\lambda_0^T}{\alpha\lambda_0^R+\lambda_0^T};\qquad T=\frac{2\lambda_0^R}{\alpha\lambda_0^R+\lambda_0^T};\qquad \Delta^R=\left[\xi+\mu\frac{\lambda_0^R+\lambda_2^R}{\lambda_0^R\lambda_2^R}\right]^{-1};$$

$$\Delta^T=\left[\xi+\mu\frac{\lambda_0^T+\lambda_2^T}{\lambda_0^T\lambda_2^T}\right]^{-1};\qquad \lambda_n^{R,\,T}\ \text{см. (8)}$$

и определитель (11) приобретает порядок $\alpha\lambda_1{}^R+\lambda_1{}^T+O((qa)^2)\ll 1$, что приводит к увеличению амплитуд комбинационных спектров.

Формулы для амплитуд рассеянных волн $B_{0,1,2}^{R,T}$ в различных резонансных ситуациях приведены в таблице, где $\mu=(qa/2)^2$, $\varkappa_1{}^R=\pm 1-\sin\theta$ и $\varkappa_1{}^T=\pm\beta-\sin\theta$ — корни уравнений $\lambda_1{}^R(\varkappa,\theta)=0$ и $\lambda_1{}^T(\varkappa,\theta)=0$ соответственно

$$\xi=\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^2}(\alpha\lambda_1{}^R+\lambda_1{}^T). \tag{15}$$

При $\lambda_1{}^R\to 0$ $\xi=(\alpha+1)(\alpha-1)^{-2}(\beta^2-1)^{1/2}$, при $\lambda_1{}^T\to 0$ $\xi=\alpha(\alpha+1)\times\times(\alpha-1)^{-2}(1-\beta^2)^{1/2}$. Величину ξ будем в дальнейшем для удобства называть «импеданцем» (ср. с работой [9]). Заметим, что резонанс возникает, если $\xi\ll 1$. Это условие совпадает с критерием, найденным выше (см. формулу (2)) из физических соображений.

Специально отметим, что при достаточно малых углах скольжения становится существенным затухание звуковой волны, связанное с возбуждением вихревых и энтропийных волн (см. работу Б. П. Константинова [10], а также работу [11]). Последовательный учет вязкости и теплопроводности в задаче о дифракции на границе двух сред несложен, но приводит к громоздким вычислениям, которых мы здесь не воспроизводим. Однако окончательный результат чрезвычайно прост и сводится к перенормировке импеданца: в выражении (15) появляются дополнительные комплексные слагаемые, обусловленные поглощением Константинова:

$$\xi'=\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^2}[\alpha(\lambda_1{}^R+(1+i)\psi_k{}^R)+\lambda_1{}^T+(1+i)\psi_k{}^T], \tag{16}$$

где $\psi_k \sim (\omega\eta / \rho s^2)^{1/2} + (\omega\chi / s^2)^{1/2}$, χ — температуропроводность. При малых η и χ, чем мы и ограничиваемся, $\psi_k \ll 1$ и импеданц $\xi' \ll 1$ (в дальнейшем штрих при ξ опускаем). Для абсолютно жесткой границы ($\alpha = \rho_T / \rho_R = \infty$) соответствующие формулы были получены А. Я. Савельевым в работе [12].

Из приведенных в таблице формул видно, например, что при малых наклонах ($qa \ll \xi^{1/2}$) относительные амплитуды резонансных спектров $B_1^{R,T} \sim iqa / \xi$, т. е. в $1 / \xi$ раз больше, чем в отсутствие резонанса, а при больших наклонах ($qa \gg \xi^{1/2}$) $B_1^{R,T} \sim 1 / qa$.

Формулы таблицы несправедливы при нормальном и скользящем падении звуковой волны. При скользящем падении возможны затенения поверхности, которые нами не учитывались. Затенения отсутствуют, если $\psi \gg qa$, где $\psi = \pi / 2 - \theta$ — угол скольжения. При нормальном падении ($\theta = 0$) система уравнений (7) становится вырожденной и ее детерминант обращается в нуль. Ввиду того что при $\theta \to 0$ вынужденное рассеяние отсутствует, случай нормального падения мы не рассматриваем *. Область углов, в которой справедливы формулы таблицы, находим из условия (14):

$$\theta \gg \xi^2, \quad \psi \gg |\xi|, \; qa. \tag{17}$$

Вернемся к задаче о вынужденном рассеянии. Выделим из уравнения (3) фурье-компоненту на частоте поверхностных колебаний; после несложных преобразований получим

$$[\Omega^2(q) - \Omega_0^2(q)]a = \frac{q}{\rho_R + \rho_T} p_{q\Omega}, \tag{18}$$

где $\Omega_0(q) = (|\rho_R - \rho_T| gq + \sigma q^3)^{1/2} (\rho_R + \rho_T)^{-1/2}$ — невозмущенный закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн. Правая часть уравнения (18) представляет собой вынуждающую силу, которая раскачивает колебания поверхности. Согласно формулам (3) и (5), удерживая наибольшие члены, получим

$$\begin{gathered} p_{q\Omega} = \frac{1}{4}\{\rho_R \Box_R (\varphi^R)^2 - \rho_T \Box_T (\varphi^T)^2\}_{z=\zeta} = \frac{\rho_R}{2}|A|^2\{(\mathbf{k}\mathbf{k}_{-1}^{R*} - k^2) B_{-1}^{R*} + \\ + (\mathbf{k}\mathbf{k}_{-1}^{R} - k^2) B_1^R + \sum_{n=-2}^{1} [(\mathbf{k}_n^{R*}\mathbf{k}_{n+1}^R - k^2) B_n^{R*} B_{n+1}^R - \\ - \alpha(\mathbf{k}_n^{T*}\mathbf{k}_{n+1}^T - k^2) B_n^{T*} B_{n+1}^T]\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Используя выражения для рассеянных спектров (9), звуковое давление (19) можно представить в виде

$$p_{q\Omega} = -iqa\rho_R k^2 |A|^2 P, \tag{20}$$

где P — безразмерное звуковое давление. Подставляя это выражение в формулу (18), получим дисперсионное уравнение. Разрешая его относительно частоты при $|\Gamma \pm \gamma| \ll \Omega_0$ и вводя феноменологически слабое затухание $\gamma(q) = 2q^2(\eta_R + \eta_T)(\rho_R + \rho_T)^{-1}$, получим

$$\Omega(q) = \pm\Omega_0(q) - i\gamma(q) \mp i\Gamma. \tag{21}$$

Здесь величина

$$\Gamma = \operatorname{sign}(\alpha - 1) \frac{q^2 IP}{2\Omega_0(q) s_R (\rho_R + \rho_T)} \tag{22}$$

пропорциональна интенсивности падающей волны $I = \rho_R s_R k^2 |A|^2 / 2$. Если эта интенсивность достаточно велика, так что $|\Gamma| > \gamma$ и $\Omega'' = \mp\Gamma - \gamma > 0$ для одной из ветвей дисперсионного уравнения, возникает неустойчивость, которая приводит к нарастанию поверхностных колебаний и амплитуд

* Задача о дифракции звуковой волны на периодической поверхности при нормальном падении была рассмотрена Ю. П. Лысановым [6].

комбинационных спектров. Порог неустойчивости находится из условия $\Omega'' > 0$:

$$I_{\text{п}} = \frac{2\Omega_0(q)\, s_R(\eta_R + \eta_T)}{|\operatorname{Re} P|}. \tag{23}$$

Вдали от резонанса безразмерное звуковое давление $P \sim 1$ (см. формулу (27.1)). При резонансе, когда $\lambda_1^R = 0$ и звуковая волна падает из верхней среды (т. е. $\alpha > 1$, $|\beta - 1| \ll 1$ или $\alpha \gg 1$, $|\beta - 1| \sim 1$),

$$P = \frac{\alpha |\varkappa_1^R| [\xi + O(\mu^2)]}{(\alpha + 1)\, |\xi + \mu(1/\lambda_0^R + 1/\lambda_2^R)|^2} \tag{24}$$

и может стать существенно больше единицы (см. ниже). Как видно из формулы (22), при $\alpha > 1$ $\Gamma > 0$ и усилению волн будет соответствовать $\Omega = -\Omega_0 - i\gamma + i\Gamma$, $\Omega'' = \Gamma - \gamma$. Следовательно, спектры $B_n^{R,T}$ $(n > 0)$ будут стоксовыми $(\omega_n \approx \omega - n\Omega_0)$, а спектры $B_n^{R,T}$ $(n < 0)$ — антистоксовыми.

Если $\lambda_1^T = 0$ и волна падает из нижней среды ($\alpha < 1$, $|\beta - 1| \ll 1$ или $\alpha \ll 1$, $|\beta - 1| \sim 1$) выражение для P сложнее. За недостатком места мы приведем лишь его порядковую оценку:

$$P \sim \frac{\alpha}{\xi + \mu(1/\lambda_0^T + 1/\lambda_2^T)}. \tag{25}$$

Отметим специально, что $\operatorname{Re} P$ является нечетной функцией q; это видно из (19), (20) и формул для полей. Поэтому рассмотрение резонанса в спектрах $B_{-1}^{R,T}$ не приводит к новым результатам, а соответствует той же картине вынужденного рассеяния, так как при этом усилению ($\Omega'' > 0$) отвечает другая система знаков в уравнении (21).

Как видно из формул (19), (20), при нормальном падении $\operatorname{Re} P = 0$ (независимо от конкретного вида амплитуд B_n) и вынужденное рассеяние отсутствует.

Таким образом, значительное уменьшение порога вынужденного рассеяния в резонансе происходит при возникновении одного скользящего спектра ($\lambda_1^R = 0$ или $\lambda_1^T = 0$), если скорости звука в средах близки или плотности сред существенно отличаются и звук падает из верхней среды. При падении звука из нижей среды порог, вообще говоря, в α раз выше, чем при падении из верхней среды.

Исследуем безразмерное давление (24) в предельных случаях.

1. Наклоны поверхности малы по сравнению с импеданцем ($\mu \equiv (qa/2)^2 \ll \xi \cos\theta$). В этом случае Γ и инкремент Ω'' не зависят от амплитуды поверхностных колебаний a. Звуковое давление $\operatorname{Re} P \sim \xi^{-1}$ и максимально (порог минимален) при $|\beta - 1| \ll 1$ и $\alpha \gg 1$. Из формул (23), (24) и (16) получаем для порога выражение

$$I_{\text{п}} = 2(\eta_R + \eta_T)(\rho_R/\rho_T)\, |\beta^2 - 1|^{1/2} \omega q_1^{-1} \Omega_0(q), \tag{26}$$

где $q_1 = k|\varkappa_1^R| = k(1 \pm \sin\theta)$. Как функция угла падения порог (26) минимален при $\theta = \theta_0 = \arcsin|1 - q_\sigma/k|$, где $q_\sigma = (\rho_T g/\sigma)^{1/2}$ — капиллярная постоянная.

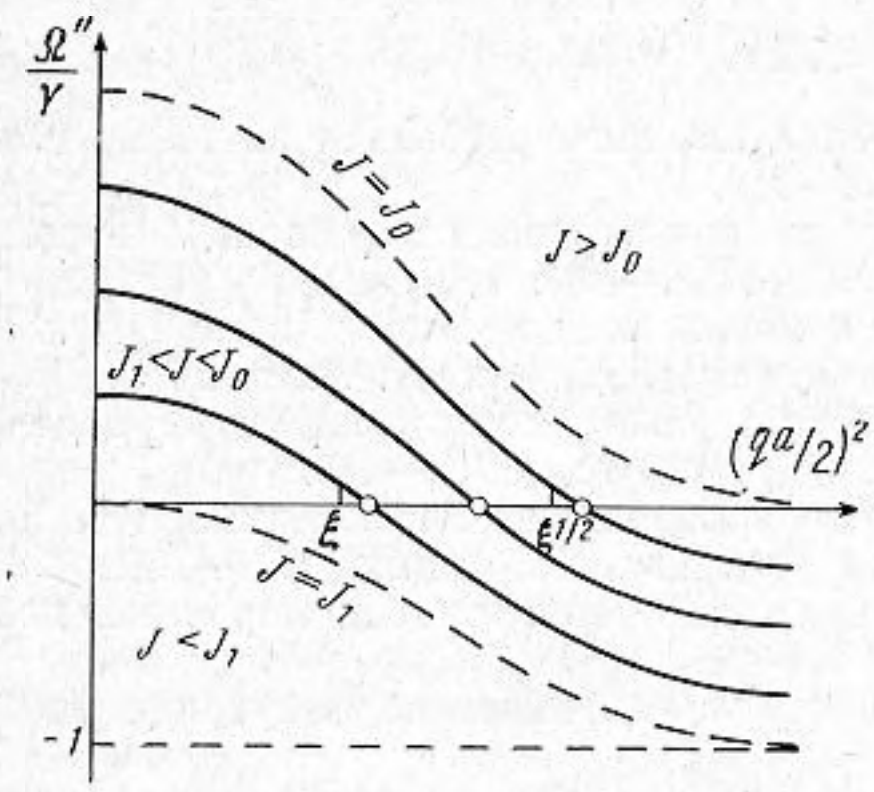
2. При «больших» наклонах ($1 \gg \mu^2 \gg \xi\cos\theta$) $\operatorname{Re} P \sim 1$, и уменьшения порога по сравнению с нерезонансным случаем не происходит. Инкремент, как и в случае 1, не зависит от возвышения a.

3. При средних наклонах ($\mu > \xi\cos\theta > \mu^2$) инкремент Ω'' существенно зависит от амплитуды колебаний поверхности. Как видно из формул (21), (23), $\Omega''(I, a)$ является убывающей функцией a: $\Omega'' \sim cI(\xi + \mu^2) \times (\xi + \mu)^{-2} - \gamma$ (см. фиг. 1). Это приводит к тому, что порог зависит от начальной амплитуды колебаний поверхности $a_0 \equiv a(t = 0)$. Согласно формулам (23), (24), $I_{\text{п}} \sim \eta s \Omega_0(q) \xi^{-1} (qa_0)^4$ (при $\mu \gg \xi \gg \mu^2$) и, как и при

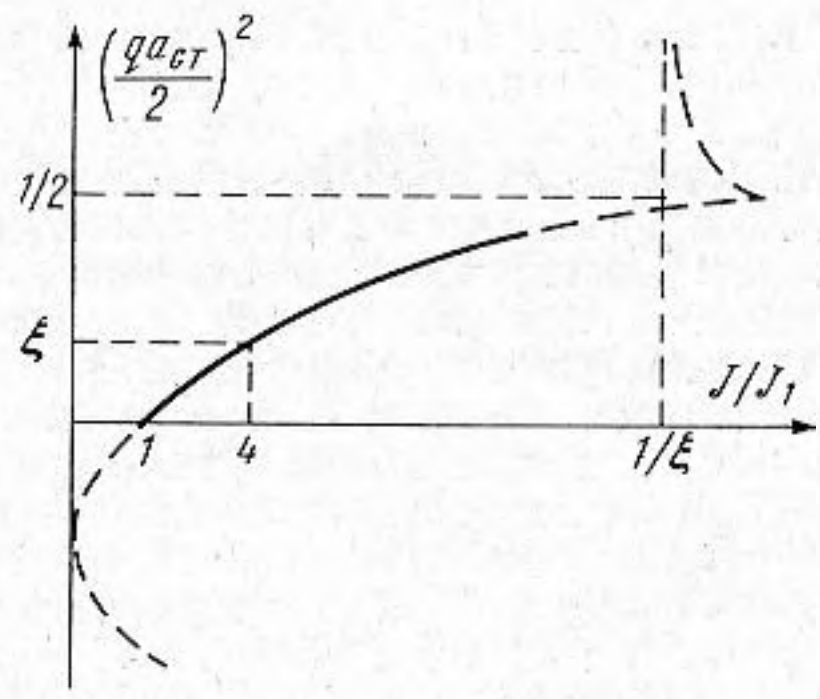
малых наклонах, существенно меньше, чем в отсутствие резонанса. Уменьшение инкремента по мере развития неустойчивости приводит к тому, что рост амплитуды поверхностных колебаний и рассеянных волн будет замедляться и в принципе возможно установление стационарного режима вынужденного рассеяния. Амплитуда стационарных колебаний $a_{ст}$ находится из уравнения $\Omega''(I, a_{ст}) = 0$; опуская угловые множители, получаем

$$\left(\frac{qa_{ст}}{2}\right)^2 \approx \xi \frac{[(I/I_1)(1+\xi-I/I_0)]^{1/2}-1}{1-I/I_0}, \tag{27}$$

где I_1 — порог (23) при малых наклонах (см. также формулу (26)), $I_0 = I_1/\xi$ — порог в отсутствие резонанса (или при больших наклонах). Фор-



Фиг. 1*



Фиг. 2*

мула (27) справедлива, если $I_1 < I < I_0$. Действительно, при $I < I_1$ вынужденное рассеяние отсутствует, при $I > I_0$ инкремент $\Omega'' > 0$ и для «больших» наклонов (см. п. 2), при которых стационарный режим отсутствует. На фиг. 2 показана зависимость квадрата наклона в стационарном режиме от интенсивности падающей волны. Сплошной линии графика соответствуют наклоны, при которых справедлива рассматриваемая теория. Время установления стационарного режима $\tau_{ст}$ можно оценить из условия $a_{ст} = a_0 \exp \Omega'' \tau_{ст}$:

$$\tau_{ст} \sim \frac{\ln \xi (qa_0)^{-2}}{\gamma (I/I_1 - 1)} \sim 10/\gamma (I/I_1 - 1). \tag{28}$$

Времени $\tau_{ст}$ соответствует «длина установления» $L_{ст} \sim \tau_{ст}\Omega_0 / q$. Амплитуды комбинационных спектров в стационарном режиме получаются из формул таблицы с использованием формулы (27). Например, при $\lambda_1^R = 0$ $B_1^R = \alpha B_1^T \sim \xi^{-1/4} (I_0 / I)^{1/4}$, если $I_1 \ll I \ll I_0$.

В заключение приведем численную оценку порога вынужденного рассеяния для того случая, когда звуковая волна падает из воды на ее границу со ртутью. Скорости звука в этих средах при $T_0 \approx 15°$ С совпадают. Производные $(\partial s / \partial T)_{T=T_0}$ для воды ≈ 200 *см·сек*$^{-1}$·*град*$^{-1}$, для ртути ≈ -50 *см·сек*$^{-1}$·*град*$^{-1}$. Принимая точность поддержания температуры $\sim 0{,}1°$ С, находим, что $|\beta - 1| \sim 10^{-4}$, поэтому $\lambda_1^T \sim 10^{-2}$, константиновские углы (см. формулу (16)) $\psi_k \sim 10^{-3}$ и импеданц $\xi \sim 10^{-3}$. Для границы рассматриваемых сред $q_\sigma \approx 5$ *см*$^{-1}$, $\gamma \sim 10^{-1}$ *сек*$^{-1}$. Для малых начальных наклонов ($(qa_0)^2 \ll \xi \cos\theta$), согласно формуле (26), порог $I_1 \sim 10^{-4}$ *вт/см*^{2} при угле падения $\theta \approx 30°$ и частоте $\omega \sim 10^6$ *сек*$^{-1}$. Если интенсивность падающей волны превышает пороговую в 10^2 раз, то за время $\tau_{ст} \sim 1$ *сек* ($L_{ст} \sim 10$ *см*) наклоны достигают стационарного значения $qa_{ст} \sim 10^{-1}$. Заметим, что мы не учитывали процессы нелинейного взаимодействия между поверхностными колебаниями, которые имеют характерное время $\tau_{нл} \sim$

* На фиг. 1 и 2 следует читать I, I_0, I_1.

$\sim (qa)^{-2}$. Это пренебрежение допустимо, если $\tau_{нл}^{-1}$ значительно меньше безразмерного инкремента (см. работу [13]).

Отметим также, что для наблюдения вынужденного рассеяния при малой длительности импульса или малой апертуре звукового пучка нужно обеспечить большое усиление, и, следовательно, необходима интенсивность, превышающая пороговую (23).

Авторы благодарны В. М. Конторовичу за постоянное внимание и помощь в работе, М. А. Исаковичу и И. А. Урусовскому, обратившим внимание авторов на необходимость учета эффекта Константинова в рассмотренной задаче, а также А. Я. Савельеву за ознакомление с результатами работы [12] до ее опубликования.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Гавриков, Н. В. Лукашова. Вынужденное рассеяние звука на поверхности жидкости. Акуст. ж., 1973, **19**, 4, 512—518.
2. И. А. Урусовский. Дифракция звука на периодически неровной и неоднородной поверхности. Докл. АН СССР, 1960, **131**, 4, 801—804.
3. И. А. Урусовский. Дифракция синусоидальных волн на неровной и неоднородной периодической поверхности (канд. дис.). М., Акуст. ин-т, 1963.
4. Е. С. Машашвили, И. А. Урусовский. Дифракция волн на периодически неровной границе раздела сред. Акуст. ж., 1969, **15**, 1, 98—107.
5. Е. С. Машашвили, И. А. Урусовский. Дифракция плоской волны на периодически неровной границе раздела сред. Акуст. ж., 1969, **15**, 2, 253—260.
6. Ю. П. Лысанов. Теория рассеяния волн на периодически неровных поверхностях (обзор). Акуст. ж., 1958, **4**, 1, 3—12.
7. Ю. П. Лысанов. К вопросу о поверхностном резонансе на синусоидальной поверхности. Акуст. ж., 1960, **6**, 1, 77—80.
8. Ю. П. Лысанов. О резонансных явлениях при рассеянии волн на неровной границе раздела сред со слабым перепадом скорости звука. Акуст. ж., 1968, **14**, 3, 413—415.
9. А. В. Кац, В. В. Маслов. Вынужденное рассеяние электромагнитных волн на поверхности хорошо проводящей жидкости. ЖЭТФ, 1972, **62**, 2, 496—504.
10. Б. П. Константинов. О поглощении звуковых волн при отражении от твердой границы. ЖТФ, 1939, **9**, 3, 226—238.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
12. А. Я. Савельев. Влияние эффекта Константинова на дифракцию и отражение звуковых волн (дипломная работа). М., Акуст., ин-т АН СССР, 1970; Эффект Константинова в некоторых задачах акустики. Акуст. ж. 1973, **19**, 2, 231—239.
13. В. К. Гавриков, А. В. Кац, В. М. Конторович. Вынужденное рассеяние света на поверхностных волнах. ЖЭТФ, 1970, **58**, 4, 1318—1331.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР
Харьковский государственный
научно-исследовательский институт метрологии

Поступила
17 марта 1972 г.