АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

УДК 534.26

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И НАПРАВЛЕННОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В МЯГКОМ ЭКРАНЕ

Д. Б. Дианов, И. М. Задириенко, А. Г. Кузьменко

Решена задача об излучении частично экранированным цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем с учетом влияния нагрузки на форму его колебаний. Приведены результаты расчета звукового давления и колебательной скорости у поверхности преобразователя, частотных характеристик звукового давления и характеристик направленности при различных углах экранирования и различных толщинах стенки цилиндра.

Цилиндрические пьезокерамические преобразователи, совершающие радиально-симметричные колебания, обладают, как известно, широкой полосой пропускания при излучении в жидкие среды [1]. Для формирования направленности, необходимой в ряде случаев, часть излучающей поверхности цилиндра обычно закрывается звукоотражающим материалом, который, например, может обладать малым входным импеданцем (мягкий экран). Наличие экрана может оказать существенное влияние не только на направленность преобразователя, но и на форму его колебаний, частотные характеристики и т. д. В связи с этим представляет определенный интерес исследовать влияние углового размера экрана на основные характеристики преобразователя в режиме излучения.

Рассмотрим пьезокерамический цилиндрический преобразователь, имеющий внутренний радиус $r = a$, наружный — $r = b$, часть поверхности которого с угловыми координатами $|\alpha| < \alpha_0$ соприкасается с бесконечно тонким абсолютно мягким экраном, в то время как оставшаяся часть поверхности цилиндра $\alpha_0 < |\alpha| < \pi$ нагружена на жидкую среду. Цилиндр мы считаем бесконечно длинным и поляризованным в радиальном направлении. Возбуждающее электрическое поле полагаем не зависящим от угла α.

Потенциал φ и смещение u' в жидкой среде могут быть представлены в виде *

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k_0 r) \cos n\alpha \tag{1}$$

$$u' = \operatorname{grad} \varphi,$$

где $k_0 = \omega / c_0$ — волновое число в жидкости.

Для определения колебательного поля в пьезокерамическом цилиндре воспользуемся уравнениями движения единицы объема твердой среды:

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha r}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{2\sigma_{\alpha r}}{r}, \end{gathered} \tag{2}$$

* Временная зависимость предполагается в виде $\exp(-i\omega t)$.

где ρ — плотность пьезокерамики, u_r, u_α — радиальная и азимутальная компоненты смещения, σ_{rr}, $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha r}$ — компоненты напряжений.

Пренебрегая анизотропией пьезокерамики и прямым пьезоэффектом, компоненты напряжения можно представить в виде

$$\sigma_{rr} = (c_l^2 - 2c_t^2)\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{r}\right) + c_l^2\rho\frac{\partial u_r}{\partial r} - e_{33}E_r,$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (c_l^2 - 2c_t^2)\rho\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_l^2\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{\partial \alpha}\right) - e_{31}E_r,$$

$$\sigma_{\alpha r} = c_t^2\rho\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha}\right). \qquad (3)$$

Здесь c_l, c_t — скорости распространения продольных и поперечных волн, e_{31}, e_{33} — пьезоэлектрические постоянные, E_r — радиальная компонента напряженности электрического поля.

Решение уравнений (2) представим в виде

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \qquad u_\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (4)$$

где

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(r)\cos n\alpha, \qquad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(r)\sin n\alpha. \qquad (5)$$

Подставляя выражения (3)—(5) в уравнения (2) и учитывая, что $\operatorname{div} D = 0$ (D — индукция), получим

$$\frac{d^3B_0}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2B_0}{dr^2} + \left(k_l^2 - \frac{1}{r^2}\right)\frac{dB_0}{dr} = -\frac{e_{31}}{\rho c_l^2}\frac{U}{r^2\ln(b/a)}, \qquad (6)$$

где $k_l = \omega / c_l$, U — электрическое напряжение на обкладках цилиндра. Для определения неизвестных коэффициентов B_n ($n \neq 0$), путем подстановки выражений (3)—(5) в уравнение (2), можно получить систему двух однородных уравнений 3-го порядка.

Однако эти коэффициенты могут быть найдены более простым способом. Учитывая однородность этих уравнений, можно утверждать, что

$$\varphi' = \varphi - B_0(r) \qquad (7)$$

и ψ будут удовлетворять однородным уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2\varphi' + k_l^2\varphi' = 0, \quad \nabla^2\psi + k_t^2\psi = 0, \qquad (8)$$

где $k_t = \omega / c_t$.

Интегрируя неоднородное уравнение (6), получим

$$\frac{dB_0}{dr} = [A + \varkappa U D_1(k_l r)]I_1(k_l r) + [B - \varkappa U D_2(k_l r)]N_1(k_l r), \qquad (9)$$

где A, B — постоянные интегрирования, $\varkappa = \dfrac{\pi e_{31}}{2\rho c_l^2 \ln(b/a)}$,

$$D_1(k_l r) = \int_{k_l a}^{k_l r} \frac{N_1(x)}{x}dx, \qquad D_2(k_l r) = \int_{k_l a}^{k_l r} \frac{I_1(x)}{x}dx.$$

Из уравнений (8) следует

$$\varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n' I_n(k_l r) + B_n'' N_n(k_l r)] \cos n\alpha,$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n' I_n(k_t r) + C_n'' N_n(k_t r)] \sin n\alpha. \tag{10}$$

Коэффициенты A, B, A_n, B_n', B_n'', C_n', C_n'' подлежат определению из граничных условий.

Граничные условия для рассматриваемой задачи следующие:

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \sigma_{\alpha r}|_{r=a} = \sigma_{\alpha r}|_{r=b} = 0,$$
$$\sigma_{rr}|_{r=b} = -p|_{r=b} \text{ при } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant \pi, \tag{11}$$

где p — звуковое давление в жидкости, *

$$p|_{r=b} = 0 \text{ при } |\alpha| \leqslant \alpha_0 \text{ и}$$
$$u_r|_{r=b} = u_r'|_{r=b} \text{ при } \alpha_0 < |\alpha| \leqslant \pi. \tag{11a}$$

Граничные условия (11) позволяют выразить совокупность коэффициентов A, B, B_n', B_n'', C_n', C_n'' через совокупность коэффициентов A_n разложения потенциала смещения в жидкости (1) в виде

$$A = (\beta_1 + \beta_2 A_0') U, \quad B = (\beta_3 + \beta_4 A_0') U,$$
$$\beta_1 = \frac{1}{\Delta} [\Phi_3(k_l a) \Phi_2(k_l b) - \Phi_2(k_l a) \Phi_3(k_l b)],$$
$$\beta_2 = \frac{1}{\Delta} \rho_0 c_0^2 (k_0 b)^2 H_0^{(1)}(k_0 b) \Phi_2(k_l a), \tag{12}$$
$$\beta_3 = \frac{1}{\Delta} [\Phi_1(k_l a) \Phi_3(k_l b) - \Phi_1(k_l b) \Phi_3(k_l a)],$$
$$\beta_4 = \frac{1}{\Delta} \rho_0 c_0^2 (k_0 b)^2 H_0^{(1)}(k_0 b) \Phi_1(k_l a),$$

где ρ_0 — плотность жидкости,

$$\Delta = \Phi_1(k_l a) \Phi_2(k_l b) - \Phi_2(k_l a) \Phi_1(k_l b),$$
$$\Phi_1(x) = c_l^2 \rho x I_0(x) - 2c_t^2 \rho I_1(x), \quad \Phi_2(x) = c_l^2 \rho x N_0(x) - 2c_t^2 \rho N_1(x),$$
$$\Phi_3(x) = e_{33} / \ln \frac{b}{a} - \varkappa [D_1(x) \Phi_1(x) - D_2(x) \Phi_2(x)];$$
$$B_n' = L^{(n)} \frac{\Delta_{21}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} A_n' = \beta_5^{(n)} A_n', \tag{13}$$
$$B_n'' = L^{(n)} \frac{\Delta_{22}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} A_n' = \beta_6^{(n)} A_n', \tag{14}$$
$$C_n' = L^{(n)} \frac{\Delta_{23}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} A_n' = \beta_7^{(n)} A_n', \tag{15}$$
$$C_n'' = L^{(n)} \frac{\Delta_{24}^{(n)}}{\Delta^{(n)}} A_n' = \beta_8^{(n)} A_n', \tag{16}$$

* Экран со стороны жидкости предполагается также абсолютно мягким.

где $L^{(n)} = \rho_0 c_0^2 (k_0 b)^2 H_n^{(1)} (k_0 b)$, $A_n' = A_n / (bU)$, $\Delta_{ik}^{(n)}$ — алгебраические дополнения определителя

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} R_1^{(n)}(k_l a) & R_2^{(n)}(k_l a) & R_3^{(n)}(k_l a) & R_4^{(n)}(k_l a) \\ R_1^{(n)}(k_l b) & R_2^{(n)}(k_l b) & R_3^{(n)}(k_l b) & R_4^{(n)}(k_l b) \\ R_5^{(n)}(k_l a) & R_6^{(n)}(k_l a) & R_7^{(n)}(k_l a) & R_8^{(n)}(k_l a) \\ R_5^{(n)}(k_l b) & R_6^{(n)}(k_l b) & R_7^{(n)}(k_l b) & R_8^{(n)}(k_l b) \end{vmatrix}$$

$$R_1^{(n)}(x) = \rho(-c_l^2 x^2 + 2c_t^2 n^2) I_n(x) - 2\rho c_t^2 x I_n'(x),$$

$$R_2^{(n)}(x) = \rho(-c_l^2 x^2 + 2c_t^2 n^2) N_n(x) - 2\rho c_t^2 x N_n'(x),$$

$$R_3^{(n)}(x) = 2\rho c_t^2 n [x I_n'(x) - I_n(x)],$$

$$R_4^{(n)}(x) = 2\rho c_t^2 n [x N_n'(x) - N_n(x)],$$

$$R_5^{(n)}(x) = -\frac{R_3^{(n)}(x)}{\rho c_t^2}, \quad R_6^{(n)}(x) = -\frac{R_4^{(n)}(x)}{\rho c_t^2},$$

$$R_7^{(n)}(x) = (x^2 - 2n^2) I_n(x) + 2x I_n'(x),$$

$$R_8^{(n)}(x) = (x^2 - 2n^2) N_n(x) + 2x N_n'(x),$$

причем

$$I_n'(x) = \frac{dI_n(x)}{dx}, \quad N_n'(x) = \frac{dN_n(x)}{dx}.$$

Радиальная составляющая смещения в пьезокерамическом цилиндре на основании формул (12) — (16) может быть представлена в виде

$$u_r(r) = U\left[A_0' M_0(r) + M_1(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n' T_n(r) \cos n\alpha\right], \tag{17}$$

где

$$M_0(r) = \beta_2 I_1(k_l r) + \beta_4 N_1(k_l r),$$

$$M_1(r) = \beta_1 I_1(k_l r) + \beta_3 N_1(k_l r) + \varkappa [D_1(k_l r) I_1(k_l r) - D_2(k_l r) N_1(k_l r)],$$

$$T_n(r) = (k_l b)[\beta_5^{(n)} I_n'(k_l r) + \beta_6^{(n)} N_n'(k_l r)] + b/r \cdot n[\beta_7^{(n)} I_n(k_l r) + \beta_8^{(n)} N_n(k_l r)].$$

Коэффициенты A_n' определяются с использованием оставшегося смешанного граничного условия (11а). Метод определения звукового поля при смешанных граничных условиях, заданных на цилиндрической поверхности $r = b$, предложен в работе [2]. Этот метод основан на аппроксимации потенциала звукового поля, задаваемого выражением (1), полиномом

$$\varphi^{(m)} = \sum_{n=0}^{m} A_n H_n^{(1)}(k_0 r) \cos n\alpha, \tag{18}$$

коэффициенты которого определяются из условия минимизации квадратичного функционала [2].

Применяя такой метод для найденного распределения смещения u_r (формула (17)), мы приходим к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n':

$$\left[k_0 b C_{0\nu}^{(0)} - H_\nu'(k_0 b) M_0(b) \int_{\alpha_0}^{\pi} \cos \nu\alpha \, d\alpha\right] A_0' +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m} \left[k_0 b C_{n\nu}^{(0)} - \overline{H_\nu'(k_0 b)} T_n(b) \int_{\alpha_0}^{\pi} \cos n\alpha \cos \nu\alpha \, d\alpha\right] A_n' =$$

$$= \overline{H_\nu'(k_0 b)} M_1(b), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{19}$$

$$H_\nu(x) = I_\nu(x) + iN_\nu(x), \; \overline{H_\nu(x)} = I_\nu(x) - iN_\nu(x),$$

$$H_\nu'(x) = \frac{dH_\nu(x)}{dx}, \qquad C_{n\nu}^{(0)} = \frac{C_{n\nu}}{k_0^2},$$

$C_{n\nu}$ — коэффициенты, вычисленные в работе [2].

Решение системы уравнений (19) позволяет определить основные характеристики звукового поля как в жидкости, так и в пьезокерамическом цилиндре при любой толщине стенки последнего.

Для обычно применяемых пьезокерамических цилиндрических преобразователей относительная толщина стенки $\tau = (b - a) / a$ невелика и лежит в пределах 0,05—0,2. Это дает возможность упростить систему уравнений (19). Входящие в решение цилиндрические функции аргументов $k_l b$ и $k_t b$ представляются рядами по степеням малого параметра τ в окрестности $r = a$. Удерживая в этих разложениях число членов, необходимое для получения первого приближения функций $M_0(b)$, $M_1(b)$, $T_n(b)$, входящих в систему уравнений (19), приведем последние к виду

$$M_0(b) = \frac{\rho_0}{\rho} c_0^2 y^2 H_0(y) \frac{c_l^2 - c_{lt}\tau}{c_l^4 x^2 (\tau + \tau^2) - 4c_t^2 c_{lt}\tau},$$

$$M_1(b) = -\frac{\varkappa}{\pi}\tau^2 + \frac{e_{33} c_{lt}/\ln h - \varkappa\rho c_t^4}{\rho[c_t^4 x^2 (1 + \tau) - 4c_t^2 (c_{lt} + c_t^2)]}, \tag{20}$$

$$T_n(b) = \rho_0 c_0^2 y^2 H_n(y) \frac{1}{\Delta_1} \{c_l^2 x^2 q^2 (q^2 - 2n^2) -$$

$$- 2c_t^2 n^2 \cdot (q^4 - 2x^2 q^2) + [2c_t^2 q^4 (x^2 - n^2) - 2c_{lt} x^2 q^2 n^2]\tau\},$$

$$\Delta_1 = \{\rho c_t^4 x^2 [(q^2 - 2n^2)^2 - 4n^2] - 4\rho c_t^2 c_l^2 x^2 (q^2 + n^2 q^2) +$$

$$+ 4\rho c_t^2 c_l^2 x^2 n^2 (q^2 - 2n^2 + 2) + 4\rho c_t^4 x^2 (q^4 + 2n^4 q^2) +$$

$$+ 4\rho c_t^4 n^2 q^4 (1 - n^2) + 4\rho c_t^2 c_{lt} n^2 x^2 q^2\}\tau,$$

где

$$x = k_l a, \; y = k_0 b, \; q = k_t a, \; h = b / a, \; c_{lt} = c_l^2 - 2c_t^2.$$

Коэффициенты A_n', найденные из решения системы (19), позволяют определить:

а) звуковое давление в дальней зоне —

$$p(\alpha, r) = \rho_0 c_0^2 k_0^2 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} bU e^{i(k_0 r - \pi/4)} \sum_{n=0}^{m} A_n' e^{-in\pi/2} \cos n\alpha, \tag{21}$$

б) звуковое давление в жидкости у поверхности преобразователя ($r = b$) —

$$p(\alpha) = \rho_0 c_0^2 k_0^2 bU \sum_{n=0}^{m} A_n' H_n(k_0 b) \cos n\alpha; \tag{22}$$

в) радиальную составляющую колебательной скорости в жидкости у

поверхности преобразователя ($r = b$) —

$$v(\alpha) = c_0 k_0^2 b U e^{-i\pi/2} \sum_{n=0}^{m} A_n' H_n'(k_0 b) \cos n\alpha. \qquad (23)$$

По формулам (21) — (23) были проведены численные расчеты на ЭВМ Минск-22. Коэффициенты A_n' определялись из решения системы (19) с использованием формул (20). В качестве материала цилиндра предполагалась пьезокерамика ТБК-3, в качестве внешней среды — вода.

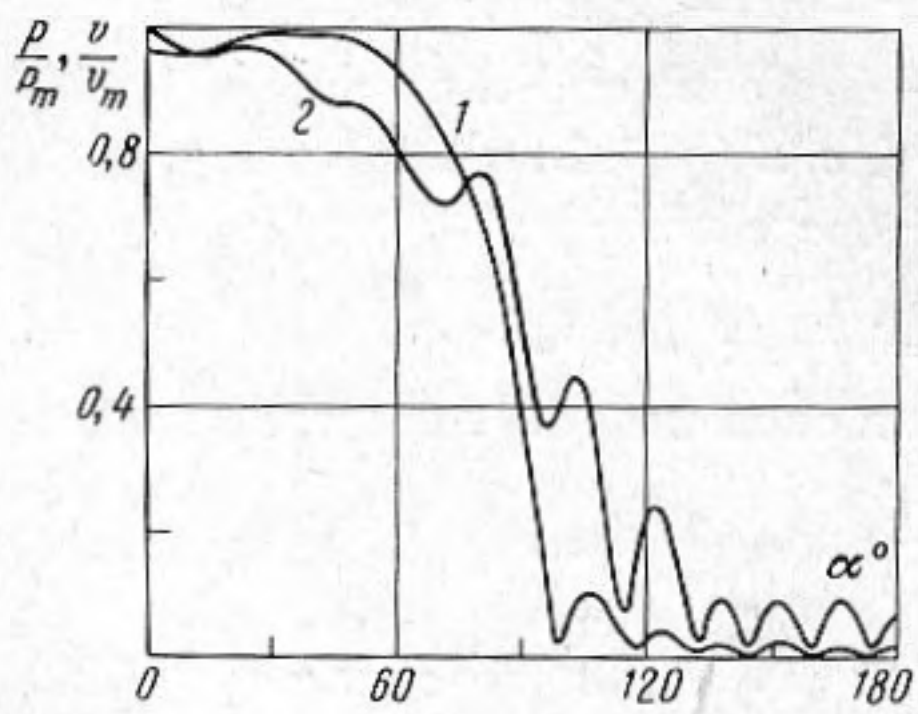
Расчеты, проведенные для различных значений m, показали, что, начиная уже с значения $m = 7$, как характеристики направленности, так и частотные характеристики звукового давления в дальней зоне на акустической оси практически совпадали, хотя для распределений звукового давления и колебательной скорости в жидкости вблизи цилиндра при $m = 7$ эти изменения были еще заметны. Приводимые далее графические зависимости были рассчитаны при $m = 12$.

На фиг. 1 в качестве примера представлены распределение звукового давления при $r = b$ (кривая *1*) и радиальной составляющей скорости в жидкости при $r = b$ (кривая *2*) для $\alpha_0 = 90°$ для пьезокерамического цилиндра с $h = 1{,}1$ на резонансной частоте. Видно, что в области, где расположен экран ($0 \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha_0$), звуковое давление составляет не больше 10% от максимального давления на излучающей части цилиндра, что можно считать достаточно хорошим приближением.

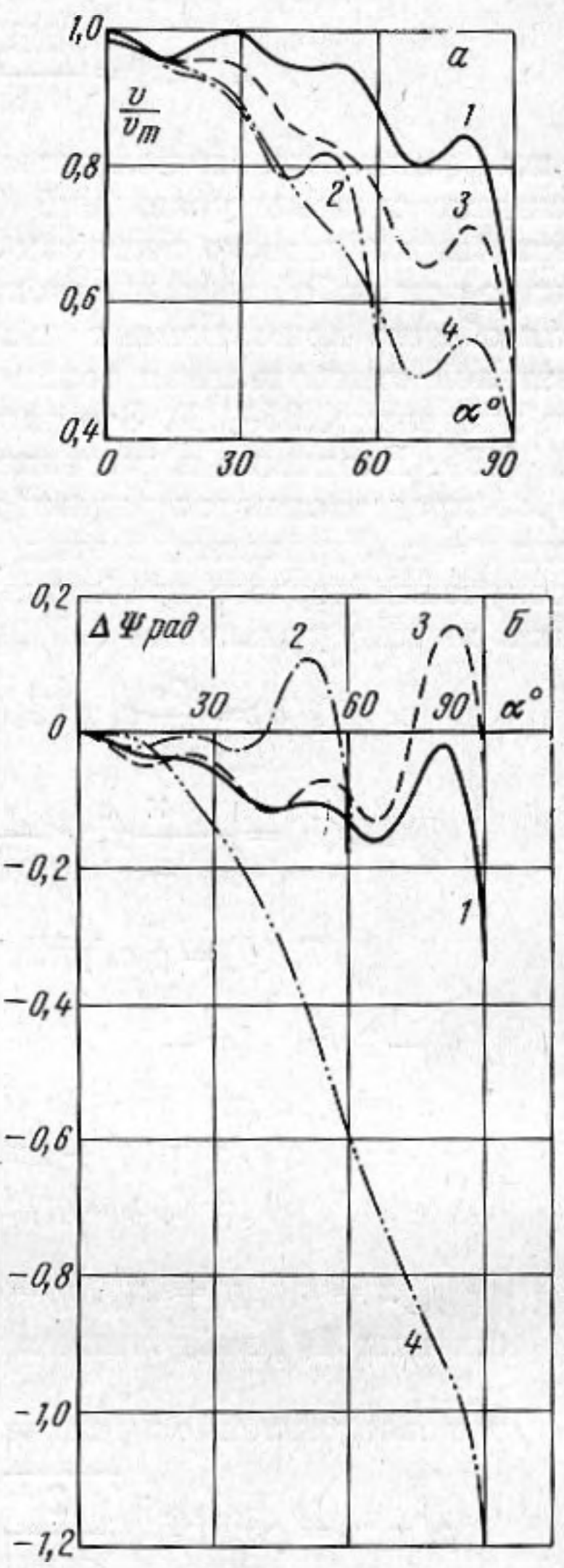
На фиг. 2 представлены зависимости амплитуды (*а*) и фазы (*б*) радиальной составляющей скорости при $r = b$ на излучающей части цилиндра для ряда углов экранирования и толщин стенок. Цифры на кривых соответствуют следующим значениям параметров:

1 — $h = 1{,}2$; $\alpha_0 = 90°$, $x = 0{,}83$; *2* — $h = 1{,}2$, $\alpha_0 = 120°$, $x = 0{,}83$;

3 — $h = 1{,}05$, $\alpha_0 = 90°$, $x = 0{,}78$; *4* — $h = 1{,}05$, $\alpha_0 = 90°$, $x = 1{,}2$.



Фиг. 1



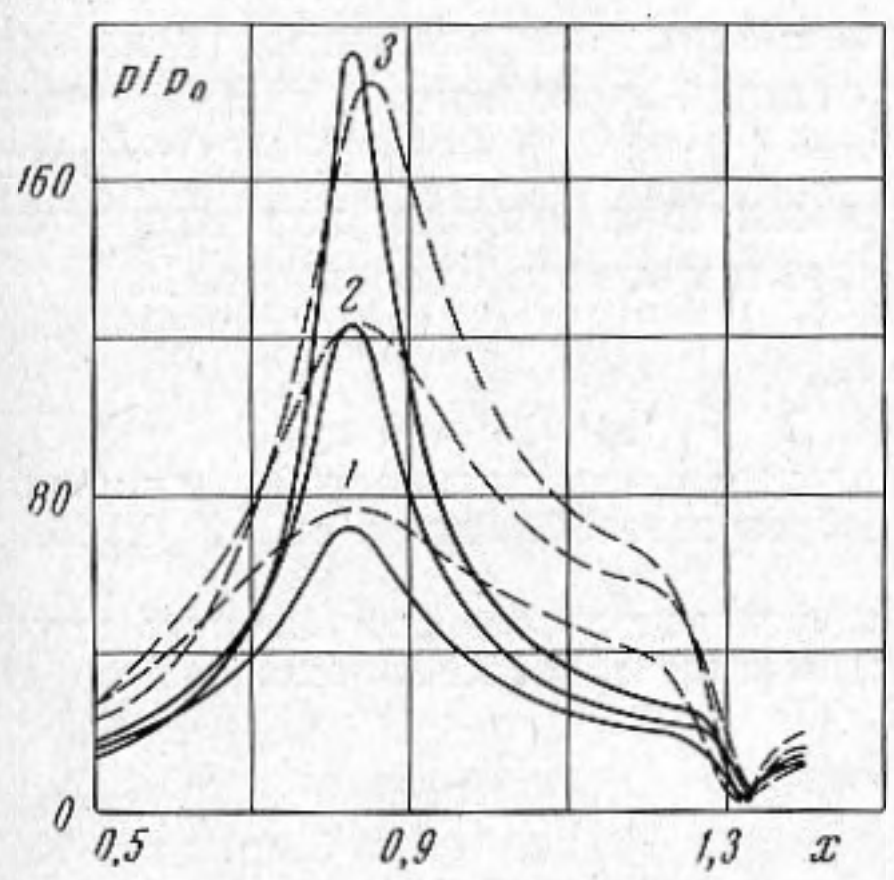
Фиг. 2

Выбранные значения x соответствуют резонансам частотных характеристик (см. фиг. 3, 4). Из фиг. 2 видно, что с уменьшением толщины стен-

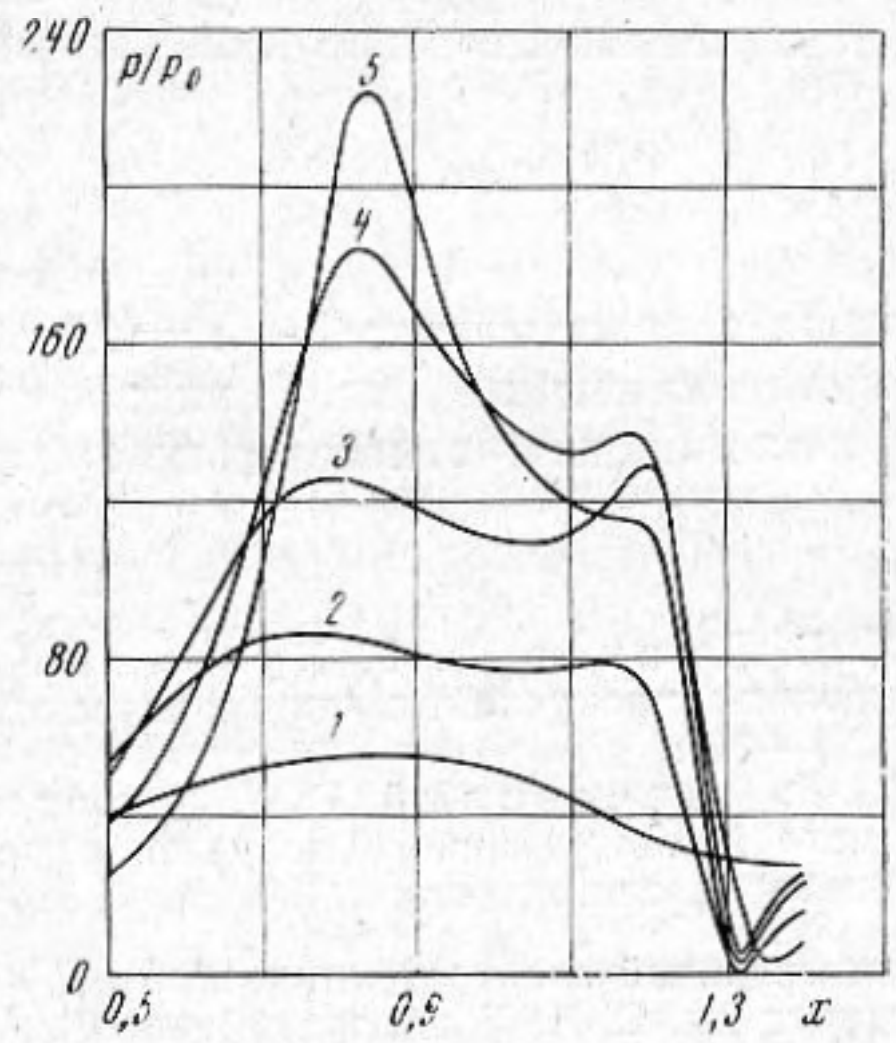
ки увеличивается спад амплитуды по мере приближения к краю экрана. Видно также, что изменение фазы скорости не превышает в большинстве случаев $\pm 10°$. В некоторых случаях (кривая *4* на фиг. 2, *б*) изменение фазы достигает существенной величины ($\sim 70°$).

Зависимости звукового давления на акустической оси в дальней зоне от частоты представлены на фиг. 3, 4. Номера кривых на фиг. 3 соответствуют следующим значениям углов экранирования: *1* — $\alpha_0 = 60°$; *2* — $\alpha_0 = 90°$; *3* — $\alpha_0 = 120°$. Сплошные линии относятся к цилиндру с $h = 1{,}2$; штриховые — $h = 1{,}1$. Нормировочное значение p_0 равно $Ue_{33}(\rho_0 c_0^2 / \rho c_l^2) \cdot \sqrt{2/\pi r a}$.

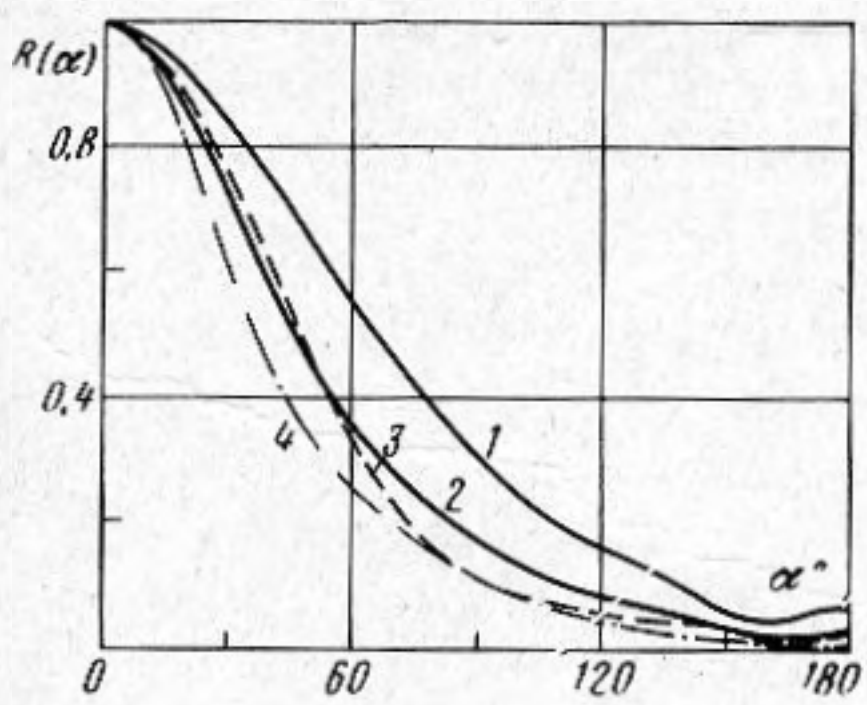
Из фиг. 3 видно, что с увеличением α_0 уменьшается полоса пропускания и возрастает величина звукового давления; резонансная частота несколько возрастает. Последнее обусловлено уменьшением соколеблющейся массы жидкости с ростом угла экранирования. Из фиг. 3 также видно, что с уменьшением толщины стенки намечается появление второго высокочастотного резонанса. Его появление при уменьшении h связано с возра-



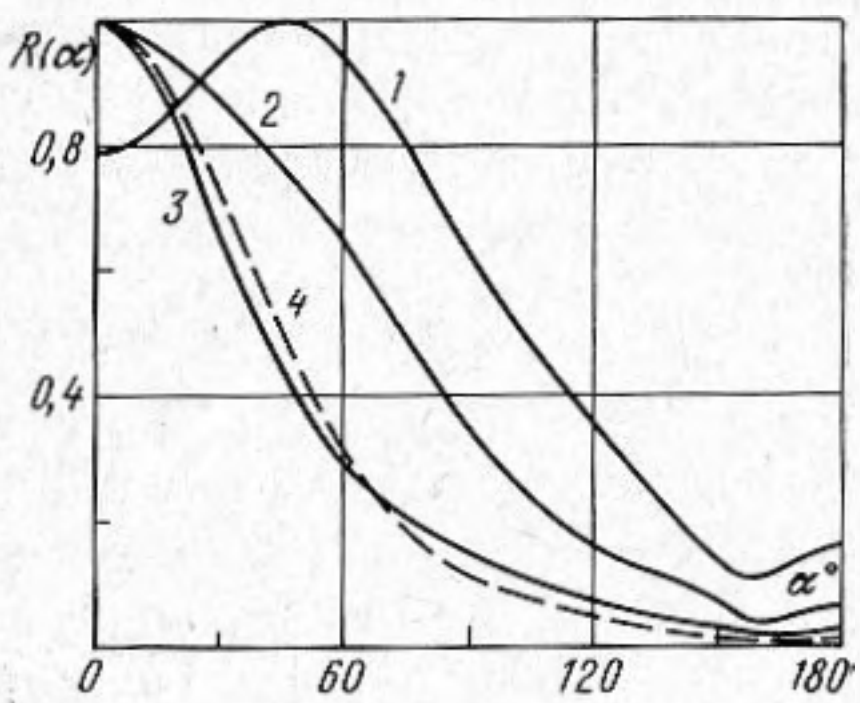
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



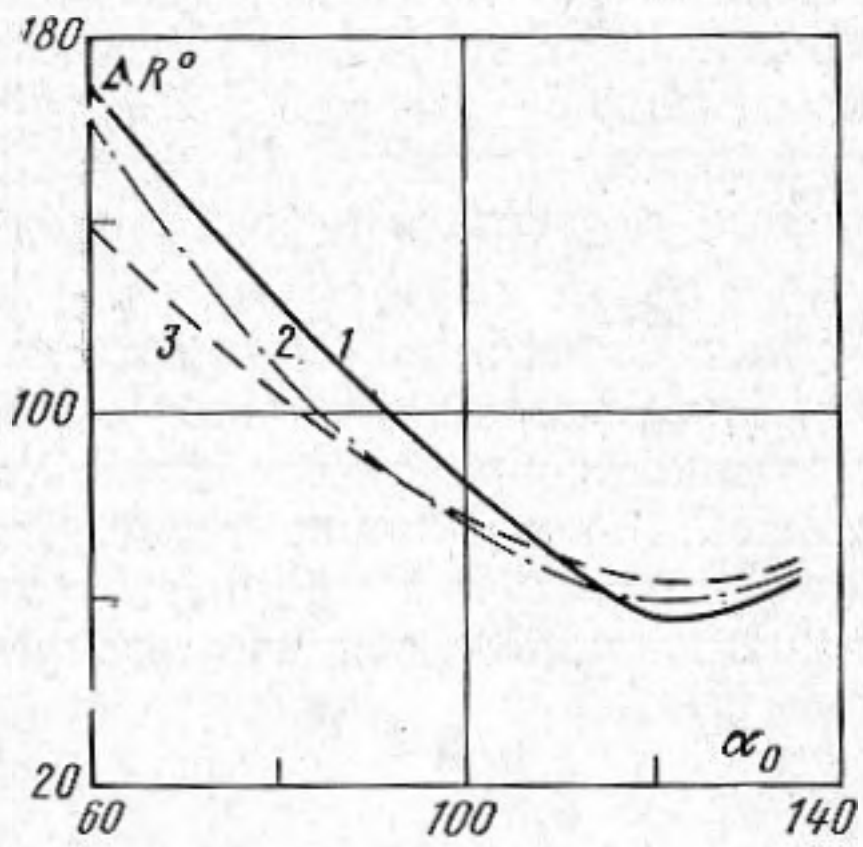
Фиг. 6

стающей ролью высших форм колебаний, особенно первой. Это хорошо видно из фиг. 4, где приведены частотные характеристики цилиндра с малой толщиной стенки ($h = 1{,}05$). Цифры на фиг. 4 соответствуют: *1* — $\alpha_0 = 15°$; *2* — $\alpha_0 = 60°$; *3* — $\alpha_0 = 90°$; *4* — $\alpha_0 = 120°$; *5* — $\alpha_0 = 135°$.

Наиболее сильно выраженным высокочастотный резонанс оказывается при величинах α_0, близких к 90°. Асимметрия нагрузки при этом оказывается наиболее благоприятной для возникновения первой радиальной

формы колебаний. Именно это обстоятельство объясняет ход кривой *4* на фиг. 2, *б*.

На фиг. 5, 6 приведены характеристики направленности на резонансных частотах при значении параметра $h = 1{,}2$ и $h = 1{,}05$ соответственно. Цифры на фигурах соответствуют: фиг. 5: *1* — $\alpha_0 = 60°$, *2* — $\alpha_0 = 90°$, *3* — $\alpha_0 = 120°$, *4* — $\alpha_0 = 135°$; фиг. 6: *1* — $\alpha_0 = 90°$, 2 — $\alpha_0 = 120°$ (низкочастотный резонанс), *3* — $\alpha_0 = 90°$, *4* — $\alpha_0 = 120°$ (высокочастотный резонанс). Анализ характеристик направленности показывает, что влияние толщины стенки мало сказывается на ширине характеристики направленности. Это видно из кривых фиг. 7, где приведены зависимости ширины характеристики направленности на резонансах от величины угла экранирования α_0 при различных значениях h (для цилиндра со значением $h = 1{,}05$ анализируются характеристики направленности на низкочастотном резонансе). Нумерация кривых соответствует: 1 — $h = 1{,}2$; *2* — $h = 1{,}1$; *3* — $h = 1{,}05$. Из кривых, представленных на фиг. 7, видно, что наименьшая ширина характеристик направленности достигается при углах экранирования, близких к 120°.



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Дианов, А. Г. Кузьменко. Исследование возможностей расширения полосы пропускания цилиндрических преобразователей. Акуст. ж., 1970, **16**, 2, 236—240.
2. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. Акуст. ж., 1964, **10**, 3, 313—317.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила 30 июня 1972 г.