АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

УДК 534.232

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Ю. Ю. Добровольский

Определяется поле осесимметричного сферического излучателя при смешанных граничных условиях. На одной части сферической поверхности, ограниченной меридианом, задается нормальная составляющая колебательной скорости, на другой — локальный импеданц, устанавливающий некоторую постоянную связь между звуковым давлением и колебательной скоростью в каждой точке этой части поверхности.

Ранее акустическое поле сферического излучателя исследовалось в предположении, что на активной части поверхности сферы известна нормальная составляющая колебательной скорости, а остальная, пассивная часть поверхности, является абсолютно жесткой [1]. В работе [2] дан метод определения поля при заданном давлении на части поверхности, позволивший подробно исследовать в работе [3] случай абсолютно мягкого пассивного участка поверхности. Рассмотрим промежуточный случай, когда пассивная часть сферической поверхности характеризуется конечным локальным импеданцем z, устанавливающим некоторую постоянную связь между звуковым давлением и нормальной составляющей колебательной скорости в каждой точке этой части поверхности.

Пусть (r, φ, θ) — сферические координаты и центр излучателя находится в начале координат. Ограничимся рассмотрением осесимметричного установившегося поля, излучаемого сферой с радиусом a, на части поверхности которой, ограниченной меридианом $\theta = \theta_0$ задана нормальная составляющая колебательной скорости $U = \text{const}$. Введем безразмерную проводимость поверхности $g = \rho c / z$, где ρc — волновое сопротивление внешней среды. Опуская временной множитель $\exp(-i\omega t)$, сведем задачу к решению уравнения Гельмгольца для звукового давления

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{1}$$

при следующих граничных условиях на поверхности сферы

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a} = ik\rho c U, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a} + ikgp = 0, \qquad \theta_0 < \theta \leqslant \pi, \tag{3}$$

и условии излучения на бесконечности

$$p|_{r\to\infty} \leqslant \text{const}\,\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Частный случай $g = 0$ соответствует однородной задаче с абсолютно жесткой пассивной поверхностью [1].

В соответствии с формулой Грина выражение для звукового давления во внешней точке (r, θ) осесимметричного сферического излучателя мо-

жет быть представлено в следующем виде:

$$p(r,\theta) = -i2\pi\rho cka^2U\int_0^{\theta_0} G(r,\theta,a,\theta')\sin\theta'\,d\theta' -$$

$$-i2\pi\rho cka^2\int_{\theta_0}^{\pi} u(\theta')G(r,\theta,a,\theta')\sin\theta'\,d\theta', \qquad (4)$$

где $u(\theta')$ — пока неизвестная нормальная составляющая колебательной скорости точек импеданцного участка поверхности, связанная со звуковым давлением известным соотношением линейной акустики

$$u(\theta') = (ik\rho c)^{-1}\partial p/\partial r|_{r=a}, \qquad (5)$$

$G(r, \theta, a, \theta')$ — функция Грина, удовлетворяющая граничным условиям задачи Неймана на поверхности сферы

$$\left.\frac{\partial G(r,\theta,a,\theta')}{\partial r}\right|_{\eta=a} = 0. \qquad (6)$$

Используя стандартную процедуру [1] построения внешней функции Грина, удовлетворяющей однородным граничным условиям, получим

$$G(r,\theta,a,\theta') = -\frac{1}{4\pi ka^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{h_n(kr)}{h_n'(ka)}P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta'), \qquad (7)$$

где $h_n(kr)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода n-го порядка, $P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра n-го порядка.

После подстановки выражения (7) в формулу (4) и замены неизвестной нормальной составляющей колебательной скорости на неизвестное звуковое давление на поверхности сферы в соответствии с формулами (3) и (5) получим

$$p(r,\theta) = p_1(r,\theta) -$$

$$-\frac{ig}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{h_n(kr)}{h_n'(ka)}P_n(\cos\theta)\int_{\theta_0}^{\pi} p(a,\theta')P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta', \qquad (8)$$

где $p_1(r, \theta)$ — звуковое давление, развиваемое во внешней точке (r, θ) пульсирующим сферическим сегментом $(0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0)$ при абсолютно жесткой остальной поверхности [1]

$$p_1(r,\theta) = \frac{igcU}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(kr)}{h_n'(ka)}P_n(\cos\theta)\left[P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)\right]. \qquad (9)$$

Таким образом, для нахождения поля излучения сферы со смешанными граничными условиями требуется определить звуковое давление на участке $(\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ ее поверхности. Для этого устремим внешнюю точку (r, θ) к поверхности $r = a$. При этом выражение (8) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестного $p(a, \theta)$, для решения которого мы используем процесс Галеркина.

Приближенное решение будем искать в виде линейной комбинации N функций из полной ортогональной системы

$$p(a,\theta) = \rho cU\sum_{m=0}^{N} A_m P_m(\cos\theta). \qquad (10)$$

Для определения коэффициентов A_m подставим разложение (10) в интегральное уравнение, умножим его левую и правую части на $P_n(\cos\theta)$ и выполним интегрирование в пределах $(0, \pi)$. Использовав свойства ортогональности полиномов Лежандра, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов A_m

$$A_m = \frac{i}{2}\frac{h_m(ka)}{h_m'(ka)}[P_{m-1}(\cos\theta_0) - P_{m+1}(\cos\theta_0)] -$$

$$- g\frac{i}{2}\frac{h_m(ka)}{h_m'(ka)}\sum_{n=0} A_n I(m,n), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

где $I(m,n) = (2n+1)\int\limits_{\theta_0}^{\pi} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$

Условие сходимости процесса Галеркина при решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода рассмотрено в работе [4]. Применительно к данной задаче это условие заключается в том, чтобы $|g| < \infty$. Таким образом, используемый метод решения поставленной задачи позволяется проводить исследование внешнего поля сферического излучателя со смешанными граничными условиями при изменении поверхностного импеданца в широком диапазоне значений.

Применяя представления (10) и (11), выражение (8) для определения звукового давления во внешней точке (r, θ) можно привести к следующему компактному виду:

$$p(r,\theta) = \rho c U \sum_{n=0}^{N} A_n \frac{h_n(kr)}{h_n(ka)} P_n(\cos\theta). \tag{12}$$

На основании выражения (12) получим формулы для определения характеристики направленности в дальнем поле, сопротивления излучения, коэффициента концентрации и радиальной составляющей колебательной скорости.

Согласно асимптотической формуле сферических функций Ганкеля при $kr \gg n$ $h_n(kr) = \frac{1}{kr} e^{i\left[kr - \frac{n+1}{2}\pi\right]}$, характеристика направленности сферического осесимметричного излучателя в дальнем поле будет

$$R(\theta) = \frac{\left|\sum\limits_{n=0}^{N} A_n e^{-i\frac{n\pi}{2}} (h_n(ka))^{-1} P_n(\cos\theta)\right|}{\max\limits_{\theta}\left|\sum\limits_{n=0}^{N} A_n e^{-i\frac{n\pi}{2}} (h_n(ka))^{-1} P_n(\cos\theta)\right|}. \tag{13}$$

Импеданц излучения, отнесенный к $\rho c S$, где $S = 2\pi(1-\cos\theta_0)a^2$ — площадь активного сегмента, выражается следующим образом:

$$Z_s = R_s - iX_s = \frac{1}{2\pi\rho c(1-\cos\theta_0)U}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\theta_0} p(a,\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{(1-\cos\theta_0)}\sum_{n=0}^{N} A_n \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)]. \tag{14}$$

В соответствии с определением коэффициент осевой концентрации будет

$$K = \frac{4\pi |R(0)|^2}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |R(\theta)|^2 \sin\theta d\theta} = \frac{2\left|\sum\limits_{n=0}^{N} A_n \frac{e^{-i\frac{n\pi}{2}}}{h_n(ka)}\right|^2}{\sum\limits_{n=0}^{N} |A_n|^2 \frac{2}{2n+1} \frac{1}{|h_n(ka)|^2}}, \tag{15}$$

и радиальная составляющая колебательной скорости

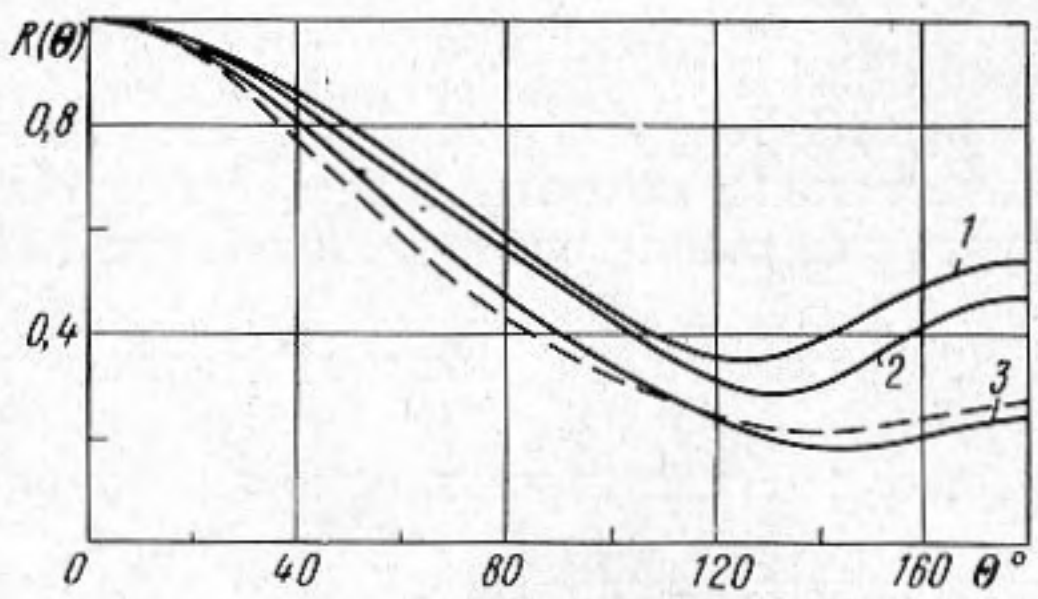
$$u = -\frac{i}{k\rho c}\frac{\partial p}{\partial r} = -iU \sum_{n=0}^{N} A_n \frac{h_n'(ka)}{h_n(ka)} P_n(\cos\theta). \tag{16}$$

Среднеквадратичные ошибки удовлетворения граничным условиям на активной и пассивной частях поверхности сферы определяются формулами

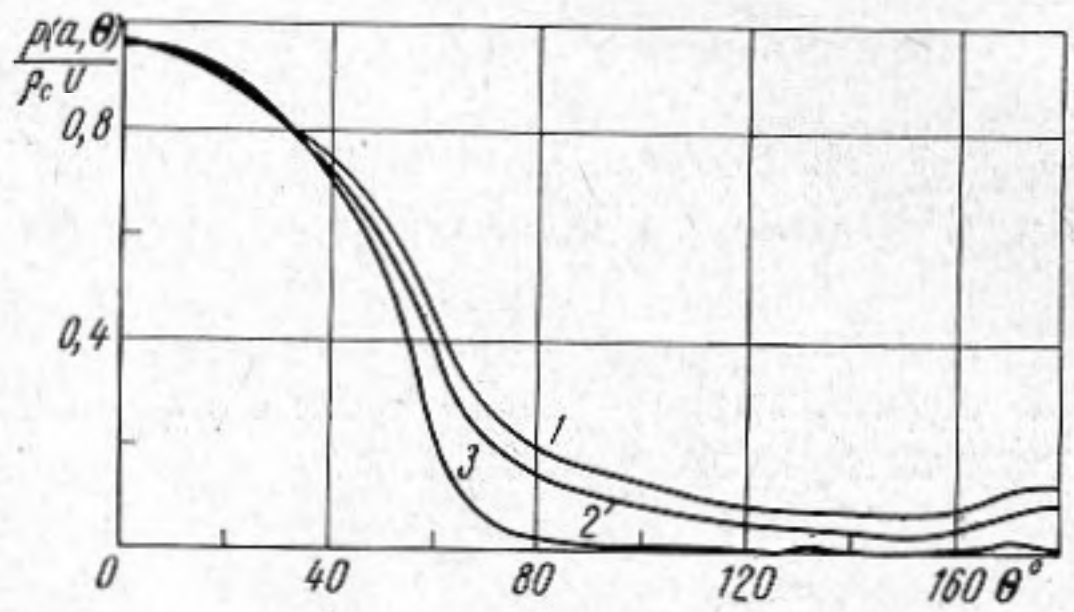
$$\delta_1 = \int\limits_0^{\theta_0} \left|1 + i\sum_{n=0}^{N} A_n \frac{h_n'(ka)}{h_n(ka)} P_n(\cos\theta)\right|^2 \sin\theta\, d\theta,$$

$$\delta_2 = \int\limits_{\theta_0}^{\pi} \left| g - \frac{i\sum\limits_{n=0}^{N} A_n \frac{h_n'(ka)}{h_n(ka)} P_n(\cos\theta)}{\sum\limits_{n=0}^{N} A_n P_n(\cos\theta)} \right|^2 \sin\theta\, d\theta. \tag{17}$$

На фиг. 1 и 2 показаны соответственно диаграммы направленности и значения амплитуд звукового давления на поверхности $r = a$, отнесенные к $\rho c u$, сферического излучателя при $ka = \pi/2$ и $\theta_0 = 60°$. Обозначения *1*, *2* и *3* последовательно соответствуют значениям проводимости g пассивной части поверхности 0; 1 и 10. При вычислениях принималось $N = 40$. При этом величина среднеквадратичной ошибки $\delta_{1,2}$ не превышала соответственно 0,004; 0,006 и 0,04. Для сравнения на фиг. 1 штриховой линией показана диаграмма направленности такого же сферического излучателя, вычисленная методом наименьших квадратов, при абсолютно мягкой пассивной части поверхности [3]. Как видно с увеличением проводимости g уменьшается уровень тыльного излучения и амплитуда звукового давления на поверхности $r = a$ в секторе $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Анализ полученных результатов вычислений показывает, что при проводимости $g \geqslant 10$ ($z \leqslant 0{,}1\ \rho c$) направленности сферических излучателей с импеданцной и абсолютно мягкой пассивными частями поверхности отличаются незначительно.



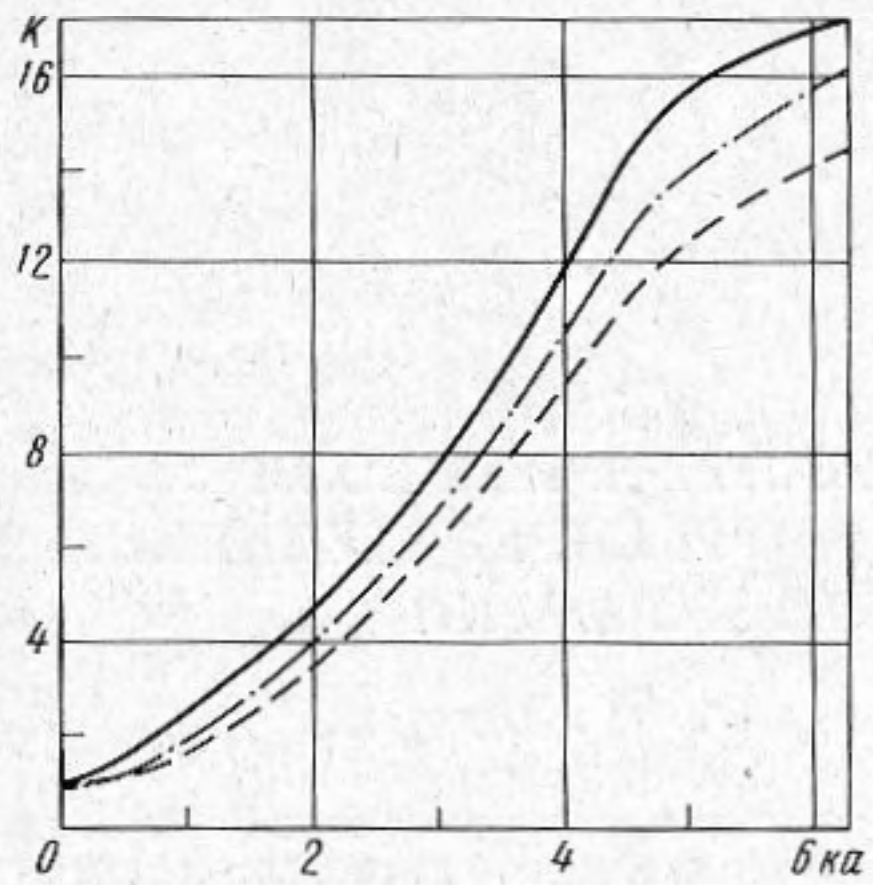
Фиг. 1



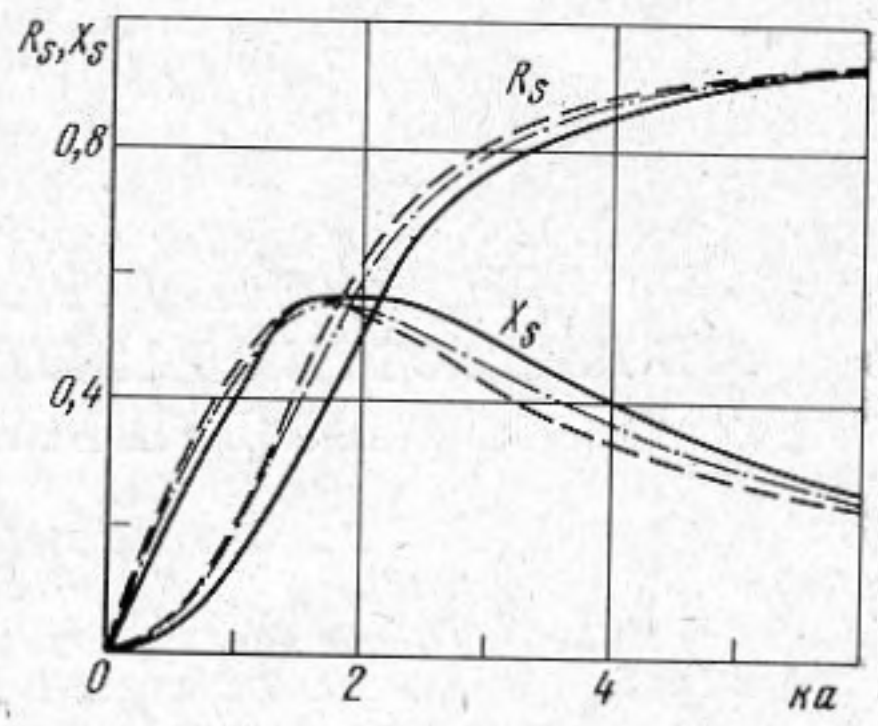
Фиг. 2

Зависимости коэффициента концентрации, а также активной и реактивной составляющих импеданца излучения от волнового размера сферы

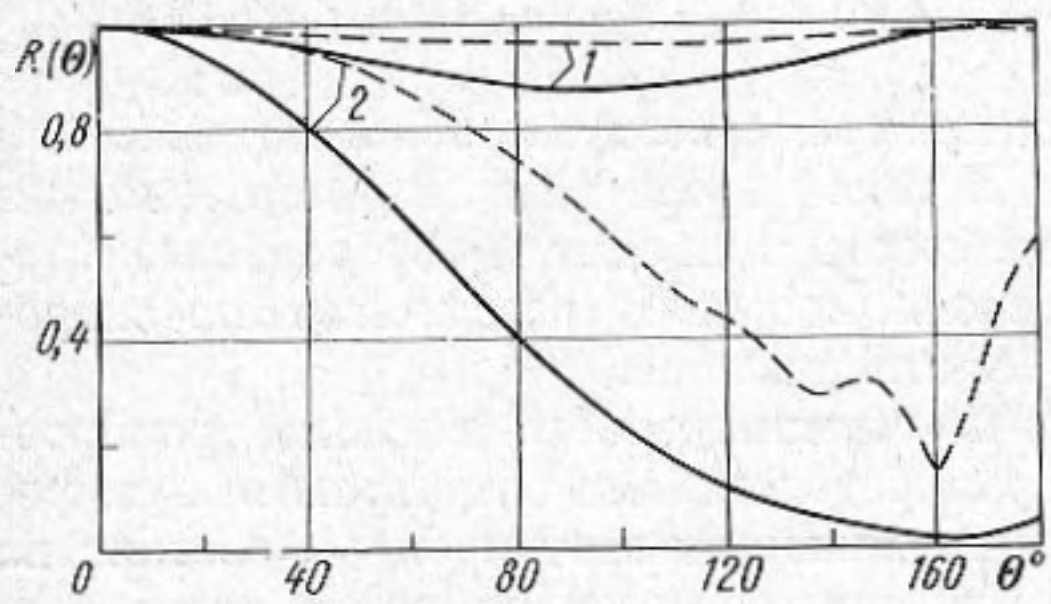
при фиксированном секторе $\theta_0 = 60°$ показаны на фиг. 3 и 4. Здесь и далее штриховая, штрих-пунктирная и сплошная линии последовательно соответствуют значениям проводимости поверхности 0; 1 и 10. Из приведен-



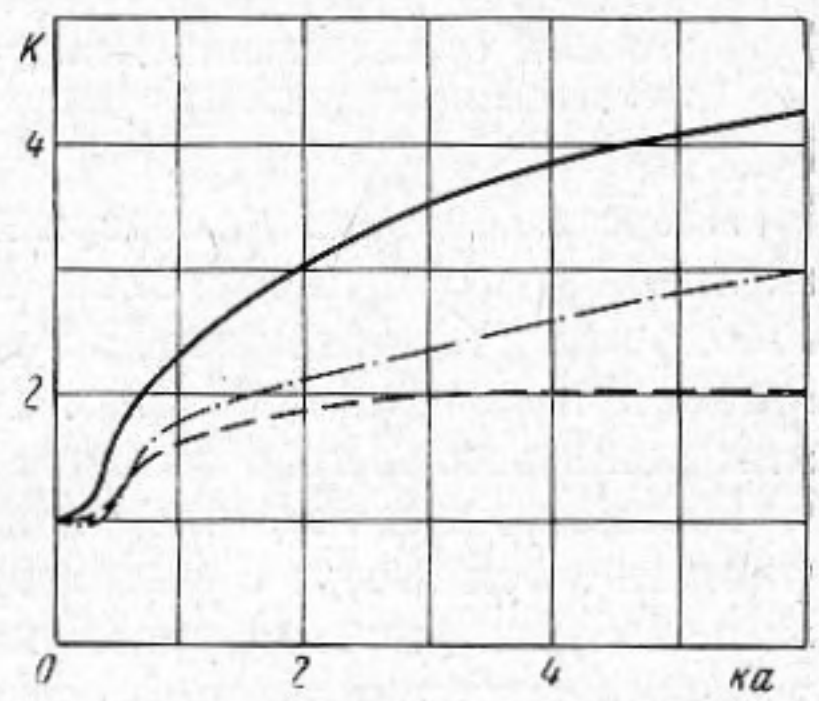
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

ных графиков следует, что при изменении размеров излучателя в широких пределах $(0 \leqslant ka \leqslant 10)$ наибольший коэффициент концентрации имеет место в случае акустически мягкой $(\alpha = 10)$ пассивной части поверхности. При этом импеданц излучения весьма мало зависит от степени податливости пассивной поверхности.

На фиг. 5 и 6 показаны диаграммы направленности и значения коэффициентов концентрации малых круглых поршней с радиусом $a\theta_0 = 0{,}025\lambda$ (λ — длина звуковой волны во внешнем пространстве) на поверхности сферы с различной проводимостью поверхности. На этих фигурах обозначения такие же, как и выше; кривые *1* соответствуют $ka = 0{,}3$, кривые $2 - ka = 2\pi$. Как видно, при увеличении волновых размеров сферы наблюдаются существенные различия в направленности малых поршней для акустически мягкой и жесткой поверхности.

Автор приносит благодарность Г. Е. Львовой и Г. Б. Чефас за проведение расчетов на ЦВМ, а также И. Л. Обозненко, сообщившему результаты численных расчетов близкой задачи методом наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, II. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик. Акустическое поле внешности сферы при смешанных граничных условиях. Акуст. ж., 1965, **11**, 2, 176—180.
3. М. И. Карновский, В. Г. Лозовик, И. Л. Обозненко, В. В. Пугач. Направленность излучения сферических преобразователей со смешанными граничными условиями. Акуст. ж., 1970, **16**, 3, 398—402.
4. С. Г. Михлин. Вариац. методы в математ. физике. М., «Наука», 1970.

Поступила
26 августа 1972 г.