АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

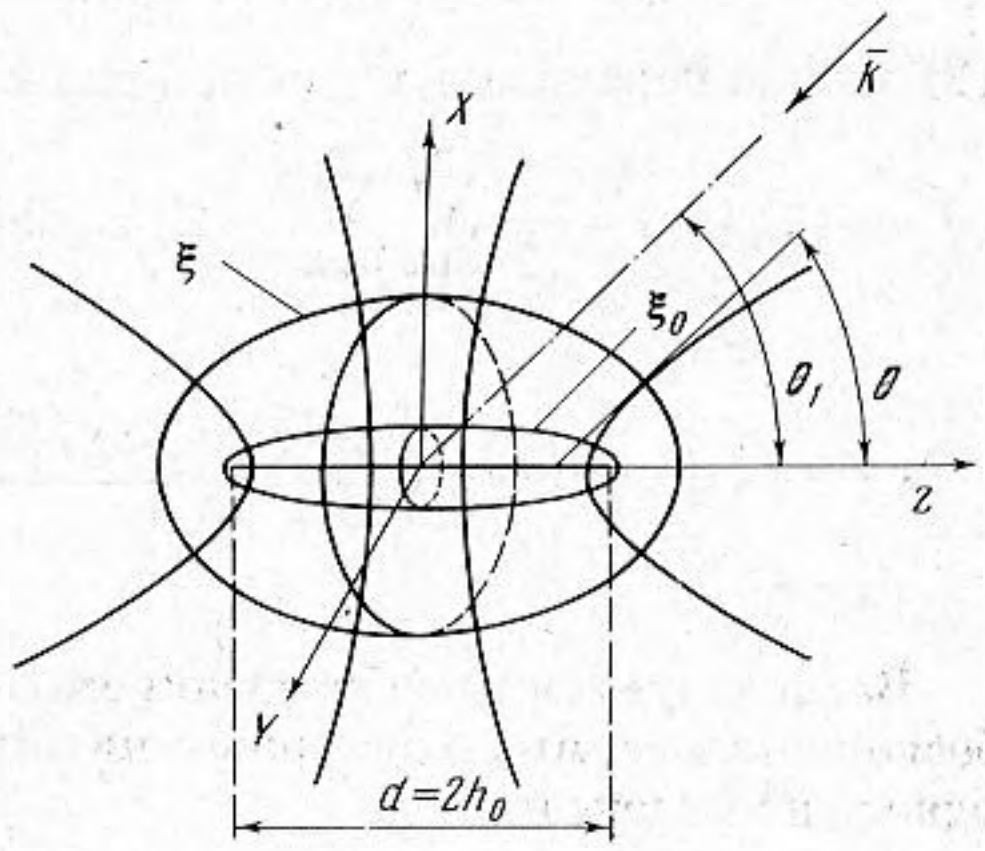
УДК 534.26

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ИДЕАЛЬНЫМИ СФЕРОИДАМИ В ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ВЫСОКИХ ЧАСТОТ

А. А. Клещев

С помощью преобразования Ватсона получены высокочастотные асимптотические представления решения трехмерной задачи дифракции звука на идеальных сфероидах.

В работе [1] были найдены асимптотические решения осесимметричной задачи о дифракции звука на идеальном сфероиде; при этом преобразование Ватсона применялось на комплексной плоскости постоянной разделения сфероидальных уравнений Λ. Мы обратимся к трехмерной задаче дифракции звука на идеальных сфероидах, предполагая произвольную ориентацию в пространстве волнового вектора падающей волны относительно рассеивателя, а преобразование Ватсона осуществим для одного из индексов двойного ряда дифрагированного давления. Пусть на вытянутый идеальный сфероид (абсолютно жесткий или абсолютно мягкий) с межфокусным расстоянием $d = 2h_0$, координатой внешней поверхности ξ_0, помещенный в жидкую безвихревую среду, падает плоская монохроматическая звуковая волна, направление распространения которой определяется угловыми координатами θ_1, φ_1 (фиг. 1). Без потери общности координату φ_1 можно положить равной нулю. Опуская временную зависимость $\exp(-i\omega t)$, давление P_i (единичной амплитуды) в падающей плоской волне представим в виде разложения по вытянутым сфероидальным функциям в обозначениях Мейкснера и Шефке [2]:



Фиг. 1

$$P_i(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{n \geqslant m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varepsilon_m PS_n^m(\eta; \gamma^2) PS_n^m(\eta_1; \gamma^2) \times$$

$$\times S_n^{m(1)}(\xi; \gamma) \cos m\varphi, \tag{1}$$

где $PS_n^m(\eta;\ \gamma^2)$ — угловая сфероидальная функция первого рода, $S_n^{m(1)}(\xi;\ \gamma)$ — радиальная сфероидальная функция первого рода, $\gamma =$

$= \frac{2\pi}{\lambda} h_0$ — волновой размер сфероида, λ — длина звуковой волны в среде, ξ, η, φ — сфероидальные координаты точки наблюдения, $\eta_1 = \cos\theta_1$, $\varepsilon_m = \begin{cases} 1 \text{ при } m = 0 \\ 2 \text{ при } m > 0. \end{cases}$ Дифрагированное давление P_Σ, равное сумме давления P_i в падающей волне и рассеянного идеальным сфероидом давления P_s, можно представить, привлекая результаты работ [3, 4] в виде

$$P_\Sigma(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{n \geqslant m}^{\infty} \sum_{m=0} (-i)^n \varepsilon_m (2n+1) \frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(n+1+m)} PS_n^m(\eta; \gamma^2) \times$$

$$\times PS_n^m(\eta_1; \gamma^2) \cos m\varphi \frac{\Omega S_n^{m(3)}(\xi_0; \gamma) S_n^{m(1)}(\xi; \gamma) - \Omega S_n^{m(1)}(\xi_0; \gamma) S_n^{m(3)}(\xi; \gamma)}{\Omega S_n^{m(3)}(\xi_0; \gamma)}. \tag{2}$$

Здесь $\Gamma(n+1-m)$ γ-функция, $\Gamma(n+1-m) = (n-m)!$, $S_n^{m(3)}(\xi, \gamma)$ — радиальная сфероидальная функция 3-го рода,

$$\Omega = \begin{cases} 1 \text{ — мягкий сфероид} \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_0} \text{ — жесткий сфероид.} \end{cases}$$

В силу того, что $\Omega S_n^{m(1)}(\xi; \gamma) = {}^1/_2 (\Omega S_n^{m(3)}(\xi; \gamma) + \Omega S_n^{m(4)}(\xi; \gamma))$, двойной ряд (2) можно переписать в удобной для нас форме

$$P_\Sigma(\xi, \eta, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^n \varepsilon_m (2n+1) \frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(n+1+m)} PS_n^m(\eta; \gamma^2) \times$$

$$\times PS_n^m(\eta_1; \gamma^2) \cos m\varphi \frac{\Omega S_n^{m(3)}(\xi_0; \gamma) S_n^{m(4)}(\xi; \gamma) - \Omega S_n^{m(4)}(\xi_0; \gamma) S_n^{m(3)}(\xi; \gamma)}{\Omega S_n^{m(3)}(\xi_0; \gamma)}. \tag{3}$$

Воспользуемся преобразованием Ватсона [5] и представим ряд (3) как бесконечную сумму контурных интегралов на комплексной ν-плоскости одного из индексов:

$$P_\Sigma(\xi, \eta, \varphi) = \frac{i}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\varphi \oint e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} (2\nu+1) \frac{\Gamma(\nu+1-m) PS_\nu^m(-\eta; \gamma^2)}{\Gamma(\nu+1+m)(-1)^m \sin \pi\nu} \times$$

$$\times \frac{PS_\nu^m(\eta_1; \gamma^2)}{\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0; \gamma)} [\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0; \gamma) S_\nu^{m(4)}(\xi; \gamma) - \Omega S_\nu^{m(4)}(\xi_0; \gamma) S_\nu^{m(3)}(\xi; \gamma)] \, d\nu. \tag{4}$$

Всем контурам присвоим соответствующие им индексы m. Значение каждого из интегралов ряда равно сумме вычетов подынтегральной функции относительно простых полюсов, находящихся в целочисленных точках $\nu = n$. Как нетрудно видеть из формулы (3), контуры интегрирования не должны включать отрицательных целых n. Поэтому контур с индексом $m = 0$ мы проведем так, как показано на фиг. 2. Что же касается остальных контуров ($m > 0$), то в отношении их мы поступим следующим образом:

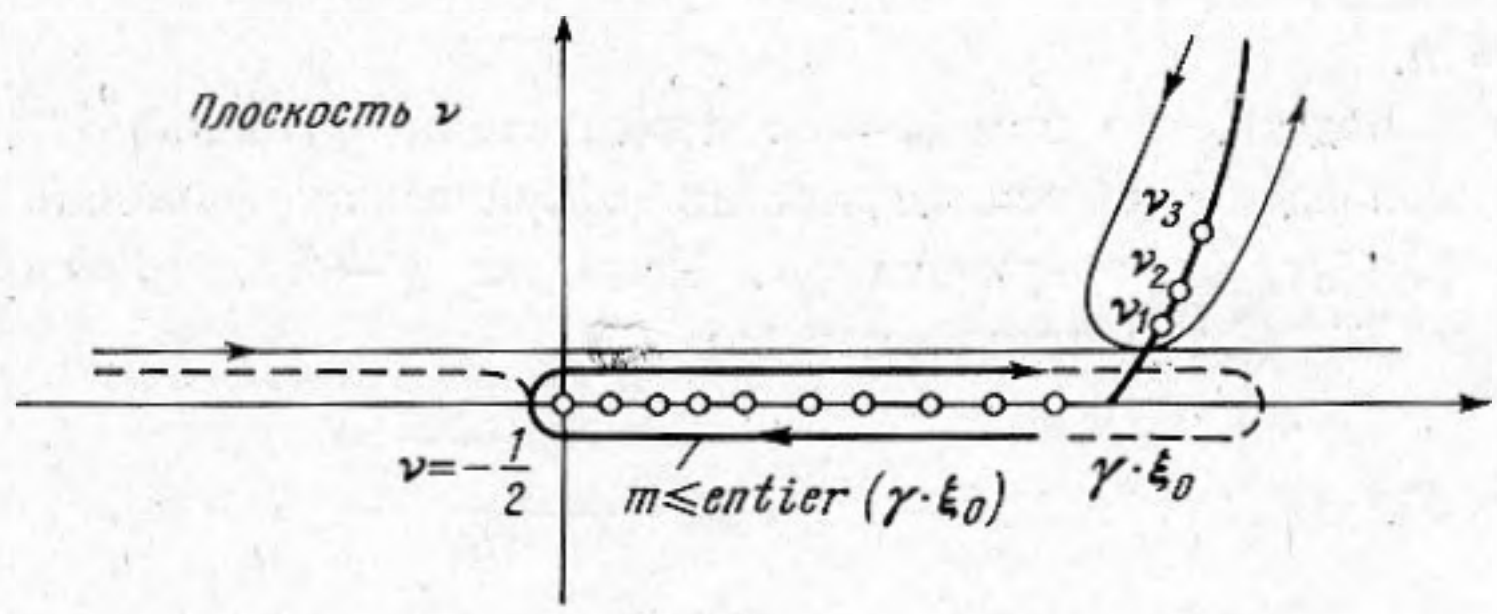
1) контуры с индексами $m \leqslant \text{entier}(\gamma\xi_0)$ будут охватывать все целочисленные $n \geqslant 0$, т. е. они ничем не будут отличаться от контура $m = 0$;

2) при $m > \text{entier}(\gamma\xi_0)$ контуры будут включать лишь целочисленные $n \geqslant m$ (фиг. 3).

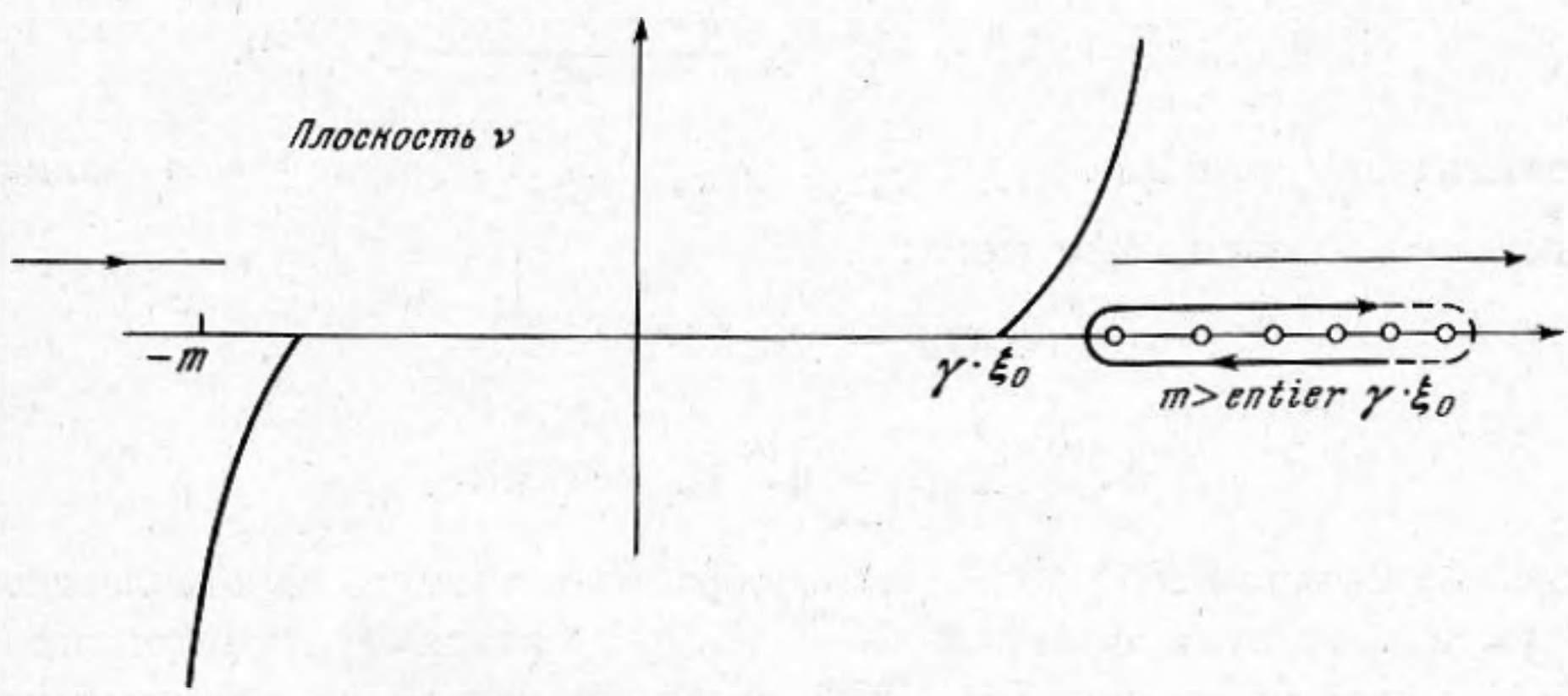
Искусственное вытягивание контуров интегрирования влево до точки $\nu = -{}^1/_2$ в первом случае (фиг. 2) никак не скажется на величине интеграла, если вспомнить, что $PS_n{}^m(\eta; \gamma^2) = 0$ при $n < m$, поэтому

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{PS_\nu{}^m(-\eta; \gamma^2)}{(-1)^m \sin \pi\nu}\right\}_{\nu=n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} PS_n{}^m(\eta; \gamma^2) & \text{при } n \geqslant m. \\ 0 \quad \text{при} \quad n < m. \end{cases} \tag{5}$$

Произведя замену независимой переменной $\nu = t - {}^1/_2$, найдем, опираясь на свойства Г-функции и сфероидальных волновых функций, что подынтегральная функция является нечетной относительно $t = \nu + {}^1/_2$ точно так



Фиг. 2



Фиг. 3

же, как в задаче Зоммерфельда о дифракции электромагнитной волны на сфере [6]. Нечетность подынтегральной функции по t позволяет видоизменить контуры интегрирования следующим образом:

1) контуры с индексами $m \leqslant \text{entier}\,(\gamma\xi_0)$ преобразуются в прямые, параллельные вещественной оси и лежащие в верхней полуплоскости ν, затем эти контуры превращаются в полуокружности бесконечно большого радиуса и петли, охватывающие полюсы ν_s (фиг. 2), определяемые как корни уравнения

$$\Omega S_{\nu_s}^{m(3)}(\xi_0; \gamma) = 0; \tag{6}$$

2) контуры с индексами $m > \text{entier}\,(\gamma\xi_0)$ преобразуются в две полупрямые, ограниченные точками $\nu = m$ и $\nu = -m$ (фиг. 3).

В дальнейшем нам потребуются асимптотические формулы для радиальных сфероидальных функций 3-го и 4-го родов с одним комплексным (ν) и одним вещественным (m) индексами при $\gamma \gg 1$, а также нули функции $\Omega S_\nu^{m(s)}(\xi_0; \gamma)$ на ν-плоскости. Авторы работы [2] дают следующие асимптотические выражения для радиальных функций 3-го и 4-го родов

при больших значениях $\gamma\xi_0$:

$$S_\nu^{\mu(3)}(\xi_0;\gamma)=(\xi_0^2-1)^{-\mu/2}\xi_0^\mu\frac{e^{i\left(\gamma\xi_0-\frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma\xi_0}\left\{\sum_{s=0}^{q-1}\frac{A_{\nu,s}^\mu}{[-2i\gamma\xi_0]^s}+B\right\},$$

$$S_\nu^{\mu(4)}(\xi_0;\gamma)=(\xi_0^2-1)^{-\mu/2}\xi_0^\mu\frac{e^{-i\left(\gamma\xi_0-\frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma\xi_0}\left\{\sum_{s=0}^{q-1}\frac{A_{\nu,s}^\mu}{[2i\gamma\xi_0]^s}+B\right\}, \qquad (7)$$

где $A_{\nu,s}^\mu=\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2r+s+1)}{\Gamma(\nu+2r-s+1)}$, $A_{\nu,0}^\mu=1$, B порядка ξ_0^{-q}; в нашем случае $\mu=m$.

Нетрудно видеть, что при $\xi_0\to\infty$ асимптотики функций $S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)$ и $S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)$ совпадают с асимптотиками сферических функций Бесселя $\psi_\nu^{(3)}(\xi_0\gamma)$ и $\psi_\nu^{(4)}(\xi_0\gamma)$ от аргумента $\gamma\xi_0$. Если же $\gamma\to\infty$, то асимптотики $S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)$ и $S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)$ принимают вид

$$S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)\underset{\gamma\to\infty}{\simeq}(\xi_0^2-1)^{-m/2}\xi_0^m\frac{e^{i\left(\gamma\xi_0-\frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma\xi_0}(1+B),$$

$$S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)\underset{\gamma\to\infty}{\simeq}(\xi_0^2-1)^{-m/2}\xi_0^m\frac{e^{-i\left(\gamma\xi_0-\frac{\nu+1}{2}\pi\right)}}{\gamma\xi_0}(1+B). \qquad (8)$$

Следовательно, функции $S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)$ и $S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)$ при $\gamma\to\infty$ можно представить в виде произведения:

$$S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)\underset{\gamma\to\infty}{\simeq}\psi_\nu^{(3)}(\xi_0\gamma)F_3(\xi_0),$$

$$S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)\underset{\gamma\to\infty}{\simeq}\psi_\nu^{(4)}(\xi_0\gamma)F_4(\xi_0). \qquad (9)$$

Поскольку функции $F_3(\xi_0)$ и $F_4(\xi_0)$ не обращаются в нуль на комплексной плоскости ν, то нули функции $\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)$ совпадают асимптотически ($\gamma\gg1$) с нулями функции $\Omega\psi_\nu^{(3)}(\gamma\xi_0)$, а следовательно, и с нулями цилиндрической функции Ханкеля 1-го рода или ее производной $\Omega H_\nu^{(1)}(\xi_0\gamma)$ [7]. Контурные интегралы первого типа $m\leqslant\text{entier}\,(\gamma\xi_0)$ можно заменить суммой вычетов в полюсах ν_s и бесконечную сумму интегралов (4) представить в виде двух слагаемых:

$$P_\Sigma(\xi,\eta,\varphi)=\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\text{entier}\,\gamma\xi_0}\varepsilon_m\cos m\varphi\sum_s\frac{2\nu_s+1}{(-1)^m\sin\pi\nu_s}\frac{\Gamma(\nu_s+1-m)}{\Gamma(\nu_s+1+m)}\times$$

$$\times PS_{\nu_s}^m(-\eta;\gamma^2)\frac{PS_{\nu_s}^m(\eta_1;\gamma^2)}{e^{i\pi/2\nu_s}}\left\{\frac{\Omega S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)}{\frac{\partial}{\partial\nu}\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)}\right\}S_{\nu_s}^{m(3)}(\xi;\gamma)+$$

$$+\frac{i}{4}\sum_{m=\text{entier}\,(\gamma\xi_0)+1}^{\infty}2\cos m\varphi\oint e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}(2\nu+1)\frac{\Gamma(\nu+1-m)}{\Gamma(\nu+1+m)}\frac{PS_\nu^m(-\eta;\gamma^2)}{(-1)^m\sin\pi\nu}\times$$

$$\times\frac{PS_\nu^m(\eta_1;\gamma^2)}{\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)}[\Omega S_\nu^{m(3)}(\xi_0;\gamma)S_\nu^{m(4)}(\xi;\gamma)-\Omega S_\nu^{m(4)}(\xi_0;\gamma)S_\nu^{m(3)}(\xi;\gamma)]d\nu \qquad (10)$$

По аналогии со сферическими и цилиндрическими функциями Ханкеля радиальные сфероидальные функции изменяются по абсолютной величине

медленно, пока $|\nu| < \gamma\xi_0$, в то время как при $|\nu| > \gamma\xi_0$ они быстро возрастают (для $m = 0$). При $m > 0$ рост радиальных функций начинается с меньших значений $|\nu|$. Учитывая такое поведение радиальных функций, мы приходим к выводу, что второе слагаемое в формуле (10) оказывается пренебрежимо малым по сравнению с первым; что же касается первого слагаемого, то в нем достаточно оставить лишь члены с $m \leqslant 1/2 \operatorname{entier} \gamma\xi_0$. В результате соотношение (10) принимает вид

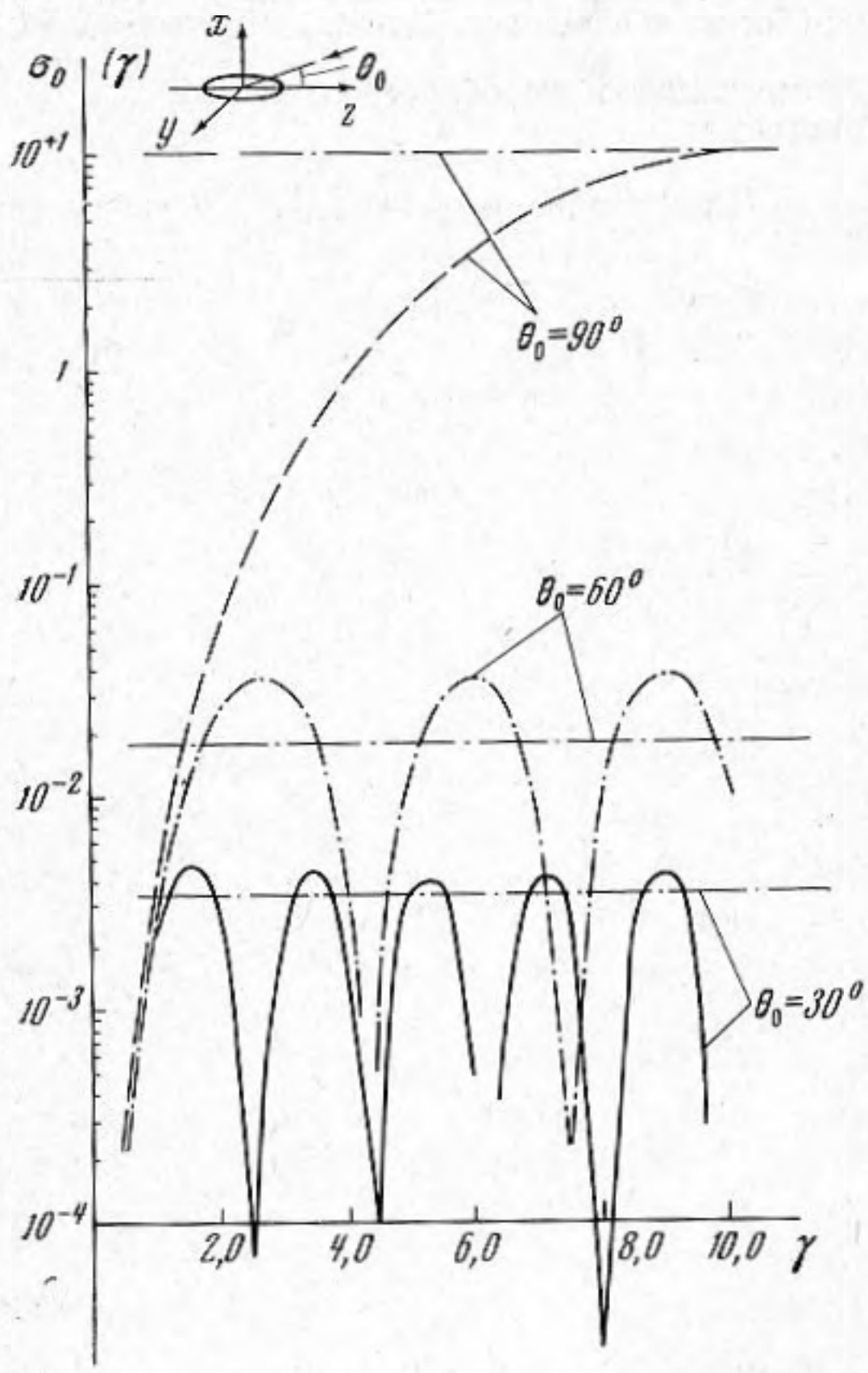
$$P_\Sigma(\xi, \eta, \varphi) = \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{1/2 \operatorname{entier} \gamma\xi_0} \varepsilon_m \cos m\varphi \sum_s \frac{2\nu_s + 1}{(-1)^m \sin \pi\nu_s} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(\nu_s + 1 - m)}{\Gamma(\nu_s + 1 + m)} PS_{\nu_s}{}^m(-\eta; \gamma^2) \frac{PS_{\nu_s}{}^m(\eta_1; \gamma^2)}{e^{i\frac{\pi}{2}\nu_s}} \left\{ \frac{\Omega S_\nu{}^{m(3)}(\xi_0; \gamma)}{\frac{\partial}{\partial\nu} \Omega S_\nu{}^{m(3)}(\xi_0; \gamma)} \right\} S_{\nu_s}{}^{m(3)}(\xi; \gamma). \tag{11}$$

Здесь ряд по волнам вычетов (s) сходится быстро, по крайней мере в области геометрической тени. Таким образом, преобразование Ватсона позволяет нам перейти от суммирования $\sim\gamma^2/2$ членов двойного ряда (3) к суммированию $\sim\gamma$ членов ряда (11).

При решении осесимметричной задачи дифракции индекс m принимает только одно значение — 0 и в выражении (11) остается только ряд по волнам вычетов:

$$P_\Sigma(\xi, \eta) = \frac{\pi}{2} \sum_s \frac{2\nu_s + 1}{\sin \pi\nu_s} \times$$
$$\times PS_{\nu_s}{}^0(-\eta; \gamma^2) \frac{PS_{\nu_s}{}^0(1; \gamma^2)}{\sin \pi\nu_s} \times$$
$$\times \left\{ \frac{\Omega S_\nu{}^{0(4)}(\xi_0; \gamma)}{\frac{\partial}{\partial\nu} \Omega S_\nu{}^{0(3)}(\xi_0; \gamma)} \right\}_{\nu_s} S_{\nu_s}{}^{0(3)}(\xi; \gamma). \tag{12}$$

Практическое использование полученных соотношений связано с отысканием асимптотик ($\gamma \gg 1$) для сфероидальных функций с комплексным индексом. Проведенные в настоящее время расчеты (с помощью ряда по незатухающим волнам) показывают существенное влияние ползущих волн на характеристики рассеяния звука идеальными сфероидами даже при $C < 10$. На фиг. 4 представлены сечения обратного рассеяния σ_0 для жесткого сфероида с координатой $\xi_0 = 1{,}005$ при трех значениях углов облучения θ_0. Штрихпунктирные горизонтальные прямые отвечают приближенно геометрической акустике. Нетрудно видеть, что при углах $\theta_0 = 30$ и $60°$ даже небольшое изменение волнового размера γ приводит к резкому колебанию (на несколько порядков) функции $\sigma_0(\gamma)$ вследствие различных фазовых соотношений между интерферирующими неодно-



Фиг. 4

родными волнами. Подобным же образом ведет себя функция $\sigma_0(\gamma)$ при $\theta_0 = 0°$ [8].

Отметим также, что преобразование Ватсона применительно к телам сфероидальной формы может быть использовано в задаче синтеза акустической антенны с криволинейной (сфероидальной) поверхностью при больших волновых размерах. Все сказанное выше переносится на идеальный сжатый сфероид заменой γ на $-i\gamma$ и ξ на $i\xi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. D. Kazarinoff, R. K. Ritt. On the Theory of Scalar Diffraction and Application to the Prolate Spheroid. Ann. Phys., 1959, **63**, 277—299.
2. J. Meixner, F. W. Schäfke. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin, 1954.
3. R. Spence, S. Granger. The Scattering of Sound from r Prolate Spheroid. JASA. 1951, **23**, 6, 701—706.
4. N. Einspruch, C. Barlow. The Scattering of a compressional wave by a prolate Spheroid. Quart. Appl. Math., 1961, **19**, 3, 253—258.
5. G. N. Watson. The Diffraction of Electric Waves by the Earth. Proc. Roy. Soc. A, 1918, **95**, 83.
6. А. Зоммерфельд. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
7. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
8. T. B. A. Senior. The Scattering from acoustically hard and soft prolate Spheroids for axial incidence. Canad. J. Phys., 1966, **44**, 3, 655—667.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 25 декабря 1970 г.