АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

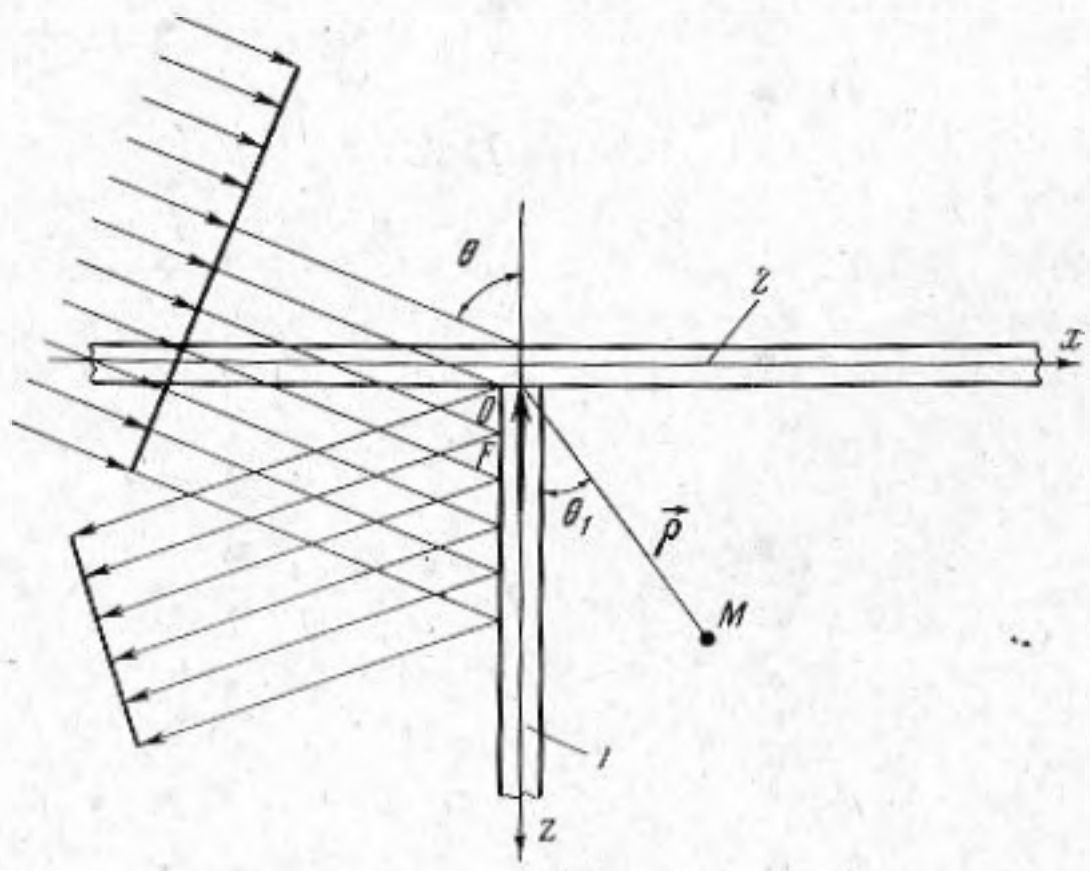
УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ЭКРАНЕ С УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

А. Н. Коровкин, Д. Д. Плахов

Рассмотрена задача о дифракции звука на идеально жестком экране, к краю которого под прямым углом примыкает бесконечная упругая пластина. Для скользящих углов падения проведен расчет звукового поля в зоне тени за экраном.

Экраны как средство изоляции источников шума давно применяются в технике. При этом к незвукопрозрачным экранам иногда примыкают упругие оболочки или пластины, изменяющие эффект экранирования. Поэтому для технических приложений важно иметь решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на полубесконечном экране *1*, к краю которого примыкает бесконечно упругая пластина *2*, влияющая на характер звукового поля в зоне тени (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть из верхнего полупространства на конструкцию нормально к линии соединения экрана и пластины падает плоская звуковая волна $e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)}$. Множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опускаем. Определим звуковое поле в нижнем полупространстве. Будем считать, что экран — идеально жесткий, расположен перпендикулярно к пластине и соединен с ней шарнирно. Точное решение такой задачи получить затруднительно ввиду необходимости учитывать многократную дифракцию на краю экрана при взаимодействии экрана и пластины.

В рассматриваемом ниже решении акустическое взаимодействие экрана и пластины мы будем учитывать приближенно, предполагая, что отражения от пластины малы, т. е. пластина тонкая. При этом принимаются во внимание только изгибные колебания пластины. Под действием падающей волны пластина излучает в нижнее полупространство плоскую волну $B(\theta)e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)}$, амплитуда которой определяется коэффициентом прохождения звука сквозь бесконечную пластину. Эта плоская волна будет дифрагировать на идеально жестком полубесконечном экране, примыкающем к пластине. Возникающая при этом рассеянная волна будет отражаться от пластины, имея амплитуду порядка $A(\theta)$, где $A(\theta)$ — коэффициент отражения для бесконечной пластины. Последующее дифракционное взаимодействие экрана и пластины мы рассматривать не будем, допуская тем самым погрешность порядка $|A(\theta)|^2$ в сравнении с единицей. В силу ограничений,

налагаемых на движение пластины экраном по линии их шарнирного соединения, пластина будет излучать в нижнее полупространство дополнительное звуковое поле, которое можно вычислить, предположив, что к пластине приложена сила с амплитудой F, распределенная вдоль линии соединения пластины и экрана. Полное звуковое поле в нижнем полупространстве может быть представлено в виде суммы трех компонент:

$$p_{\text{м}} = p_{\text{диф}} + p_{\text{отр}} + p_{\text{сил}}, \tag{1}$$

где $p_{\text{диф}}$ — составляющая звукового поля, обусловленная дифракцией на экране плоской волны $B(\theta)e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)}$, $p_{\text{отр}}$ — составляющая звукового поля, обусловленная отражением от пластины волны, рассеянной на экране, $p_{\text{сил}}$ — составляющая звукового поля, обусловленная излучением звука пластиной, возбуждаемой фиктивной нагрузкой F.

Первое слагаемое $p_{\text{диф}}$ определяется из рассмотрения классической задачи Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости [1]. Следуя Ноблу [2], напишем решение этой задачи применительно к рассматриваемому случаю:

$$p_{\text{диф}} = B(\theta)e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)} + P. \tag{2}$$

Давление в рассеянной экраном волне P будет

$$P = \pm\frac{i(2k)^{1/2}\sin\theta/2B(\theta)}{2\pi}\int\limits_{-\infty+ia}^{\infty+ia}\frac{e^{\mp\gamma x-i\lambda z}\,d\lambda}{\sqrt{\lambda+k}(\lambda+k\cos\theta)}, \tag{3}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{\lambda^2-k^2}, & \lambda > k \\ -i\sqrt{\lambda^2-k^2}, & \lambda < k, \quad -\operatorname{Im}k < a < \operatorname{Im}k\cos\theta, \end{cases}$$

причем верхний знак относится к случаю $x > 0$, а нижний знак соответствует $x < 0$. Из условия убывания рассеянного экраном поля на бесконечности необходимо положить $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2-k} \geqslant 0$, что позволяет зафиксировать лист римановой поверхности для многозначной подынтегральной функции. Рассеянная экраном волна P для $x < 0$ представляет собой сумму отраженной от экрана плоской волны (согласно закону геометрической акустики) и дифрагированной волны, расходящейся от края экрана. Для $x > 0$ из рассеянной волны P можно выделить член $-B(\theta)e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)}$, равный падающей волне, взятой с обратным знаком.

Составляющая звукового поля $p_{\text{диф}}$ может быть написана [2] в следующем виде:

$$p_{\text{диф}} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi^{1/2}}B(\theta)\left\{e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)}F\left[-(2k\rho)^{1/2}\sin\frac{\theta_1+\theta}{2}\right]+\right.$$
$$\left.+e^{ik\rho\cos(\theta_1-\theta)}F\left[(2k\rho)^{1/2}\sin\frac{\theta_1-\theta}{2}\right]\right\}, \tag{4}$$

где $F(\zeta) = \int\limits_{\zeta}^{\infty} e^{iq^2}\,dq$ — интеграл Френеля. Для определения составляющей звукового поля $p_{\text{отр}}$ необходимо рассмотреть отражение от пластины, рассеянной экраном волны P. Часть этой волны P, соответствующая при $x < 0$ отраженной от экрана, согласно закону геометрической акустики, плоской волне, уходит в глубь среды (см. фиг. 1) и от пластины не отражается. Часть рассеянной волны, написанная при $x > 0$ в виде $B(\theta)e^{i[k\rho\cos(\theta_1-\theta)+\pi]}$, также распространяется в глубь среды и от пластины не отражается. Эти плоские волны математически определяются вычетами подынтегрального выражения в точке $\lambda = -k\cos\theta$ в формуле (3). Остальная часть поля, определяемая интегралом вида (3) (исключая полюс $\lambda = -k\cos\theta$), взаимодей-

ствует с пластиной, вызывая появление составляющей $p_{\text{отр}}$. Используя представление рассеянной экраном волны P в форме разложения по плоским волнам, для записи составляющей $p_{\text{отр}}$ умножим каждую плоскую волну в подынтегральном выражении (3) на соответствующей ей коэффициент отражения от пластины и учтем набег фазы. Произведя замену переменных $\lambda = -k\cos\alpha$, получим

$$p_{\text{отр}} = \pm \frac{i\sin\theta/2B(\theta)}{\pi} \int\limits_{i\infty}^{\pi-i\infty} \frac{A(\pi-\alpha)\, e^{ik\rho\cos(\theta_1\pm\alpha)} \cos\alpha/2d\alpha}{\cos\theta - \cos\alpha} \tag{5}$$

где $A(\pi-\alpha)$ — коэффициент отражения и верхний знак соответствует $x > 0$, а нижний знак соответствует $x < 0$. Контур интегрирования выбран так, чтобы исключить вклад в поле полюса $\alpha = \theta$. Для коэффициента отражения и коэффициента прохождения воспользуемся результатами работы [3]

$$A(\theta) = \frac{-i[\beta^2 - \sin^4\theta]\cos\theta}{-i[\beta^2 - \sin^4\theta]\cos\theta + 2b\beta^3}, \tag{6}$$

$$B(\theta) = \frac{2b\beta^3}{-i[\beta^2 - \sin^4\theta]\cos\theta + 2b\beta^3} \tag{7}$$

где $\beta = f_{\text{гр}} / f$, $b = \rho_0 c_1 / 2\rho_1 c_0 \sqrt{3}$, ρ_0 — плотность среды, c_0 — скорость звука в среде, ρ_1 — плотность материала пластины, c_1 — скорость продольных волн в пластине, $f_{\text{гр}}$ — граничная частота, т. е. частота, при которой наблюдается совпадение длин изгибных волн в пластине с длиной волн звука в среде, f — частота $\omega = 2\pi f$. Определим теперь составляющую звукового поля, обусловленную излучением звука пластиной в нижнее полупространство при воздействии на нее фиктивной нагрузки F, а также найдем величину F.

В соответствии с принципом взаимности звуковое давление $p_{\text{сил}}$, излученное пластиной [4] в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$, мо́жет быть найдено, если известна колебательная скорость в точке приложения силы с радиус-вектором $\mathbf{r}$, вызванная точечным источником единичной производительности, помещенным в точку наблюдения с радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}$.

Математическая формулировка этого положения для пластины, на которую воздействует сила, имеет вид

$$p_{\text{сил}} = \int\limits_s \frac{\partial p_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})}{\partial z} F(\mathbf{r})\, ds. \tag{8}$$

Здесь $p^0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r})$ — звуковое давление в точке $\mathbf{r}$, создаваемое точечным источником, расположенным в точке $\boldsymbol{\rho}$ в присутствии упругой пластины, s — поверхность пластины. Поле точечного источника единичной производительности в присутствии пластины может быть написано в виде разложения по плоским волнам:

$$p_0 = \frac{i}{8\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [e^{-ik_z(z-z_0)} + A(k_x, k_y)\, e^{ik_z(z-z_0)}]\, e^{i[k_x(x-x_0)+k_y(y-y_0)]} \frac{dk_x\, dk_y}{k_z}.$$

Вычисляя производную $\partial p^0 / \partial z$, подставляя ее в соотношение (8) и выполняя интегрирование, получим выражение для поля давления силы F, распределенной по линии $\mathbf{r}(0, y, 0)$

$$p_{\text{сил}} = \frac{F}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [1 - A(k_x, k_y)]\, e^{-i[k_x x - k_z z]}\, dk_x. \tag{9}$$

Здесь учтено, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y(y-y_0)}\, dy = 2\pi\delta(k_y)$. Так как $k_x = k\sin\theta$, $k_y = 0$,

$k_z = k\cos\theta$ и $x = \rho\sin\theta_1$, $z = \rho\cos\theta_1$, то окончательно

$$p_{\text{сил}} = \frac{Fk}{4\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+i\infty}^{\frac{\pi}{2}+i\infty}[1 - A(\theta)]\, e^{ik\rho\cos(\theta+\theta_1)}\cos\theta\, d\theta. \tag{10}$$

Теперь все составляющие звукового поля в формуле (1) определены, неизвестна лишь величина силы F. Мы найдем ее, используя условие шарнирного соединения пластины и экрана

$$\left.\frac{\partial p_{\text{м}}}{\partial z}\right|_{z=0,\ x=0} = 0. \tag{11}$$

Подставляя сюда выражение для $p_{\text{м}}$ и учитывая асимметрию относительно оси z рассеянной волны P и составляющей $p_{\text{отр}}$, находим величину F

$$F = -\frac{ik\cos B(\theta)}{K}, \tag{12}$$

где

$$K = \frac{k^2 b\beta^3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\eta^2-1}\, d\eta}{(\eta^4-\beta^2)\sqrt{\eta^2-1} - 2b\beta^3}. \quad \operatorname{Re}\sqrt{\eta^2-1} \geqslant 0. \tag{13}$$

Преобразуем интеграл K к виду, удобному для численных расчетов. Этот интеграл состоит из двух частей: суммы вычетов в полюсах подынтегральной функции K^* и интегралов по разрезу. Формула, по которой рассчитывается сумма вычетов, имеет вид

$$2\pi i\Sigma\operatorname{Res} K^* = k^2 b\beta^3 i\sum_{\eta_2\eta_8\eta_{10}}\frac{\eta^2-1}{\eta[s\eta^4-(\beta^2+4\eta^2)]}$$

Полюса подынтегральной функции определяются уравнением

$$(\eta^4-\beta^2)\sqrt{\eta^2-1} - 2b\beta^3 = 0,$$

корни которого имеют вид

$$\eta_{1,2} = \pm a_0, \quad \eta_{3,4,5,6} = \pm a_1 \pm ib_1, \quad \eta_{7,8,9,10} = \pm a_2 \pm ib_2.$$

Из десяти корней этого уравнения полюсами подынтегрального выражения будут те корни, которые удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\sqrt{\eta^2-1} \geqslant 0$, т. е. лежат на выбранном листе римановой поверхности в нижней полуплоскости. В таблице приведены корни уравнения, вычисленные В. Н. Евсеевым, для стальных пластин в воде при ряде значений параметра $\beta = f_{\text{гр}}/f$, параметр $b = 0{,}1308$.

β	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2
0,5	1,0009	0,7078	0,0188	0,0326	0,7080
1	1,1131	0,9502	0,0456	0,1269	1,0041
2	1,5497	1,1729	0,1027	0,2016	1,4305
4	2,2232	1,5236	0,2129	0,3526	2,0527
8	3,2217	2,1326	0,4086	0,7558	2,9721

Легко проверить, что условию $\operatorname{Re}\sqrt{\eta^2-1} \geqslant 0$ в нижней полуплоскости будут удовлетворять три корня η_2, η_8, η_{10}. Поэтому вычеты подынтегрального выражения для интеграла K необходимо вычислять в полюсах, определяемых именно этими корнями [5]. Подынтегральное выражение K^* имеет точки ветвления $\eta = \pm 1$. Для выбора риманового листа, на котором K^* однозначно, из этих точек проводятся разрезы, как показано на фиг. 2.

Выражения многозначной функции $\sqrt{\eta^2-1}$ по различным берегам разреза ($\eta=\sigma+i\tau$, $\rho=(\sigma^2+\tau^2)^{1/2}$ следующие: по берегу *1*

$$\sqrt{\eta^2-1}=\sqrt{\rho^2+1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i},$$

по берегу *2*

$$\sqrt{\eta^2-1}=\sqrt{\rho^2+1}\,e^{\frac{\pi}{2}i},$$

по берегу *3*

$$\sqrt{\eta^2-1}=\sqrt{1-\rho^2}\,e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

и по берегу *4*

$$\sqrt{\eta^2-1}=\sqrt{1-\rho^2}\,e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

Теперь нетрудно показать, что интеграл K примет вид

$$K=2\pi i\sum_{\eta_2,\eta_8,\eta_{10}}\operatorname{Res}K^*+\frac{2k^2b^2\beta^6}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^\infty\frac{\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho}{(\rho^4-\beta^2)^2(1+\rho^2)+4b^2\beta^6}-\int_0^1\frac{\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho}{(\rho^4-\beta^2)^2(1-\rho^2)+4b^2\beta^6}\right].$$

Выполним численные расчеты звукового поля за экраном с упругой пластиной при $x>0$ по формуле (1), преобразовав предварительно слагаемые $p_{\text{отр}}$ и $p_{\text{сил}}$ методом перевала [6]. Сравнивая интеграл для $p_{\text{отр}}$ с интегралом вида

$$I=\int_c e^{ik\rho f(\alpha)}\Phi(\alpha)\,d\alpha$$

$$f(\alpha)=-i\cos(\theta_1+\alpha),$$

положим

$$\Phi(\alpha)=\frac{i\sin\theta/2B(\theta)A(\pi-\alpha)\cos\alpha/2}{\pi(\cos\theta-\cos\alpha)}$$

Точка перевала, определяемая уравнением $df(\alpha)\,/\,d\alpha=0$, будет $\alpha=\pi-\theta_1$. Остается вычислить интеграл по перевальному пути интегрирования. Предварительно необходимо проанализировать, какие особые точки подынтегральной функции могут встретиться на плоскости α при непрерывной деформации контура интегрирования в перевальный путь [6]. Полюс в точке $\alpha=\theta$ мы не учитываем по причине, о которой говорилось выше. Особые точки, связанные с $A(\pi-\alpha)$, мы также не будем учитывать. Это допустимо потому, что вычеты в этих особых точках, как следует из физического смысла метода расчета, связаны с изгибными колебаниями пластины [7].

Вычисление этих вычетов позволяет определить амплитуду поверхностных волн. Если интересоваться случаем больших расстояний от пластины (в сравнении с длиной волны изгиба), то выделение поверхностных волн не имеет смысла из-за малости определяемой ими поправки к уровню поля. Вычисление интеграла, определяющего $p_{\text{сил}}$, произведем аналогично. Применение метода перевала при $k\rho\gg1$ дает

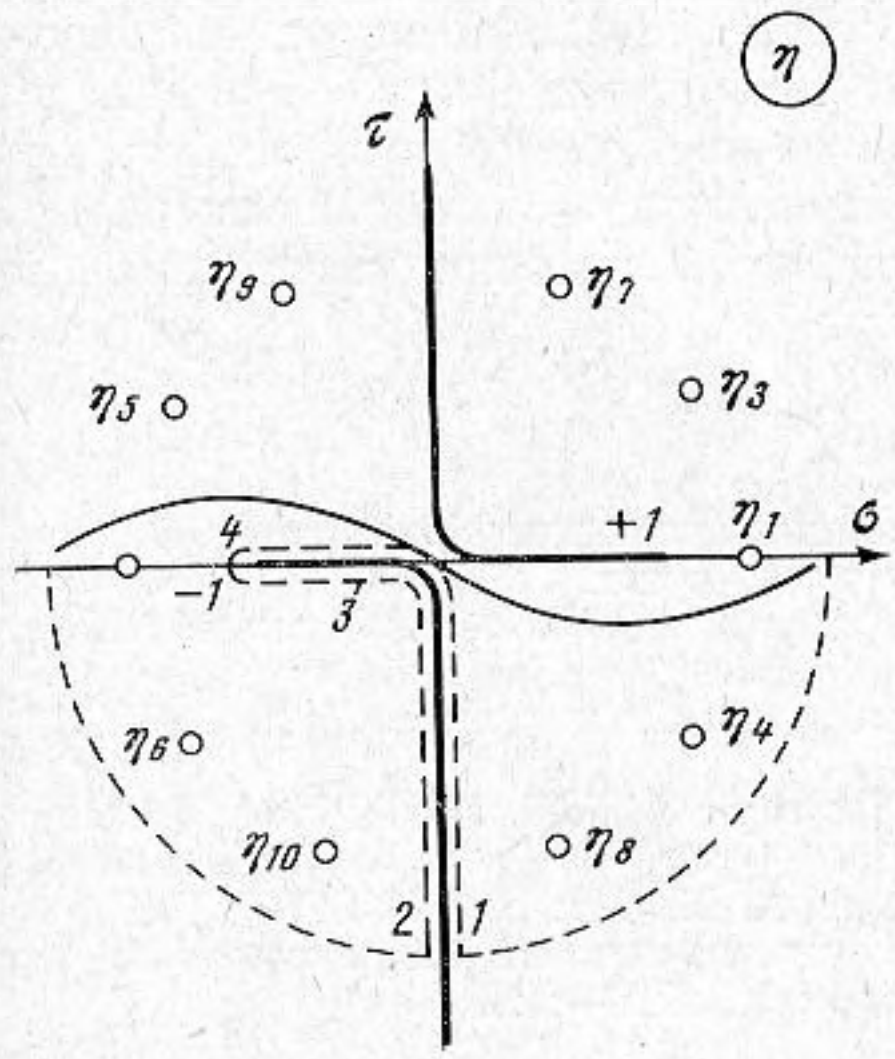
$$p_{\text{отр}}=\frac{e^{i(k\rho+\pi/4)}\sqrt{2}\sin\theta/2B(\theta)A(\theta_1)\sin\theta_1/2}{\sqrt{\pi k\rho}(\cos\theta+\cos\theta_1)},\tag{14}$$

$$p_{\text{сил}}=\frac{e^{i(k\rho-\pi/4)}FkB(\theta_1)\cos\theta_1}{2\sqrt{2\pi k\rho}}.\tag{15}$$

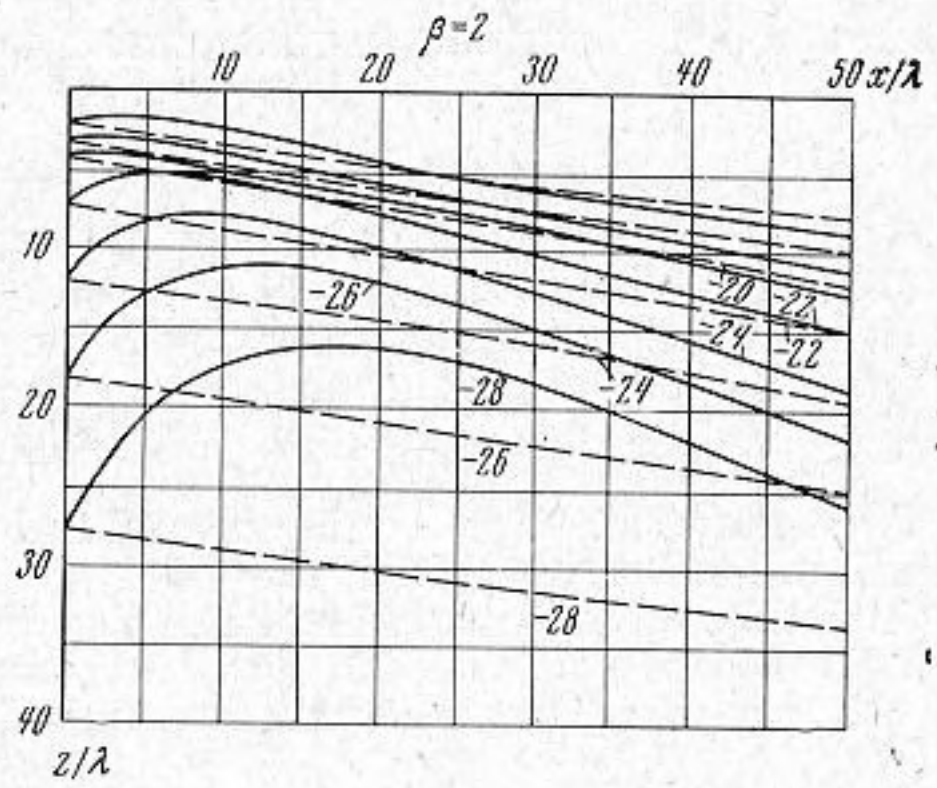
Для слагаемого $p_{\text{диф}}$ поступим несколько иначе. В силу асимптотических соотношений при $\zeta \gg 1$ справедливо выражение

$$F(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} e^{iq^2}\, dq = -\frac{e^{i\zeta^2}}{2i\zeta}. \tag{16}$$

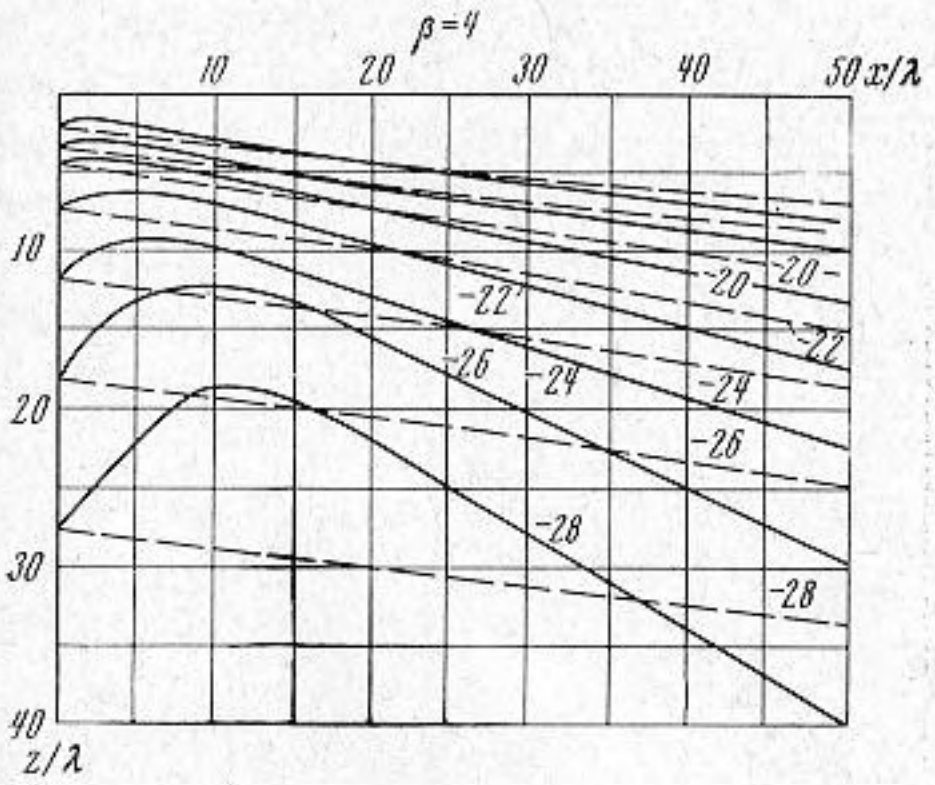
Заменяя в выражении (3) интегралы Френеля их асимптотическими выражениями (16) при больших значениях аргументов $(2k\rho)^{1/2} \sin \theta_1 + \theta / 2$ и



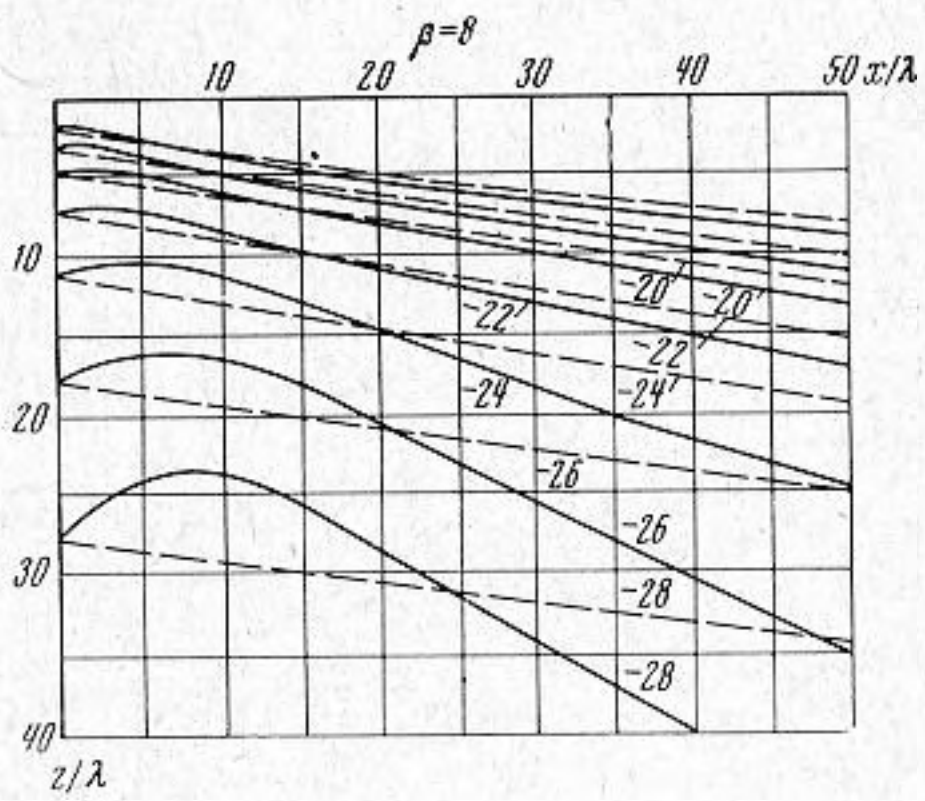
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$(2k\rho)^{1/2} \sin \theta_1 - \theta / 2$, получим расчетное выражение для $p_{\text{диф}}$, совпадающее с результатом, получаемым по методу перевала

$$p_{\text{диф}} = \frac{e^{i(k\rho+\pi/4)} \sqrt{2} \sin \theta/2 \cos \theta_{1/2} B(\theta)}{\sqrt{\pi k \rho}\,(\cos \theta - \cos \theta_1)}. \tag{17}$$

Численный расчет звукового поля за экраном с упругой пластиной по формуле (1) был произведен на ЭВМ М-220 для случая падения на экран волны длиной $\lambda = 10$ *см*. Упругие пластины были выбраны трех типов: тонкая стальная с параметром $\beta = f_{\text{гр}} / f = 8$ и две относительно толстые с параметрами $\beta = 4$ и $\beta = 2$.

В расчете рассматривалось только скользящее падение $(\theta = \pi / 2)$, при котором из-за обращения в нуль по формуле (12) амплитуды силы F составляющая $p_{\text{сил}}$ отсутствует.

По результатам расчета через 2 *дб* были построены кривые равного давления (изобары), которые представлены на фиг. 3—5 сплошными линиями. На кривых показано уменьшение амплитуды звукового поля в децибелах по сравнению с единичной падающей волной. На этих же фигурах штриховыми линиями представлены кривые равного давления в зоне тени за экраном без пластины. Координата x/λ соответствует пластине, координата z/λ — экрану.

Из фиг. 3—5 можно сделать вывод, что наличие пластины увеличивает амплитуду звукового поля за экраном вдали от линии присоединения пластины к экрану по сравнению с амплитудой в отсутствие пластины. Кроме того, в результате сопоставления сплошных линий на фиг. 3—5 оказывается, что на частотах, для которых при описании изолирующих свойств пластины ($\beta > 1$) справедлив закон массы, амплитуда звукового поля за экраном уменьшается с увеличением удельной массы, т. е. при уменьшении параметра β и увеличении толщины пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Хёйл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Теория дифракции, М., «Мир», 1964.
2. Б. Нобл. Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Л. М. Лямшев. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками. М., Изд-во АН СССР, 1955.
4. Л. М. Лямшев. К вопросу о принципе взаимности в акустике. Докл. АН СССР, 1959, **125**, 7, 1231—1234.
5. P. R. Nayak. Line Admittance of Infinite Isotropic Fluid-Laaded Plates. J. Acoust. Soc. America, 1970, **47**, 1, 191—201.
6. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах, М., Изд-во АН СССР, 1957.
7. В. Н. Красильников. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве. Акуст. ж., 1960, **6**, 2, 220—228.

Поступила
25 сентября 1970 г.