

УДК 534.6

**РЕШЕТКА ПЛОСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ
В КАЧЕСТВЕ ФИЛЬТРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ**

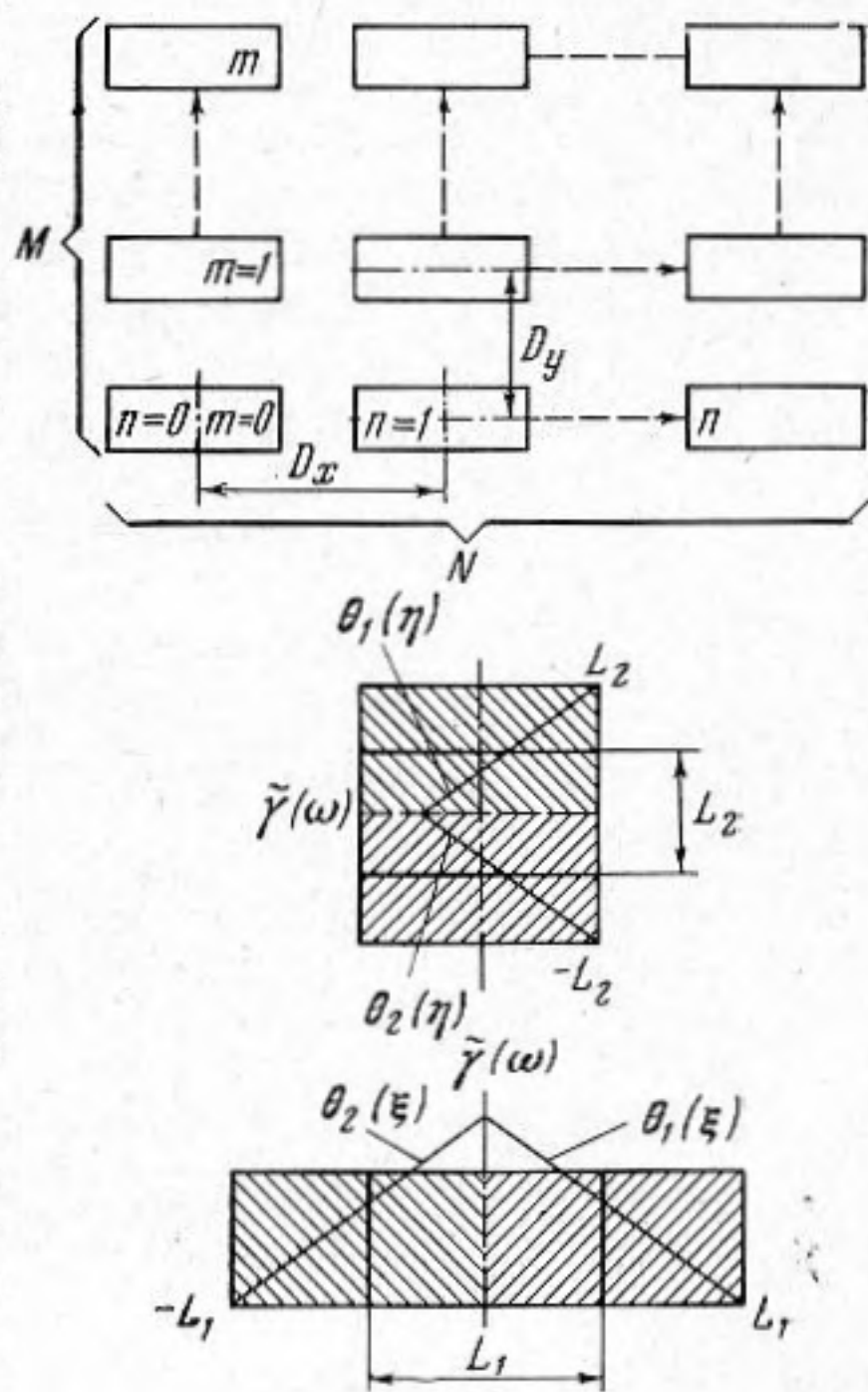
В. С. Петровский

Рассмотрены некоторые вопросы работы решетки приемников в поле давлений, характеризуемом частотно-зависимыми фазовыми скоростями конвекции. Обсуждение ведется с точки зрения применения такой решетки для целей акустико-гидродинамического эксперимента. Метод прямого определения волновых параметров поля может быть применен и к другим акустическим задачам.

Для решения задач, связанных с излучением звука турбулентным пограничным слоем, необходимо знать характеристики частотно-волнового спектра турбулентных пульсаций давления $E_p(\kappa_t, \omega)$ в области малых волновых чисел κ_t . Расчетное определение этой функции путем двухстороннего фурье-преобразования экспериментально измеренной пространственно-временной корреляционной функции $R_p(\xi, \tau)$, экстраполированной на большие пространственные разделения ξ приводит к заметным ошибкам. В ряде случаев эти ошибки имеют принципиальный характер, так как экстраполяция производится из области, где преобладают инерционные эффекты в область преобладающего влияния сжимаемости среды. Прямое измерение функции $R_p(\xi, \tau)$ при больших разделениях затруднено тем, что величина статистической связи пульсаций давлений при этом крайне мала и в значительной мере определяется параметрами хорошо коррелированного постороннего шумового фона.

Сказанное обуславливает необходимость непосредственного установления параметров спектра $E_p(\kappa_t, \omega)$ в области малых κ_t .

В работе [1] Майдаником указана возможность прямого измерения волнового спектра турбулентности с помощью решетки датчиков, составленной из N элементов, расположенных на расстоянии D_x один от другого. Основываясь на методах, развитых для оптических дифракционных решеток [2], Майданик получил выражения, связывающие фильтруемую волновую частоту с параметрами решетки датчиков. В сущности полученное решение характеризует передаточные свойства решетки при воздействии на нее когерентного сигнала. В связи с этим решение сохраняет свою структуру лишь в предположении, что на решетку приемников действует идеализированная «замороженная» турбулентность.



Фиг. 1

Рассмотрим решетку, составленную из N приемников вдоль и M приемников поперек потока; чувствительные элементы приемников совмещены с обтекаемой поверхностью. Предположим, что каждый приемник имеет прямоугольную форму в плане со сторонами L_1 и L_2 вдоль и поперек потока соответственно. Для простоты анализа будем считать, что все приемники идентичны по чувствительности $\tilde{\gamma}(\omega)$, а локальное распределение этой чувствительности в пределах отдельного приемника постоянно. Схема расположения приемников и принятые обозначения показаны на фиг. 1. Полагая, что на выходе решетки установлен идеальный фильтр с единичной полосой пропускания ω_0 , напишем выражение для передаточной функции решетки приемников в виде:

$$\frac{P(\kappa_T, \omega_0)}{P_m(\kappa_x, \omega_0)} = \chi^N(\kappa_T, \omega_0) = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^k \frac{\iint \theta^N(\varepsilon) \gamma(\varepsilon, \kappa_T) d\varepsilon}{\iint \theta^N(\varepsilon) d\varepsilon} \right|^2$$

где $P(\kappa_T, \omega_0)$, $P_m(\kappa_x, \omega_0)$ — частотно-волновые составляющие на входе и выходе решетки соответственно, $\theta^N(\varepsilon)$ — функция Грина решетки приемников, определяемая как свертка импульсных характеристик [3].

Для решетки, составленной из прямоугольных приемников, $\theta^N(\varepsilon)$ можно представить в виде произведения двух функций, описывающих отклик приемника при воздействии на его входе точечной силой, перемещающейся в продольном и поперечном направлениях,

$$\gamma(\varepsilon, \kappa_T) = \exp\left(-\alpha \frac{\omega}{U_\phi} |\xi|\right) \exp\left(i \frac{\omega}{U_\phi} \xi\right) \exp\left(-\beta \frac{\omega}{U_\phi} |\eta|\right) \quad (1)$$

есть безразмерный взаимный по пространству спектр, нормализованный частотно-зависимой фазовой скоростью U_ϕ , α и β экспериментальные константы, характеризующие затухание коэффициента узкополосной пространственной корреляции пульсаций давления в точках, отстоящих друг от друга на ξ и η в направлениях x и y соответственно. Выражение (1) на основании «гипотезы перемножения» [4], можно представить в виде

$$\gamma(\xi, \kappa_T) = \exp(-\alpha \kappa_T |\xi|) \exp(i \kappa_T \xi), \quad (2)$$

$$\gamma(\eta, \kappa_T) = \exp(-\beta \kappa_T |\eta|), \quad \left(\kappa_T = \frac{\omega}{U_\phi}\right) \quad (3)$$

В этой форме взаимный по пространству спектр характеризует убывание статистической связи в двух точках пространства волновых масштабов, соответствующих частоте ω по мере увеличения разнесения точек.

Если решетка составлена из N элементов в продольном и M в поперечном направлениях, то передаточная функция примет вид

$$\begin{aligned} \chi^{N,M}(\kappa_T, \omega_0) = & \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^k \frac{\iint \theta^N(\varepsilon) \gamma(\varepsilon, \kappa_T) d\varepsilon}{\iint \theta^N(\varepsilon) d\varepsilon} \right|^2 \times \\ & \times \frac{1}{NM} \left| \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^p \frac{\iint \theta^M(\varepsilon) \gamma(\varepsilon, \kappa_T) d\varepsilon}{\iint \theta^M(\varepsilon) d\varepsilon} \right|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Множители $(-1)^k$ и $(-1)^p$ определяют полярность при соединении приемников решетки между собой. При $k = n$ и $p = m$ суммирование электрических сигналов определяется знакопеременным рядом, при $k = 2n$, $p = 2m$ — суммирование с постоянным знаком. Множитель $1/NM$ перед каждой суммой нормирует величину $\chi^{N,M}(\kappa_T, \omega_0)$.

Для отдельного прямоугольного приемника, расположенного в начале координат, функция влияния имеет вид [4]

$$\theta^I(\varepsilon) = \theta^I(\xi)\theta^I(\eta). \quad (5)$$

Если приемник расположен на расстоянии x_0, y_0 от начала координат, то продольную часть функции (5) удобно представить в виде

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}(\omega)} \theta_1^I(\xi) = [(x_0 + L_1) - \xi] \quad \text{для правой ветви } x_0 \leq \xi \leq x_0 + L_1,$$

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}(\omega)} \theta_2^I(\xi) = [-(x_0 - L_1) + \xi] \quad \text{для левой ветви } x_0 - L_1 \leq \xi \leq x_0.$$

Замечая из фиг. 1, что для приемника, расположенного в n -м столбце $x_0 = nD_x$, получим

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}(\omega)} \theta_1^N(\xi) = \begin{cases} (nD_x + L_1) - \xi & \text{для } nD_x \leq \xi \leq nD_x + L_1 \\ 0 & \text{для } \xi > nD_x + L_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}(\omega)} \theta_2^N(\xi) = \begin{cases} -(nD_x - L_1) + \xi & \text{для } nD_x - L_1 \leq \xi \leq nD_x \\ 0 & \text{для } \xi < nD_x - L_1 \end{cases} \quad (6)$$

Аналогично для приемника, расположенного в m -й строке $y_0 = mD_y$, получим

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}(\omega)} \theta_1^M(\eta) = \begin{cases} (mD_y + L_2) - \eta & \text{для } mD_y \leq \eta \leq mD_y + L_2 \\ 0 & \text{для } \eta > mD_y + L_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}(\omega)} \theta_2^M(\eta) = \begin{cases} (mD_y - L_2) + \eta & \text{для } mD_y - L_2 \leq \eta \leq mD_y \\ 0 & \text{для } \eta < mD_y - L_2 \end{cases} \quad (7)$$

Имея в виду выражения (2) и (3), а также учитывая полученные значения функций влияния и области их применения, запишем основное соотношение (4) в следующей форме:

$$\chi^{N, M}(\kappa_T, \omega) = \chi_\xi^N(\kappa_T, \omega_0) \chi_\eta^M(\kappa_T, \omega_0),$$

где

$$\chi_\xi^N(\kappa_T, \omega_0) = \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \times \right.$$

$$\times \frac{\int_{nD_x}^{nD_x+L_1} \theta_1^N(\xi) \gamma(\kappa_T, \xi) d\xi - \int_{nD_x}^{nD_x-L_1} \theta_2^N(\xi) \gamma(\kappa_T, \xi) d\xi}{\int_{nD_x}^{nD_x+L_1} \theta_1^N(\xi) d\xi - \int_{nD_x}^{nD_x-L_1} \theta_2^N(\xi) d\xi} \Bigg|^2, \quad (8)$$

$$\chi_\eta^M(\kappa_T, \omega_0) = \frac{1}{NM} \left| \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \times \right.$$

$$\times \frac{\int_{mD_y}^{mD_y+L_2} \theta_1^M(\eta) \gamma(\kappa_T, \eta) d\eta - \int_{mD_y}^{mD_y-L_2} \theta_2^M(\eta) \gamma(\kappa_T, \eta) d\eta}{\int_{mD_y}^{mD_y+L_2} \theta_1^M(\eta) d\eta - \int_{mD_y}^{mD_y-L_2} \theta_2^M(\eta) d\eta} \Bigg|^2. \quad (9)$$

Заметим, что вследствие предположения об одинаковости чувствительности элементов, образующих систему приемников, последние выражения не зависят от $\tilde{\gamma}(\omega)$.

Переходя к безразмерной форме уравнений путем отнесения продольных и поперечных линейных величин к масштабам L_1 и L_2 соответственно и замечая, что взаимный спектр $\gamma(\kappa_\tau, \eta)$ в поперечном направлении представляет собой экспоненциально убывающую неосциллирующую функцию, напишем выражения (8) и (9) в виде

$$\chi_{\xi}^N(\kappa_\tau, \omega_0) = \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{A^N - B^N}{\bar{Q}_\xi} \right|^2, \quad (10)$$

$$\chi_{\eta}^M(\kappa_\tau, \omega_0) = \frac{1}{NM} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{A^M - B^M}{\bar{Q}_\eta}, \quad (11)$$

где

$$A^N = \int_{n\bar{D}_x}^{n\bar{D}_x+1} [(n\bar{D}_x + 1) - \bar{\xi}] \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau \bar{\xi} d\bar{\xi} = \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau n\bar{D}_x \times \\ \times \left[\exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau \frac{1}{(i - \alpha)^2 \bar{\kappa}_\tau^2} - \frac{1}{(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau} - \frac{1}{(i - \alpha)^2 \bar{\kappa}_\tau^2} \right].$$

Выражение в квадратных скобках характеризует фильтрационные особенности отдельного приемника, в связи с чем

$$A^N = \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau n\bar{D}_x A^I.$$

Здесь

$$\operatorname{re} A^I = \frac{1 - \alpha^2 + \alpha \bar{\kappa}_\tau (1 + \alpha^2) - \exp - \alpha \bar{\kappa}_\tau [(1 - \alpha^2) \cos \bar{\kappa}_\tau + 2\alpha \sin \bar{\kappa}_\tau]}{(1 + \alpha^2)^2 \bar{\kappa}_\tau^2}$$

$$\operatorname{im} A^I = \frac{\exp - \alpha \bar{\kappa}_\tau [2\alpha \cos \bar{\kappa}_\tau - (1 + \alpha^2) \sin \bar{\kappa}_\tau] + (1 + \alpha^2) \bar{\kappa}_\tau + 2\alpha^2 \bar{\kappa}_\tau - 2\alpha}{(1 + \alpha^2)^2 \bar{\kappa}_\tau^2}$$

$$B^N = \int_{n\bar{D}_x}^{n\bar{D}_x-1} [(1 - n\bar{D}_x) + \bar{\xi}] \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau \bar{\xi} d\bar{\xi} = \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_\tau n\bar{D}_x B^I,$$

причем

$$\operatorname{re} B^I = -\operatorname{re} A^I, \quad \operatorname{im} B^I = \operatorname{im} A^I;$$

$$A^M = \int_{m\bar{D}_y}^{m\bar{D}_y+1} [(m\bar{D}_y + 1) - \bar{\eta}] \exp - \beta \bar{\kappa}_\tau |\bar{\eta}| d\bar{\eta} = \\ = \exp - \beta \bar{\kappa}_\tau m\bar{D}_y \left(\frac{\beta \bar{\kappa}_\tau + \exp - \beta \bar{\kappa}_\tau - 1}{\beta^2 \bar{\kappa}_\tau^2} \right);$$

$$B^M = \int_{m\bar{D}_y}^{m\bar{D}_y-1} [(1 - m\bar{D}_y) + \bar{\eta}] \exp - \beta \bar{\kappa}_\tau |\bar{\eta}| d\bar{\eta} = \\ = -\exp - \beta \bar{\kappa}_\tau m\bar{D}_y \left(\frac{\beta \bar{\kappa}_\tau + \exp - \beta \bar{\kappa}_\tau - 1}{\beta^2 \bar{\kappa}_\tau^2} \right).$$

Нормирующие множители будут

$$\bar{Q}_\xi = \int_{n\bar{D}_x}^{n\bar{D}_x+1} [(n\bar{D}_x + 1) - \bar{\xi}] d\bar{\xi} - \int_{n\bar{D}_x}^{n\bar{D}_x-1} [(1 - n\bar{D}_x) + \bar{\xi}] d\bar{\xi} = 1,$$

$$\bar{Q}_\eta = \int_{m\bar{D}_y}^{m\bar{D}_y+1} [(m\bar{D}_y + 1) - \bar{\eta}] d\bar{\eta} - \int_{m\bar{D}_y}^{m\bar{D}_y-1} [(1 - m\bar{D}_y) + \bar{\eta}] d\bar{\eta} = 1.$$

Используя полученные значения интегралов A^N , B^N , A^M , B^M и нормирующих множителей \bar{Q}_ξ и \bar{Q}_η перепишем выражения (10) и (11) в виде

$$\chi_\xi^N(\bar{\kappa}_T, \omega_0) = \chi_\xi^I(\bar{\kappa}_T) \Phi_\xi^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha), \quad (12)$$

$$\chi_\eta^M(\bar{\kappa}_T, \omega_0) = \chi_\eta^I(\bar{\kappa}_T) \Phi_\eta^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta), \quad (13)$$

где

$$\chi_\xi^I(\bar{\kappa}_T) = 2 \frac{1 - \alpha^2 + \alpha\bar{\kappa}_T(1 + \alpha^2) - \exp - \alpha\bar{\kappa}_T[(1 - \alpha^2) \cos \bar{\kappa}_T + 2\alpha \sin \bar{\kappa}_T]}{(1 + \alpha^2)^2 \bar{\kappa}_T^2} \quad (14)$$

— функция, описывающая фильтрационные свойства отдельного прямоугольного приемника для компонент волнового вектора, совпадающих с направлением потока,

$$\begin{aligned} \Phi_\xi^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha) &= \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \exp - \alpha\bar{\kappa}_T n \bar{D}_x \exp i\bar{\kappa}_T n \bar{D}_x \right|^2 = \\ &= \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=1}^N (-1)^n [\exp(i - \alpha)\bar{\kappa}_T \bar{D}_x]^{n-1} \right|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

— функция, описывающая фильтрующие свойства N совместно действующих идентичных приемников, расположенных вдоль потока и фильтрующих компоненту волнового вектора в этом же направлении,

$$\chi_\eta^I(\bar{\kappa}_T) = 2 \frac{\beta\bar{\kappa}_T + \exp - \beta\bar{\kappa}_T - 1}{\beta^2 \bar{\kappa}_T^2} \quad (16)$$

— функция, описывающая фильтрующие свойства единичного приемника, для компонент волнового вектора в направлении поперек потока,

$$\begin{aligned} \Phi_\eta^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta) &= \frac{1}{NM} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \exp - \beta\bar{\kappa}_T m \bar{D}_y = \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{m=1}^M (-1)^m (\exp - \beta\bar{\kappa}_T \bar{D}_y)^{m-1} \end{aligned} \quad (17)$$

— функция, описывающая фильтрующие свойства M совместно действующих идентичных приемников, расположенных поперек потока.

Если турбулентность заморожена, т. е. $\alpha = \beta = 0$, то (полагая одновременно $M = 1$) получим

$$\chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T) |_{\alpha=0} = \frac{2}{\bar{\kappa}_T^2} (1 - \cos \bar{\kappa}_T) = \frac{\sin^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2}}{\left(\frac{\bar{\kappa}_T}{2}\right)^2};$$

$$\Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha = 0) = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \exp i \bar{\kappa}_T n \bar{D}_x \right|^2,$$

$$\chi_{\eta}^1(\bar{\kappa}_T) |_{\beta=0} = 1 \text{ и } \Phi_{\eta}^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta = 0) = 1 \dots \dots \quad (18)$$

(Если $M \neq 1$, то $\Phi_{\eta}^M |_{\beta=0} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m$ и $\chi_{\eta}^M(\bar{\kappa}_T) |_{\beta=0} = \frac{1}{NM} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m$.)

Таким образом, фильтровая характеристика решетки, составленной из N прямоугольных одинаковых приемников при воздействии на них замороженной турбулентности, принимает вид, совпадающий с решением, полученным в работе Майданика [1].

Выражения (18) в точности соответствуют известным в оптике уравнениям, описывающим распределение дифракционных полос при прохождении когерентного оптического луча через решетку с N штрихами. В связи с этим выражения (18) являются «оптическим» приближением полученного решения, соответствующего реальному турбулентному потоку.

Рассматривая выражение (15) как квадрат модуля суммы N членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_{\xi} = \exp(i - \alpha) \times \bar{\kappa}_T \bar{D}_x$, а выражение (17) как сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_{\eta} = \exp - \beta \bar{\kappa}_T \bar{D}_y$, напомним значения $\Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha)$ и $\Phi_{\eta}^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta)$ для различных вариантов подключения элементов решетки

а) $k = 2n, p = 2m$

$$\Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha) = \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=1}^N [\exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_T \bar{D}_x]^{n-1} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{NM} \left| \frac{1 - \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x}{1 - \exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_T \bar{D}_x} \right|^2 =$$

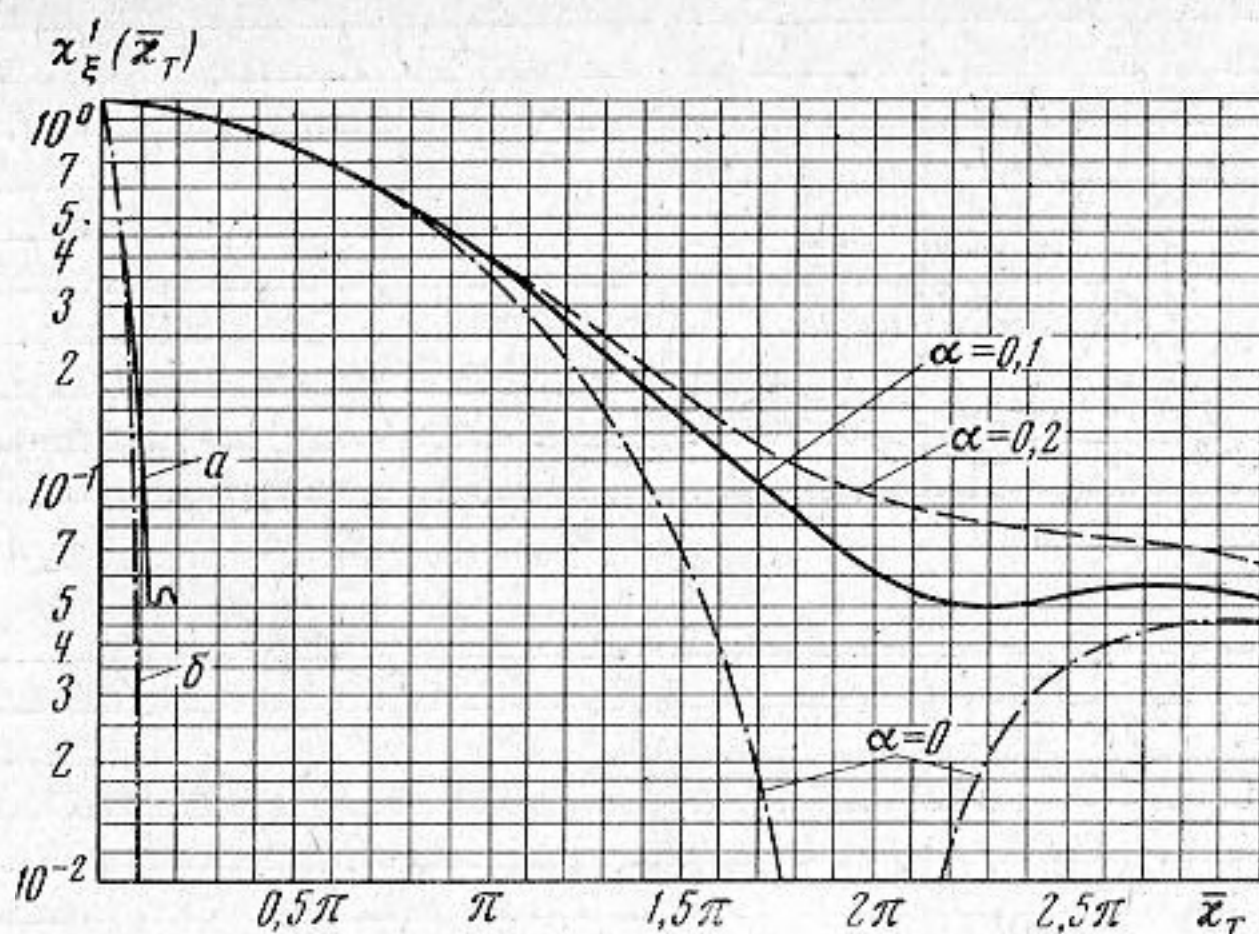
$$= \frac{1}{NM} \frac{1 - 2 \exp - \alpha \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x + \exp - 2 \alpha \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x}{1 - 2 \exp - \alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T \bar{D}_x + \exp - 2 \alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x} \quad (19)$$

Для замороженной турбулентности ($M = 1$)

$$\Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \alpha = 0, \bar{D}_x) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2} N \bar{D}_x}{\sin^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2} \bar{D}_x} \quad (20)$$

Поперечная составляющая будет

$$\Phi_{\eta}^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta) = \frac{1}{NM} \frac{1 - \exp - \beta \bar{\kappa}_T M \bar{D}_y}{1 - \exp - \beta \bar{\kappa}_T \bar{D}_y} \quad (21)$$



Фиг. 2

Для замороженной турбулентности $\Phi_n^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta = 0) = \frac{1}{NM}$.

б) $k = n, p = m$
 N — четное, M — четное

$$\Phi_\xi^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha) = \frac{1}{NM} \left| \left(1 - \exp(i - \alpha)\bar{\kappa}_T\bar{D}_x \sum_{n=1}^{N/2} \exp(i - \alpha)\bar{\kappa}_T\bar{D}_x \right)^2 \right| =$$

$$= \frac{1}{NM} \frac{1 - 2 \exp - \alpha\bar{\kappa}_T N \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x + \exp - 2\alpha\bar{\kappa}_T N \bar{D}_x}{1 + 2 \exp - \alpha\bar{\kappa}_T \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T \bar{D}_x + \exp - 2\alpha\bar{\kappa}_T \bar{D}_x}. \quad (22)$$

Для замороженной турбулентности из последнего выражения следует (N — четное, $M = 1$)

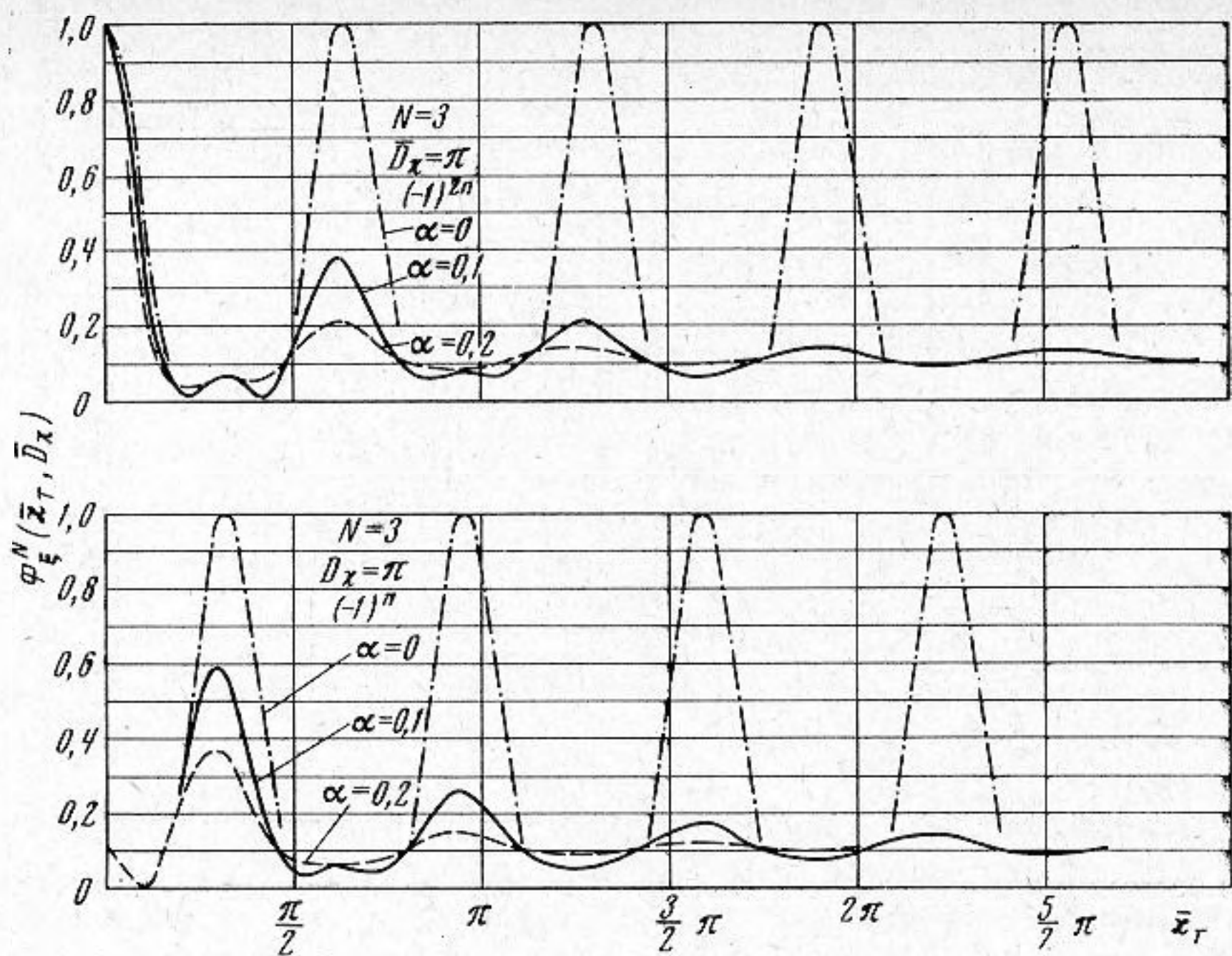
$$\Phi_\xi^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha = 0) = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^N (-1)^h (\exp i\bar{\kappa}_T \bar{D}_x)^{n-1} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2} N \bar{D}_x}{\cos^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2} \bar{D}_x}. \quad (23)$$

Аналогично для поперечной составляющей

$$\Phi_n^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta) = \frac{1}{NM} \frac{1 - \exp - \beta\bar{\kappa}_T M \bar{D}_y}{1 + \exp - \beta\bar{\kappa}_T \bar{D}_y}. \quad (24)$$

Практическая целесообразность применения четного числа элементов, соединенных с чередующейся полярностью, состоит в исключении максимума для самых малых волновых чисел. В некоторых случаях такая решетка позволяет отстроиться от низкочастотного фона.



Фиг. 3

При N — нечетном, M — нечетном.

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha) &= \frac{1}{NM} \left| \frac{1 + \exp(i - \alpha)\bar{\kappa}_T N \bar{D}_x}{1 + \exp(i - \alpha)\bar{\kappa}_T \bar{D}_x} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{NM} \frac{1 + 2 \exp - \alpha \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x + \exp - 2\alpha \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x}{1 + 2 \exp - \alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T \bar{D}_x + \exp - 2\alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для замороженной турбулентности из последнего выражения получаем (N — нечетное, $M = 1$)

$$\Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha = 0) = \frac{1}{N^2} \frac{\cos^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2} N \bar{D}_x}{\cos^2 \frac{\bar{\kappa}_T}{2} \bar{D}_x}. \quad (26)$$

Для поперечной составляющей

$$\Phi_{\eta}^M(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_y, \beta) = \frac{1}{NM} \frac{1 + \exp - \beta \bar{\kappa}_T M \bar{D}_y}{1 + \exp - \beta \bar{\kappa}_T \bar{D}_y}. \quad (27)$$

Выражения (20), (23) и (26) совпадают с полученными Майдаником [1] для описания фильтровых свойств решетки из N приемников.

Результаты расчетов представлены на фиг. 2—4. На фиг. 2 приведены фильтровые характеристики одиночного приемника при различных значе-

ниях параметра α . На фиг. 3 и 4 приведены значения функции $\Phi_{\xi}^N(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, \alpha)$ для $N=3; 6; \bar{D}_x = \pi, 2\pi$ и $\alpha = 0; 0,1; 0,2$.

Основная тенденция пространственной фильтрации процесса с дисперсией фазовой скорости совпадает с таковой для когерентного процесса. В обоих случаях увеличение N при фиксированном \bar{D}_x влияет на остроту характеристик, а увеличение \bar{D}_x — на угловой интервал между ними. Однако при возрастании α величина максимума, сохраняя свое положение, уменьшается по высоте, тем больше, чем больше $\bar{\kappa}_T$.

Для случая $\alpha = 0$ угол между двумя соседними минимумами фильтрующей функции N -элементарной решетки составляет $2\pi / \bar{\kappa}_T \bar{D}_x$ радиан. Угловой размер лепестка — $2\pi / \bar{\kappa}_T N \bar{D}_x$ радиан, ширина лепестка по половинной мощности или разрешающая способность решетки равна $2\pi / 2\bar{\kappa}_T N \bar{D}_x$ радиан. Таким образом, разрешающая способность решетки из N элементов, расположенных на расстоянии \bar{D}_x один от другого, приблизительно эквивалентна разрешающей способности сплошного приемника с той же чувствительностью $\tilde{\gamma}(\omega)$, но имеющего линейный размер $L_1 = 2N\bar{D}_x$.

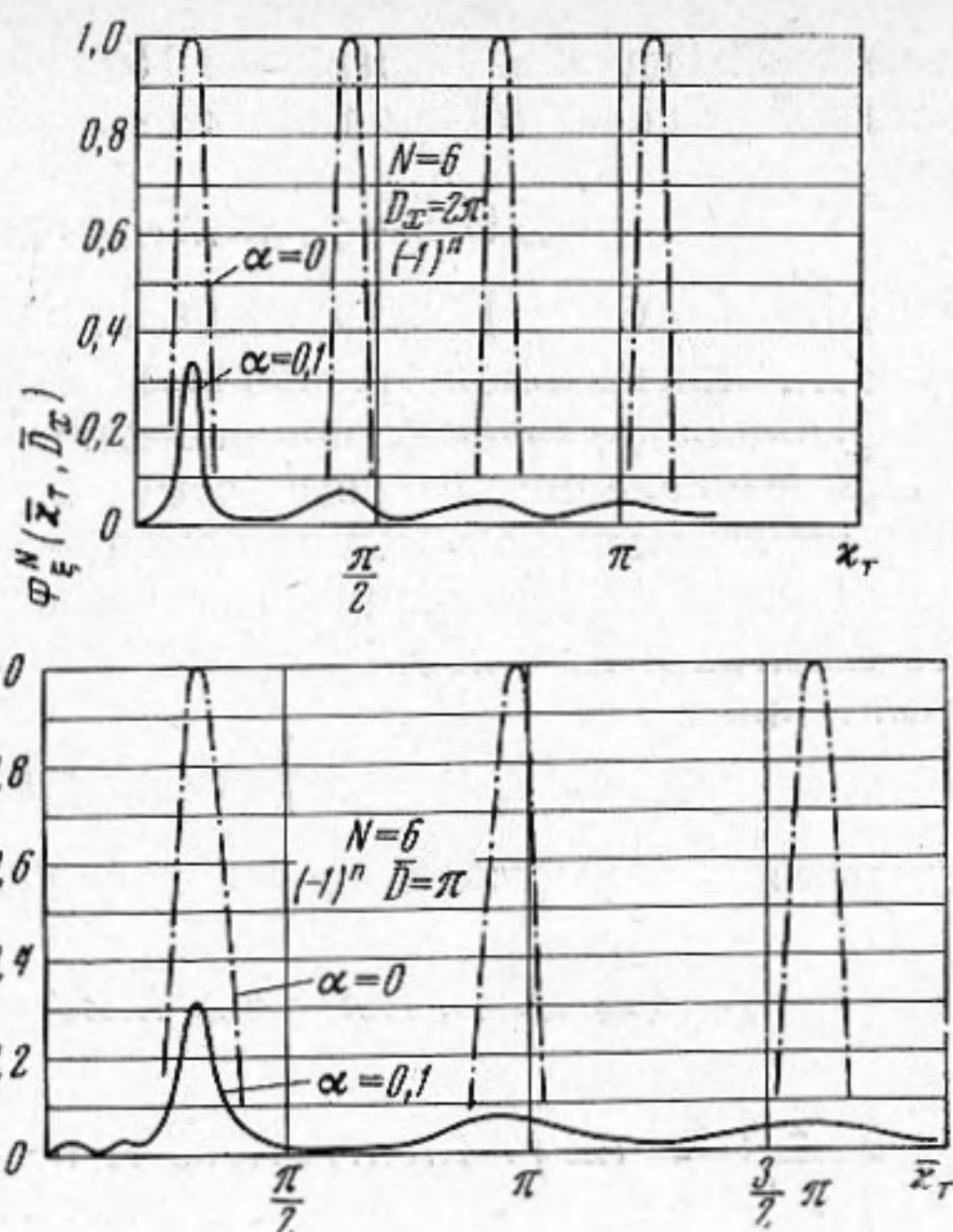
На фиг. 2 приведен пересчет фильтровой характеристики одиночного приемника с характерным размером L_1 на размер $L_1 = 2N\bar{D}_x$. Кривые a и b на фигуре относятся соответственно к

$$\chi_{\xi}^{-1} \left(\frac{\bar{\kappa}_T}{2N\bar{D}_x} \right)_{\alpha=0,1} \quad \text{и} \quad \chi_{\xi}^{-1} \left(\frac{\bar{\kappa}_T}{2N\bar{D}_x} \right)_{\alpha=0},$$

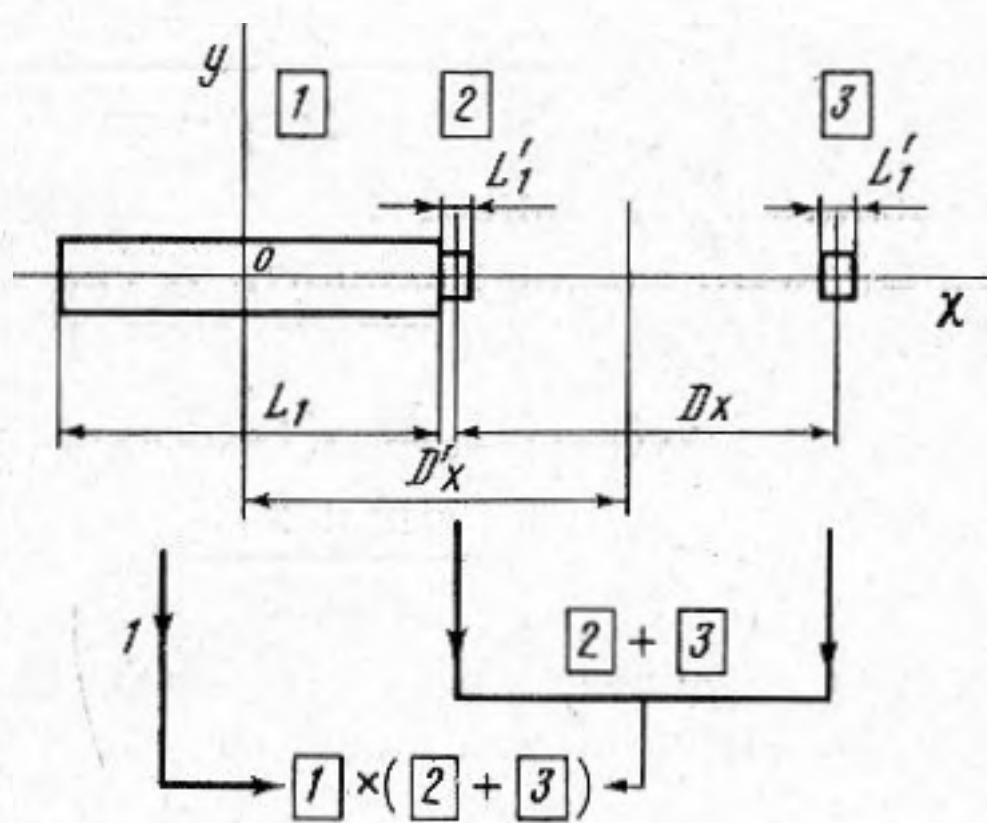
обе при $N=3, \bar{D}_x = \pi$.

Параметры фильтрующей решетки целесообразно выбирать из таких соображений, чтобы угловая ширина лепестка фильтрующей характеристики (направленности) была бы меньше выделяемого турбулентного масштаба, а интервал между соседними лепестками превышал бы размеры этого масштаба. При таком выборе на выделяемую компоненту будет направлен только один лепесток фильтровой характеристики.

Разрешающую способность фильтровой характеристики можно заметно улучшить, если вместо описанной выше схемы аддитивной решетки применить смешанную схему (фиг. 5), состоящую из протяженного приемника, выходной сигнал которого перемножается с выходным сигналом двух-



Фиг. 4



Фиг. 5

элементарной аддитивной решетки [5]. Фильтровую характеристику такой составной решетки можно написать в виде

$$\chi_{\xi}(\bar{\kappa}_T) = \chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T, L_1, \alpha) \chi_{\xi}^{2,3}(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, L_1', \alpha), \quad (28)$$

где $\chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T, L_1, \alpha)$ — фильтрующая функция одиночного приемника со стороны L_1 , описываемая уравнением (14), $\chi_{\xi}^{2,3}(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, L_1', \alpha)$ — фильтрующая функция двухэлементной решетки.

При вычислении второго сомножителя следует учесть, что средняя точка двухэлементной решетки смещена относительно середины одиночного приемника на расстояние D_x' , вследствие чего в выражении для взаимного спектра появится дополнительная задержка $\tau_{\text{смещ}} = D_x' / U_{\phi}$ и (2) примет вид

$$\gamma(\xi, \kappa_T, D_x') = \exp -\alpha \kappa_T |\xi + D_x'| \exp i\omega(\tau_{\phi} + \tau_{\text{смещ}}).$$

Подставляя это выражение в основное уравнение (8), получим

$$\begin{aligned} \chi_{\xi}^{2,3}(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, L_1', \alpha) &= \cos^2 \bar{\kappa}_T \bar{D}_x' \exp -2\alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x' \chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T, L_1') \times \\ &\times \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^2 (-1)^n [\exp(i - \alpha) \bar{\kappa}_T \bar{D}_x]^{n-1} \right|^2 = \chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T, L_1') \cos^2 \bar{\kappa}_T \bar{D}_x' \exp - \\ &- 2\alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x' \frac{1}{4} \frac{1 - 2 \exp -\alpha \bar{\kappa}_T 2\bar{D}_x \cos 2\bar{\kappa}_T \bar{D}_x + \exp -4\alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x}{1 - 2 \exp -\alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x \cos \bar{\kappa}_T \bar{D}_x + \exp -2\alpha \bar{\kappa}_T \bar{D}_x}. \end{aligned} \quad (29)$$

Предполагая, что приемники, входящие в состав двухэлементной решетки малы $L_1' \ll L_1$, можно положить $\chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T, L_1') \approx 1$. С учетом этого замечания для замороженной турбулентности решение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} \chi_{\xi}(\bar{\kappa}_T) |_{\alpha=0} &= \chi_{\xi}^1(\bar{\kappa}_T, L_1) |_{\alpha=0} \chi_{\xi}^{2,3}(\bar{\kappa}_T, \bar{D}_x, L_1') |_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\sin^2 \kappa_T L_1 / 2}{(\kappa_T L_1 / 2)^2} \cos^2 \kappa_T D_x' \frac{\sin^2 D_x \kappa_T}{\sin^2 D_x \kappa_T / 2}. \end{aligned}$$

Предполагая далее, что $L_1 \approx D_x' \approx D_x$, получим выражение для фильтрующей функции составной решетки

$$\chi_{\xi}(\bar{\kappa}_T) = \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} \cos^2 \psi \cos^2 2\psi = \frac{\sin^2 4\psi}{(4\psi)^2}, \quad (30)$$

где

$$\psi = \frac{\kappa_T L_1}{2}.$$

Таким образом, фильтрующая функция составной решетки представляет собой произведение трех сомножителей: фильтровых характеристик одиночного протяженного элемента и двухэлементной аддитивной решетки, а также множителя, характеризующего взаимодействие составных частей системы. Преимущество применения составной схемы состоит в возможности получения однолепестковой характеристики.

Очевидно, что в результате линейных операций над взаимным спектром (1), приводящих к установлению компонент частотно-волнового спектра (19), (22) и (25), не возникает никакой новой информации о структуре турбулентности в области малых волновых чисел. В этом смысле несовершенства, присущие взаимному спектру (1), полностью передаются результату, получаемому на его основе. Вместе с тем в сравнении с результатами работы [1] решения (19), (22), (25) лучше отражают основные тенденции, ожидаемые при экспериментальном осуществлении фильтрации

пространственных частот реальной турбулентности. При сопоставлении расчетов с экспериментом следует иметь в виду, что фильтровые свойства решетки весьма критичны к нарушению идентичности входящих в нее элементов и нестабильности фазовой задержки в передающих цепях. Следует также учитывать, что теоретические рассуждения построены в предположении, что на выходе решетки включен фильтр временных частот с единичной полосой пропускания ω_0 . В реальных условиях применяются фильтры с полосой пропускания $\Delta\omega$, причем ширина этой полосы не изменяется при изменении остроты пространственной фильтрации. Это обстоятельство само по себе приводит к отклонению измеренных характеристик от расчетных даже в случае замороженной турбулентности (отклонение от временной когерентности) и, конечно, особенно существенно для реальной турбулентности.

Разрешающая способность решетки, особенно различимость максимума, может зависеть также от энергетического уровня хорошо коррелированного по пространству шумового фона.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Maidanik, D. W. Jorgensen. Boundary wave-vector filters for the study of the pressure field in a turbulent boundary layer, J. Akoust. Soc. America, 1967, 42, 2, 494—501.
2. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики, М., «Наука», 1970.
3. В. С. Петровский. Осреднение турбулентных пульсаций давления приемником звука со случайным распределением чувствительности. Акуст. ж., 1973, 19, 3, 404—410.
4. G. M. Coreos. Resolution of pressure in turbulence, J. Akoust. Soc. America, 1963, 35, 192—199.
5. Ко Гзиенг Чинг. Антенны радиотелескопов. В кн.: Сканирующие антенные системы СВЧ, ч. I, М., «Сов. радио», 1966.

Поступила
17 ноября 1971 г.