АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

УДК 534.26

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИЗГИБНО-КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНОЙ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ИМПЕДАНЦНЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

В. Н. Романов

Рассматривается задача об излучении звука пластиной с полубесконечным импеданцным препятствием при падении на него плоской волны изгиба. Получено выражение для звукового давления в дальнем поле.

Рассмотрим излучение звука бесконечной пластиной, соприкасающейся с жидкостью одной стороной при $z \geqslant 0$ (фиг. 1). На пластине по оси y при $y \leqslant 0$ расположено полубесконечное препятствие бесконечно малой толщины, на которое падает плоская изгибная волна с колебательной скоростью

$$\dot{w} = \dot{w}_0 e^{-i\omega t - ik_u y \cos\Psi + ik_u x \sin\Psi}, \tag{1}$$

где k_u — волновое число изгибной волны в пластине с учетом влияния жидкости (временной экспоненциальный множитель в дальнейшем опускается). Решение задачи будем искать в виде потенциала скорости $\varphi(x, y, z)$, который представим как сумму двух потенциалов:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z). \tag{2}$$

Составляющая φ_1 является решением задачи при отсутствии препятствия на пластине, φ_2 обусловлено наличием препятствия. Потенциал скорости φ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца в жидкости

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0 \quad (z \geqslant 0), \tag{3}$$

дифференциальному уравнению изгибных колебаний пластины с учетом жидкости на всей поверхности пластины, кроме линии контакта препятствия с пластиной

$$\frac{\partial}{\partial z}\nabla^4\varphi - k_0^4\frac{\partial}{\partial z}\varphi + q_0^5\varphi = 0 \quad (z \geqslant 0), \tag{4}$$

и условиям непрерывности смещений, углов поворотов, перерезывающих сил и изгибающих моментов на линии контакта препятствия с пластиной:

$$\varphi_z'\big|_{x-0} = \varphi_z'\big|_{x+0}, \tag{5}$$

$$\varphi_{xz}''\big|_{x-0} = \varphi_{xz}''\big|_{x+0}, \tag{6}$$

$$[\varphi_{zxxx}'''' + \varphi_{zxyy}'''']_{x-0} - [\varphi_{zxxx}'''' + \varphi_{zxyy}'''']_{x+0} = -\frac{i\omega}{D}Z_{\text{ф}}\varphi_z'\big|_{x=0}, \tag{7}$$

$$[\varphi_{zxx}''' + \nu\varphi_{zyy}']_{x-0} - [\varphi_{zxx}''' + \nu\varphi_{zyy}']_{x+0} = \frac{i\omega Z_{\text{м}}}{D}\varphi_{xz}''\Big|_{x=0}, \tag{8}$$

и вне линии контакта:

$$\varphi_z'\big|_{y-0} = \varphi_z'\big|_{y+0}, \quad x = 0; \tag{9}$$

$$\varphi_{xz}''|_{x-0} = \varphi_{xz}''|_{x+0}, \tag{10}$$

$$\varphi_{yz}''|_{y-0} = \varphi_{yz}''|_{y+0}, \quad x = 0; \tag{11}$$

$$[\varphi_{zxxx}'''' + \varphi_{zxyy}'''']_{x-0} - [\varphi_{zxxx}'''' + \varphi_{zxyy}'''']_{x+0} = 0, \tag{12}$$

$$[\varphi_{zxx}''' + \nu\varphi_{zyy}']_{x-0} - [\varphi_{zxx}''' + \nu\varphi_{zyy}']_{x+0} = 0. \tag{13}$$

Здесь приняты следующие обозначения: k — волновое число в жидкости, $q_0^5 = \omega^2\rho / D$, ρ — плотность жидкости, D — цилиндрическая жесткость пластины, k_0 — волновое число изгибных волн в пластине, помещенной в вакуум, Z_F и Z_M — механические импеданцы препятствия на единицу длины по отношению к поперечной силе и изгибающему моменту, действующих на ребро со стороны пластины, ν — коэффициент Пуассона. Штрихи означают дифференцирование по координатам, которые составляют нижние индексы потенциала; индексы $x \pm 0$ и $y \pm 0$ определяют направление подхода к препятствию по соответствующей координате.

Из условий (3) и (4), учитывая, что $\dot{w} = -\partial\varphi_1 / \partial z$, находим

$$\varphi_1 = \frac{\dot{w}}{\sqrt{k_u^2 - k^2}} e^{-ik_u y \cos\Psi + ik_u x \sin\Psi - \sqrt{k_u^2 - k^2}\, z}. \tag{14}$$

Потенциал φ_2 мы представим в виде двухмерного интеграла Фурье:

$$\varphi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta, \lambda)\, e^{i\eta y + i\lambda x - z\sqrt{\lambda^2 - k^2 + \eta^2}}\, d\eta\, d\lambda, \tag{15}$$

при этом ветвь корня должна фиксироваться таким образом, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2 - k^2 + \eta^2} \geqslant 0$.

Для определения вида функции $\varphi_2(\eta, \lambda)$ наложим на потенциал φ_2 условие (4); в результате мы получим следующее соотношение:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta, \lambda) \{\sqrt{\lambda^2 - k^2 + \eta^2}\, [(\lambda^2 + \eta^2)^2 - k_0^4] - q_0^5\} e^{i\lambda x + i\eta y}\, d\eta\, d\lambda = 0.$$

В силу произвольности x и y это равенство имеет место, если подынтегральная функция не обладает особенностями на комплексных плоскостях λ и η, т. е. является некоторым полиномом от λ и η. Из требований непрерывности смещений и углов поворотов препятствия и пластины (5), (6), (9) и (10) следует, что полином не содержит членов со степенями выше первой; тогда $\varphi_2(\eta, \lambda)$ принимает вид

$$\varphi_2(\eta, \lambda) = \frac{C_0 + C_1\lambda + C_2\eta + C_3\lambda\eta}{\sqrt{\lambda^2 - k^2 + \eta^2}\, [(\lambda^2 + \eta^2)^2 - k_0^4] - q_0^5}. \tag{16}$$

Отметим, что из условий непрерывности смещений и углов поворота по оси x вне линии контакта препятствия и пластины следует, что $\varphi_{2,z}' \equiv 0$ и $\varphi_{2,yz}'' \equiv 0$ при $x = 0$ и $y \geqslant 0$.

Для нахождения неизвестных C_0, C_1, C_2, C_3 следует использовать условия (7), (8), (10) и (11). При подстановке в эти условия выражения (2) с учетом формул (12) — (14) приходим к соотношениям вида:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} L_1(\eta, \lambda)\, e^{i\eta y}\, d\lambda\, d\eta = e^{-ik_u y \cos\Psi}, \text{ при } y < 0, \tag{17}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} L_1(\eta, \lambda)\, e^{i\eta y}\, d\lambda\, d\eta = 0, \qquad \text{при } y > 0, \tag{18}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} L_2(\eta,\lambda)\, e^{i\eta y}\, d\lambda\, d\eta = e^{-ik_u y \cos\Psi} \qquad \text{при } y<0, \tag{19}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} L_2(\eta,\lambda)\, e^{i\eta y}\, d\lambda\, d\eta = 0, \qquad \text{при } y>0, \tag{20}$$

где $L_1(\eta, \lambda)$ и $L_2(\eta, \lambda)$ — некоторые функции, зависящие от $\varphi_2(\eta, \lambda)_{x\pm 0}$, Z_F, Z_M, λ^n и η^m $(n=0, 1, 2;\ m=0, 2)$.

Из формул (17) — (20) следует, что результаты интегрирования по переменной λ можно представить в виде функций от переменной η, имеющих в нижней полуплоскости η полюс $\eta_0 = -k_u \cos\Psi$ и регулярной на остальной части плоскости η.

Таким образом, раскрывая вид функций L_1 и L_2, имеем:

$$\begin{aligned} &i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta,\lambda)\lambda^3\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\, d\lambda\big|_{x=0} - i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta,\lambda)\lambda^3\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\, d\lambda\big|_{x+0} = \\ &= -\varkappa_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta,\lambda)\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\, d\lambda - (2\pi)^2\frac{\varkappa_0 \dot{w}_0}{\eta+k_u\cos\Psi}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta,\lambda)\lambda^2\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\, d\lambda\big|_{x-0} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta,\lambda)\lambda^2\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\, d\lambda\big|_{x+0} = \\ &= \varkappa_2 i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\eta,\lambda)\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\, d\lambda - \frac{(2\pi)^2\varkappa_3}{\eta+k_u\cos\Psi}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\varkappa_0 = i\omega Z_F / D$; $\varkappa_1 = -\varkappa_0 / 2\pi i$; $\varkappa_2 = i\omega Z_M / D$; $\varkappa_3 = -k_u \sin\Psi\, \varkappa_2 / 2\pi$.

Вычисления интегралов с индексами $x+0$ $(x-0)$ можно свести к интегралам по контурам $\Gamma_+(\Gamma_-)$, охватывающим все особенности подынтегральных функций, лежащие выше (ниже) вещественной оси.

Подставляя в соотношения (21) и (22) выражение (16), получаем

$$C_0 + C_2\eta = H_0(\eta) = -\frac{\alpha k_0^3 \dot{w}_0}{(\eta+k_u\cos\Psi)\,[i\cdot 2I_{+3}(\eta)+\alpha\beta^{3/2}I_{+0}(\eta)]}; \tag{23}$$

$$C_1 + C_3\eta = H_1(\eta) = -\frac{\dot{w}_0\delta q_1 \sin\Psi\cdot k_0^3/\beta/k}{(\eta+k_u\cos\Psi)\,[i\cdot 2I_{+3}(\eta)+\delta\beta^{1/2}I_{+2}(\eta)]}, \tag{24}$$

где $\beta = \dfrac{k_0^2}{k^2} = \dfrac{f_{\text{гр}}}{f}$ $\alpha = iZ_F / Z_{0F}$, $\delta = iZ_M / Z_{0M}$, $Z_{0F} = Dk_0^3 / \omega$, $Z_{0M} = Dk_0 / \omega$ — характеристические импеданцы пластины по отношению к силе и моменту, $q_1 = k_u / k$ — безразмерная величина полюса на вещественной оси, определяемая из знаменателя выражения (16) при учете соотношения $k_u^2 = \lambda^2 + \eta^2$. В ряде практических случаев q_1 с достаточной точностью описывается следующим выражением:

$$q_1 = \sqrt{\beta}\,\sqrt[4]{1+b\sqrt{\beta}},$$

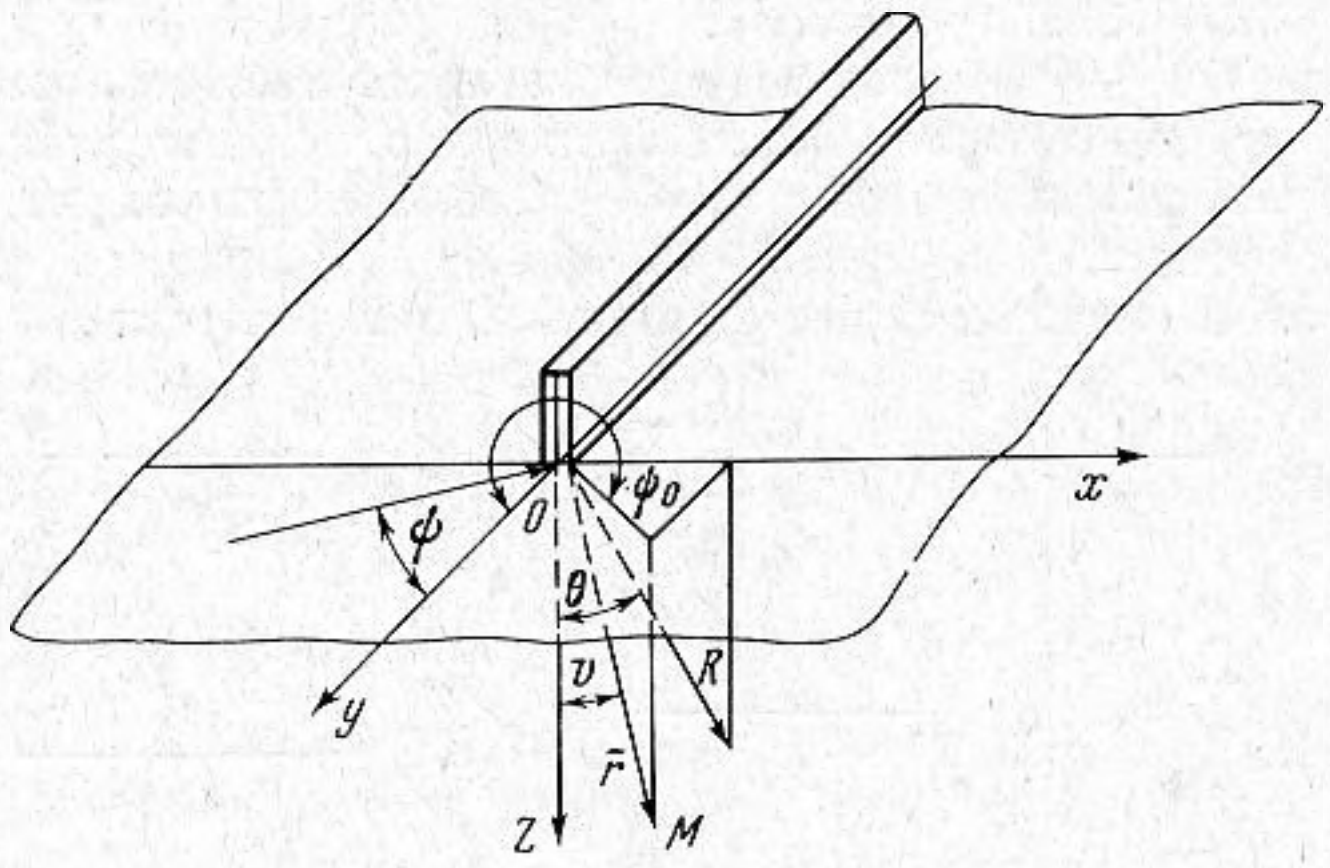
где $b = \rho c_{\text{п}} / \sqrt{3}\rho_0 c$, $c_{\text{п}}$, ρ_0 и c и ρ — скорости продольных волн и плотности

пластины и жидкости соответственно. Функции $I_{+n}(\eta)$ определяются как

$$I_{+n}(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{\xi^n\sqrt{\xi^2-1+\varepsilon^2q_1^2}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1+\varepsilon^2q_1^2}\,[(\xi^2+\varepsilon^2q_1^2)^2-\beta^2]-b\beta^3},$$

где $\xi=\lambda/k$ и $\varepsilon=\eta/(kq_1)$.

Индексы у функций $I_{+n}(\eta)$ указывают, что эти функции вычисляются в верхнем полупространстве плоскости λ. Можно показать [1], что $I_{+3}(\eta)=1/2$. Функции $I_{+0}(\eta)$ и $I_{+2}(\eta)$ определяются путем расчетов на



Фиг. 1*

ЭВМ, однако при $\beta\gg1$ (низкие частоты) их можно удовлетворительно аппроксимировать следующими зависимостями:

$$I_{+0}(\eta)\approx R_0[1/\sqrt{1-\varepsilon^2}+i/2/(1+\varepsilon^2)^{1/2}],$$
$$I_{+2}(\eta)\approx R_2[\sqrt{1-\varepsilon^2}-i(1+\varepsilon^2)^{1/2}],$$

при условиях $\operatorname{Im}\varepsilon=0$ и $|\varepsilon|<1$. Здесь

$$R_0=\frac{q_1^2-1}{q_1(5q_1^4-4q_1^2-\beta^2)},\qquad R_2=\frac{(q_1^2-1)q_1}{5q_1^4-4q_1^2-\beta^2}.$$

Таким образом, с учетом соотношений (23) и (24) решение задачи принимает вид

$$\varphi_2=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\eta\,\frac{e^{i\eta y}}{\eta+k_u\cos\Psi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[H_0(\eta)+H_1(\eta)]e^{i\lambda x-z\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}}\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}\,[(\lambda^2+\eta^2)^2-k_0^4]-q_0^5}.\quad(25)$$

Вычислим потенциал φ_2 на больших удалениях от ребра по сравнению с длиной волны в жидкости при $\beta\gg1$. Внутренний интеграл по переменной λ можно свести к интегралу по перевальному пути и к вычету в полюсе $\lambda_0=\sqrt{k^2q_1^2-\eta^2}=k\sqrt{q_1^2-\varepsilon^2}$, находящемся на вещественной оси λ. В полюсе выражение $\sqrt{\lambda_0^2-k^2+\eta^2}=k\sqrt{q_1^2-1}\gg1$ и вклад полюса в результат интегрирования будет экспоненциально убывать по оси y. Вклады других полюсов на плоскости λ будут убывать еще быстрее из-за наличия мнимой части в каждом полюсе. Поэтому основной вклад в величину внутреннего интеграла дает результат вычисления по перевальному пути. Введем систему координат в плоскости, совпадающей или параллельной плоскости xoz: $x=R\sin\theta$, $z=R\cos\theta$, и перейдем к новой переменной интегрирования $\lambda=k_\eta\sin\tau$, $k_\eta^2=k^2-\eta^2$; тогда $\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}=-ik_\eta\cos\tau$; $i\lambda x-z\sqrt{\lambda^2-k^2+\eta^2}=ik_\eta R\cos(\theta-\tau)$. Точкой перевала является $\tau_п=\theta$.

* Вместо ψ, ψ_0 читать Ψ и Ψ_0.

Внешний интеграл по переменной η также можно свести к вычету в полюсе $\eta_0 = -k_u \cos\Psi$ и к интегралу по перевальному пути. При этом вводится новая система координат (см. фиг. 1), в которой $y = r\sin\vartheta\cos\Psi_0$, $R = \sqrt{r^2 - y^2} = r\sqrt{1 - \sin^2\vartheta\cos^2\Psi_0}$, и осуществляется переход к новой переменной $\eta = k\sin\vartheta\cos\varkappa$; $k_\eta = \sqrt{k^2 - \eta^2} = k\sqrt{1 - \sin^2\vartheta\cos^2\varkappa}$, $i\eta y + ik_\eta R = ikr(\sin^2\vartheta\cos\varkappa\cos\Psi_0 + \sqrt{1 + \sin^2\vartheta\cos^2\varkappa}\sqrt{1 - \sin^2\vartheta\cos^2\Psi_0})$. Из производной последнего выражения по переменной $\varkappa$ находится точка перевала $\varkappa_п = \Psi_0$. В общем случае полюс $\eta_0 = k_u\cos\Psi = -kq_1\cos\Psi$ может совпасть при определенных условиях с точкой перевала, в которой $\eta_п = k\sin\vartheta\cos\Psi_0$; тогда необходимо использовать при вычислении интеграла по перевальному пути специальный прием [2], который приводит к интегралам Френеля. При этом направление на точку наблюдения определяется углом $\Psi_{0,\,гр} = \pm[\pi - \arccos(q_1\cos\Psi / \sin\vartheta)]$. На частотах ниже граничной частоты ($\beta \gg 1$ и $q_1 \gg 1$) это равенство будет иметь смысл, если $q_1\cos\Psi / \sin\vartheta \leqslant 1$, т. е. угол падения изгибной волны на ребро должен быть близок к углу нормального падения ($\Psi = \pi/2$).

Результаты анализа взаимного расположения точки перевала Ψ_0, полюса, перевального пути и пути интегрирования показывают, что при $\Psi_0 > \Psi_{0,\,гр}$ полюс попадает в область плоскости $\varkappa$, ограниченную перевальным путем и путем интегрирования, а при $\Psi_0 < \Psi_{0,гр}$ выходит из этой области. Ограничимся вычислением поля излучения вне направления $\Psi_{0,\,гр}$. Тогда, следуя работе [2], на больших удалениях от ребра можно воспользоваться обычным методом перевала, поскольку в этом случае полюс будет достаточно удален от точки перевала. Учитывая, что $P_2 = \rho\partial\varphi_2 / \partial t$, мы получаем окончательное выражение для звукового давления, обусловленного наличием на пластине препятствия:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{выч} + P_{пер} && при \quad \Psi_0 > \Psi_{0,\,гр}, \\ P_2 &= P_{пер} && при \quad \Psi_0 < \Psi_{0,\,гр}, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$P_{пер} = \frac{i\rho c\cos\theta(1 - \sin^2\vartheta\cos^2\Psi_0)^{1/2}\dot{w}_0}{2krb\beta^{3/2}(\sin\vartheta\cos\Psi_0 + q_1\cos\Psi)} \times$$

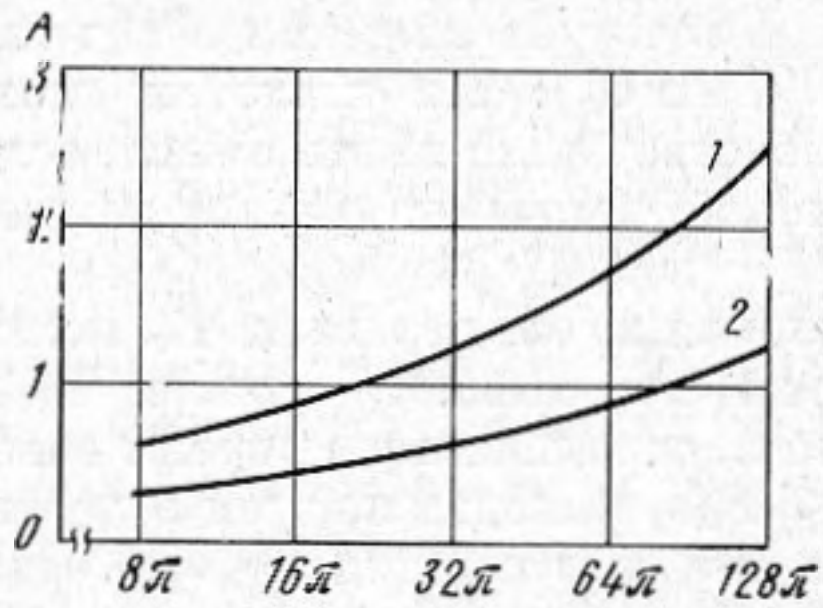
$$\times \frac{\left[\gamma(\eta_п) + \frac{q_1}{\beta}\sin\theta\sin\Psi\,\xi(\eta_п)\sqrt{1 - \sin^2\vartheta\cos^2\Psi_0}\right]e^{ikr}}{\left\{1 - i\frac{1}{b\beta}\cos\theta\sqrt{1 - \sin^2\vartheta\cos^2\Psi_0}\left[1 - \frac{1}{\beta^2}(\sin^2\vartheta\cos^2\Psi_0\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2\right]\right\}}; \tag{27}$$

$$P_{выч} = -\frac{\rho c\cos\theta\,|1 - q_1^2\cos^2\Psi|^{1/4}\dot{w}_0\left[\gamma(\eta_0) + \frac{q_1}{\beta}\sin\theta\sin\Psi\cdot\xi(\eta_0)\sqrt{1 - q_1^2\cos^2\Psi}\right]}{\sqrt{2\pi kR}\,b\beta^{3/2}\left\{1 - i\frac{\cos\theta}{b\beta}\sqrt{1 - q^2\cos\Psi}\times\left[1 - \frac{1}{\beta^2}(\sin^2\theta + q_1^2\cos^2\Psi\cos^2\theta)\right]\right\}} \times$$

$$\times \frac{e^{ikR\sqrt{1 - q_1^2\cos^2\Psi} - ikq_1 y\cos\Psi - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kR}\,b\beta^{3/2}\left\{1 - i\frac{\cos\theta}{b\beta}\sqrt{1 - q_1^2\cos\Psi}\left[1 - \frac{1}{\beta^2}(\sin^2\theta + q_1^2\cos^2\Psi\cos^2\theta)^2\right]\right\}}, \tag{28}$$

где $\gamma(\eta) = \dfrac{\alpha}{i + \alpha\beta^{3/2}I_{+0}(\eta)}$, $\quad \xi(\eta) = \dfrac{\delta}{i + \delta\beta^{1/2}I_{+2}(\eta)}$.

Проанализируем полученные выражения для звукового давления. Звуковое поле в жидкости, обусловленное рассеянием изгибной волны на препятствии, состоит из двух компонент. Первая компонента (27) существует во всем пространстве излучения и представляет собою сферическую волну, расходящуюся от начала препятствия. При стремлении точки наблюдения к оси y ($\Psi_0 \to 0, \pi$; $\vartheta \to \pi / 2$) величина этой компоненты стремится к нулю. Вторая компонента (28) существует лишь в той части пространства, которая примыкает к полубесконечному препятствию и представляет собою две плоские волны, распространяющиеся от препятствия под углами $\pm(\pi - \Psi)$, в пределах $\pm(\pi - \Psi_{0,\,гр})$ в сторону положительных и отрицательных значений x. Эти волны имеют те же величины амплитуд и направления распространения, что и в случае падения плоской изгибной волны на препятствие бесконечной длины. Амплитуды волн во второй компоненте поля излучения убывают в пространстве излучения по цилиндрическому закону.



Фиг. 2

Проанализируем относительные вклады в акустическое поле пластины этих компонент излучения. Рассмотрим отношение $A = |P_{пер}| / |P_{выч}|$ в случае низких частот ($\beta \gg 1$) для точек наблюдения, расположенных при $\Psi_0 > \Psi_{0,\,гр}$. Анализ показывает, что в этом случае величина A не зависит от импеданцев препятствия и является функцией только координат точки наблюдения.

На фиг. 2 представлены результаты расчета величины A при нормальном угле падения изгибной волны на препятствие ($\Psi = \pi / 2$) и для точек наблюдения, расположенных в плоскости препятствия. Кривая *1* рассчитана для $|ky| = \pi$, кривая *2* — для $|ky| = 2\pi$.

Из сопоставления кривых следует, что вблизи начала препятствия вклад компоненты акустического излучения, убывающей по сферическому закону, может существенно превышать вклад компоненты, убывающей по цилиндрическому закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Романов. Излучение *Т*-образного соединения пластин при наличии диффузного поля изгибных волн. Акуст. ж., 1969, **15**, 2, 275—283.
2. В. Нобл. Метод Винера – Хопфа, М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила
30 мая 1972 г.