АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 5

УДК 534.222.2

# ОБ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ И СИЛАХ ТРЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРОФИЛЯ ЧАПЛЫГИНА

*Е. Д. Сорокодум*

Рассмотрено акустическое течение в пограничном слое симметричного профиля Чаплыгина при колебании жидкости вдали от профиля вдоль оси симметрии профиля. Направление, форма и расположение акустических течений хорошо подтверждаются экспериментально. Показано, что акустические течения вызывают в пограничном слое вязкостные сдвиговые напряжения, результирующая которых отлична от нуля и направлена вдоль оси симметрии профиля. Определена зависимость результирующей силы от параметров, определяющих геометрию профиля.

Известно, что вокруг тела, помещенного в осциллирующую жидкость, возникают своеобразные вторичные течения (акустические течения), захватывающие всю жидкость и имеющие при этом установившийся характер. Достаточно полно изучены акустические течения около кругового цилиндра [1]. В работе [2] рассмотрены акустические течения, возникающие около профиля Жуковского. При этом показано, что течения не имеют той симметрии, которая наблюдается около кругового цилиндра, и вследствие этого на тело действует не известная ранее постоянная во времени сила. Ниже мы исследуем акустические течения, возникающие около малоизученного в этом плане профиля Чаплыгина, и соответственные силы.

Пусть бесконечный цилиндр, имеющий в нормальном сечении форму симметричного профиля Чаплыгина, помещен в несжимаемую маловязкую жидкость, совершающую малые гармонические колебания вдоль оси симметрии профиля. Для исследования течений в пограничном слое введем жестко связанную с поверхностью профиля систему криволинейных ортогональных координат, ось $x$ которой направим вдоль линии контура, а ось $y$ — перпендикулярно профилю. Составляющие скорости вдоль осей $x$ и $y$ обозначим соответственно через $u$ и $v$. На внешней границе пограничного слоя скорость $u$ переходит в скорость $U(x, t)$ внешнего потенциального течения.

Пусть скорость потенциального потока на внешней границе пограничного слоя, которая с известным приближением может быть заменена распределением скорости на поверхности профиля, равна $U_0(x)$; тогда при гармоническом колебании потока с частотой $\omega$ скорость потенциального течения будет изменяться по закону $U(x, t) = U_0(x) \cos \omega t$. Исследуем течения для случая больших чисел Рейнольдса. Для расчета пограничного слоя можно воспользоваться уравнением нестационарного пограничного слоя [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где $\nu = \mu / \rho$ — кинематическая вязкость жидкости; $\mu$ — динамическая вязкость; $\rho$ — плотность жидкости. Граничными условиями будут $u = v = 0$ при $y = 0$, $u = U(x, t)$ при $y \to \infty$. Рассматриваемая задача имеет известное решение, полученное с помощью способа последовательных приближений [1]. Решение первого приближения для функции тока и компонент скорости имеет вид:

$$\Psi_1 = (\nu / \omega)^{1/2} U_0 [\zeta_{1r} \cos \omega t - \zeta_{1i} \sin \omega t],$$

$$u_1 = U_0 [\zeta_{1r}' \cos \omega t - \zeta_{1i}' \sin \omega t], \tag{1}$$

$$v_1 = -(\nu/\omega)^{1/2} \frac{\partial U_0}{\partial x} [\zeta_{1r} \cos \omega t - \zeta_{1i} \sin \omega t],$$

$$\zeta_{1r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\bar{y}/\sqrt{2}} (\cos \bar{y}/\sqrt{2} - \sin \bar{y}/\sqrt{2}) + \bar{y},$$

$$\zeta_{1i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\bar{y}/\sqrt{2}} (\cos \bar{y}/\sqrt{2} + \sin \bar{y}/\sqrt{2}),$$

где $\Psi_1$, $u_1$, $v_1$ — функция тока и компоненты скорости первого приближения, $\bar{y} = y / (\nu / \omega)^{1/2}$ — безразмерная координата по нормали к контуру профиля, измеряемая в единицах характеристической толщины акустического пограничного слоя $(\nu / \omega)^{1/2}$. Решение второго приближения для функции тока и компонент скорости имеет вид:

$$\Psi_2 = \frac{1}{\omega} (\nu/\omega)^{1/2} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} [\zeta_{2a} e^{2i\omega t} + \zeta_{2b}],$$

$$u_2 = \frac{1}{\omega} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} [\zeta_{2a}' e^{2i\omega t} + \zeta_{2b}'], \tag{2}$$

$$v_2 = -\frac{1}{\omega} (\nu/\omega)^{1/2} \left[ U_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 \right] [\zeta_{2a} e^{2i\omega t} + \zeta_{2b}],$$

$$\zeta_{2a} = \frac{1+i}{4} e^{-(1+i)\bar{y}} + \frac{i}{2} \bar{y} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{y}} - \frac{1+i}{4},$$

$$\zeta_{2b} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\,\bar{y}} - \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\bar{y}}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\bar{y}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\, e^{-\frac{\bar{y}}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\bar{y}}{\sqrt{2}} -$$

$$- \frac{\bar{y}}{2} e^{-\frac{\bar{y}}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\bar{y}}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4} \bar{y} + \frac{13}{4\sqrt{2}},$$

где $i = \sqrt{-1}$.

В решении второго приближения физический смысл имеет только вещественная часть комплексной величины $\zeta_{2a} \cdot e^{2i\omega t}$. Второе приближение, таким образом, содержит периодическую часть с частотой $2\omega$ и стационарную часть.

При определении решения первого приближения для течения в пограничном слое профиля необходимо воспользоваться известным выражением для скорости потенциального потока, обтекающего симметричный профиль Чаплыгина при нулевом угле атаки [4]

$$U_0 = U_\infty \frac{2m \cdot \sin \varphi}{\sqrt{(a^2 - m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{3}$$

где $U_\infty = s\omega$ — амплитуда скорости потока, невозмущенного телом вдоль оси симметрии профиля, $s$ — амплитуда колебания частиц жидкости вдали

от тела вдоль оси симметрии профиля. В прямоугольных координатах $\xi$ и $\eta$, в которых ось $\xi$ совмещена с осью симметрии профиля, уравнения контура симметричного профиля Чаплыгина, полученного конформным преобразованием круга радиуса $R$, в параметрической форме имеют вид [4]:

$$\xi = R(\cos\varphi - \varepsilon)\left[1 + \frac{a^2}{m}\right], \tag{4}$$

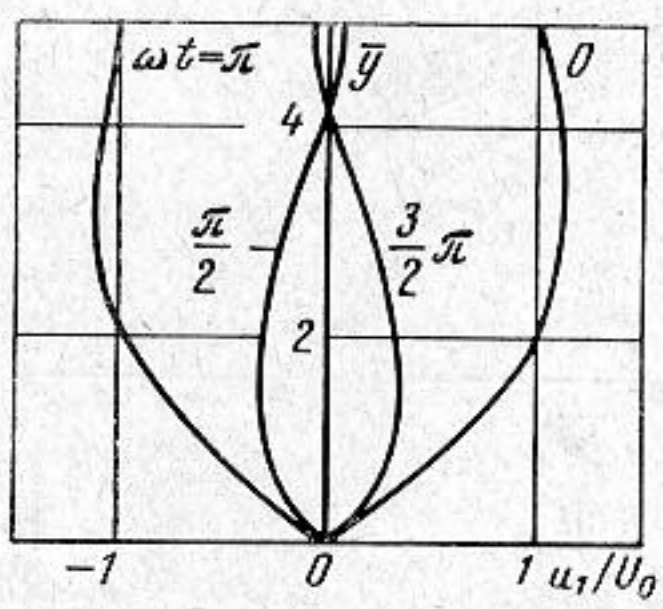
$$\eta = R\sin\varphi\left[1 - \frac{a^2}{m}\right], \tag{5}$$

где $\varphi$ — параметрическая переменная, $m = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\varphi$, $a$ и $\varepsilon$ — некоторые постоянные, характеризующие геометрию профиля, причем $a+\varepsilon<1$.

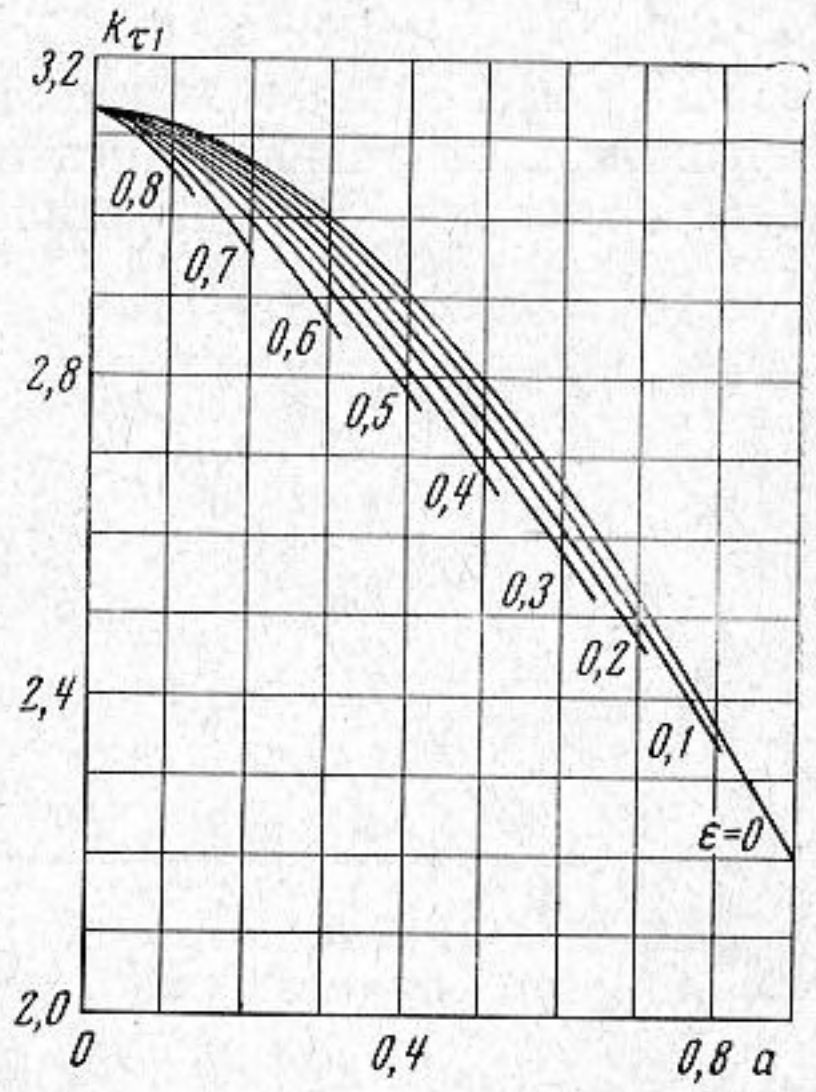
Дифференциал дуги контура профиля соответственно будет

$$dx = \frac{R}{m}\sqrt{(a^2 - m)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}. \tag{6}$$

Компонента скорости $u_1$ может быть теперь определена из уравнения (1) с




Фиг. 1




Фиг. 2

учетом формулы (3). На фиг. 1 показаны временные изменения скорости $u_1 / U_0$ для различных значений $\omega t$. Движение первого порядка представляет собой быстрозатухающие сдвиговые волны с частотой $\omega$ и в определенных местах пограничного слоя в известный момент времени скорость даже больше, чем максимальная скорость потенциального течения.

Течения в пограничном слое, как известно, создают на поверхности цилиндра вязкостные касательные напряжения:

$$\tau = \mu(\partial u / \partial y)_{y=0},$$

результирующая которых вдоль оси $\xi$ на отрезке цилиндра длиной $b$ будет $Q_\tau = b\oint \tau\cos(\tau, \xi)\,dx$. Введем безразмерный коэффициент сопротивления трения $C_\tau$. Для этого примем, что $Q_\tau = C_\tau F_0 \dfrac{\rho U_\infty^2}{2}$, где $F_0 = b\cdot L$ — характеристическая площадь, $L$ — длина хорды профиля, определяемая как $L = \xi_{\varphi=0} - \xi_{\varphi=\pi} = 2R\left[1 + \dfrac{a^2}{1-\varepsilon^2}\right]$, $\cos(\tau, \xi)$ — косинус угла между положительными направлениями $\tau$ и $\xi$. Тогда

$$C_\tau = \frac{2\mu}{L\rho U_\infty^2}\oint\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\cdot\cos(\tau, \xi)\,dx. \tag{7}$$

Подставив значение градиента скорости $u_1$ при $y = 0$ в формулу (7) и заменив $\cos(\tau, \xi)\,dx = d\xi / dx dx = d\xi / d\varphi d\varphi$, мы получим выражение для ко-

эффициента сопротивления трения первого порядка

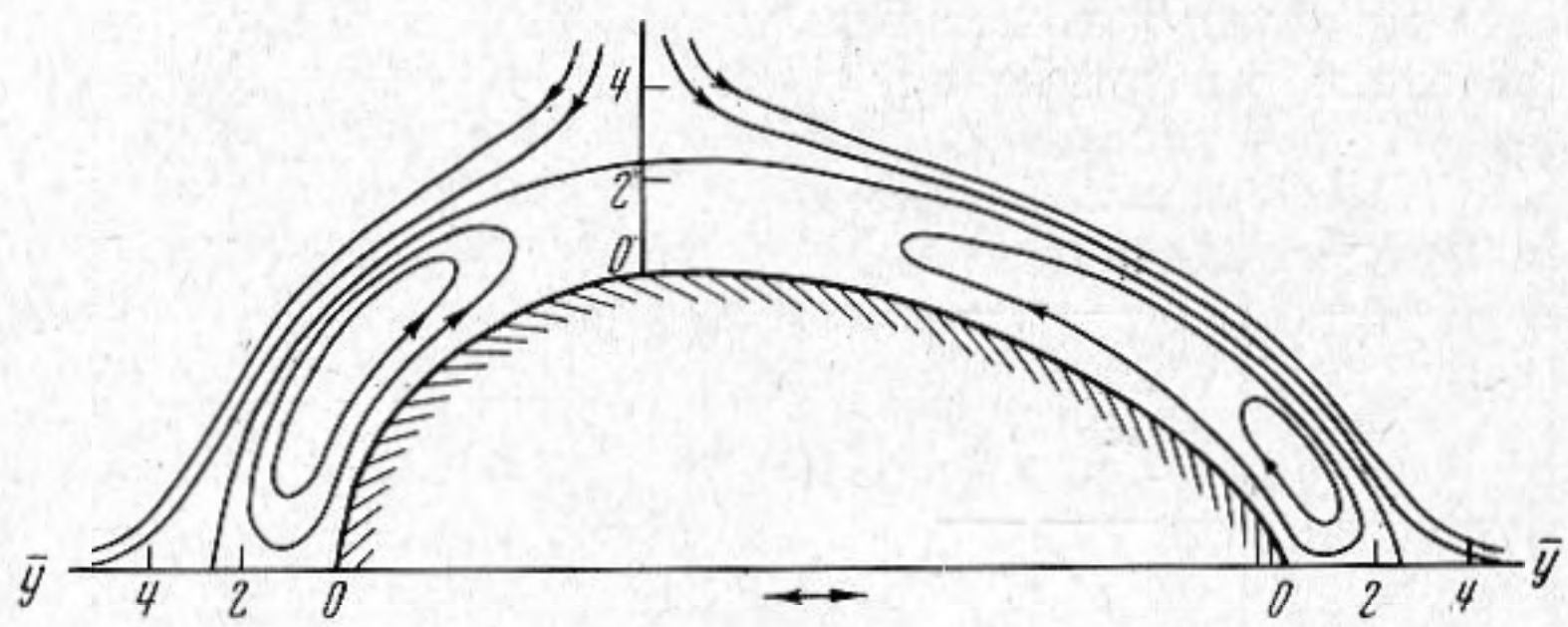
$$C_{\tau 1} = -\sqrt{2}\frac{(\nu/\omega)^{1/2}}{s}(\cos\omega t - \sin\omega t)\,k_{\tau 1}$$

$$k_{\tau 1} = -\frac{1}{LU_\infty}\int\limits_0^{2\pi} U_0\frac{d\xi}{d\varphi}\,d\varphi.$$

С учетом формул (3) и (4) выражение для $k_{\tau 1}$ преобразуется к виду

$$k_{\tau 1} = \frac{1}{1+\dfrac{a^2}{1-\varepsilon^2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{m\sin^2\varphi}{\sqrt{(a^2-m)^2+4a^2\sin^2\varphi}}\left(1+\frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{m^2}\right)d\varphi.$$

На фиг. 2 приведена зависимость коэффициента $k_{\tau 1}$ от $a$ при различных значениях $\varepsilon$, полученная численным интегрированием. На фиг. 3 показаны линии равного тока акустического течения для одной половины сим-




Фиг. 3

метричного профиля Чаплыгина с параметрами $\varepsilon = 0{,}2$, $a = 0{,}5$. Замкнутость линии тока акустического течения на расстоянии от контура профиля $\bar{y} = 2{,}66$ показывает, что вихри в пограничном слое изолированы от внешнего течения.

Направления движения, форма и месторасположения акустического течения хорошо подтверждаются экспериментально. На фиг. 4 приведена фотография взвешенных частиц, увлеченных акустическим течением около профиля с параметрами $\varepsilon = 0{,}2$, $a = 0{,}5$, колеблющегося в воздухе с частотой 45 *Гц* и амплитудой $s = 0{,}8$ *мм*; хорда профиля равна $L = 5$ *мм*. Эксперимент проводился на установке, описанной в работе [5]. Стробоскопическое освещение позволило выделить стационарную часть течения.

Акустические течения также создают на поверхности профиля вязкие касательные напряжения. После подстановки в формулу (7) значения градиента скорости $u_2$ при $y = 0$ и преобразований, аналогичных выполненным при выводе $C_{\tau 1}$, получим коэффициент сопротивления трения второго порядка

$$C_{\tau 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(\nu/\omega)^{1/2}}{L}[(2-\sqrt{2})(\sin 2\omega t + \cos 2\omega t) + 1]\,k_{\tau 2}$$

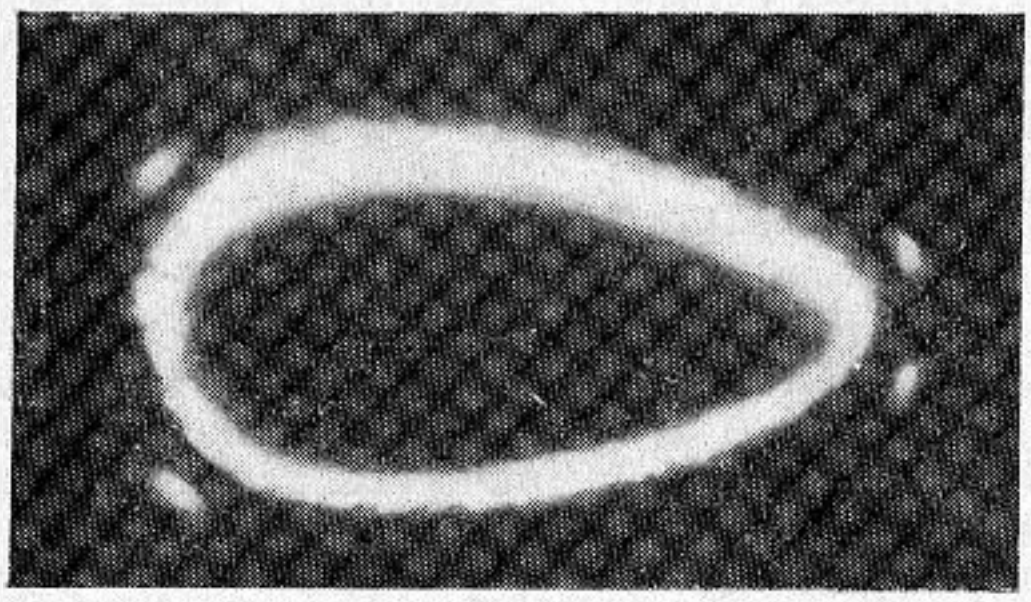
$$k_{\tau 2} = -\frac{1}{U_\infty{}^2}\int\limits_0^{2\pi} U_0\frac{dU_0}{dx}\frac{d\xi}{d\varphi}\,d\varphi.$$

Используя интегрирование по частям с учетом формул (3) и (4), можно получить выражение для $k_{\tau 2}$ в следующем виде:

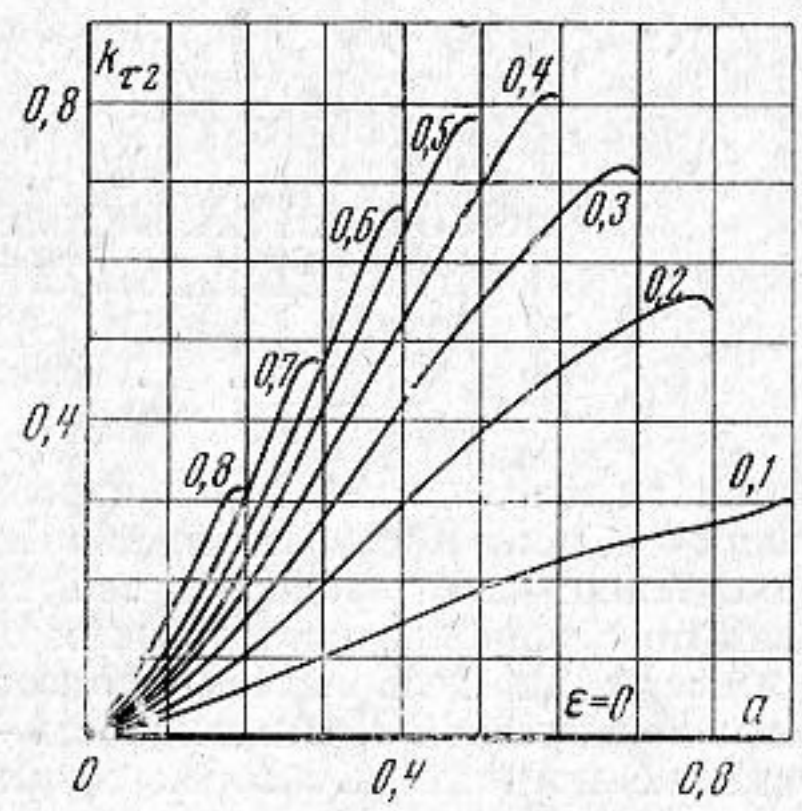
$$k_{\tau 2} = \frac{16}{3}a^2\varepsilon(1-\varepsilon^2)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^4\varphi}{[(a^2-m)^2+4a^2\sin^2\varphi]^{3/2}}\,d\varphi.$$

Коэффициент $k_{\tau 2}$ был рассчитан численным методом и зависимость его от $a$ при различных $\varepsilon$ представлена на фиг. 5. Для случая $\varepsilon = 0$ профиль представляет собой эллипс, причем при $a = 0$ эллипс преобразуется в круг, а при $a = 1$ — в пластинку. В последнем случае коэффициент $k_{\tau 2}$ и, следовательно, результирующая сила равны нулю.

Проведенные исследования показывают, что на колеблющийся профиль Чаплыгина действует постоянная во времени результирующая сила, имею-



Фиг. 4




Фиг. 5

щая направление в сторону более тупой кромки профиля. Эта сила является результирующей касательных напряжений, вызванных градиентом скорости акустического течения около поверхности профиля.

Касательные напряжения имеют место и при колебаниях кругового цилиндра, однако в этом случае силы реакции взаимно уравновешиваются и результирующая сила оказывается равной нулю. В то же время имеется ряд конфигураций тела типа профиля Чаплыгина, для которых результирующая сила отлична от нуля.

Автор благодарит Н. П. Пустового и Л. М. Сергееву за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Schlichting. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmunger. Phys. Z., 1932, **33**, 327—335.
2. Е. Д. Сорокодум. О силах, возникающих в акустическом пограничном слое симметричного профиля Жуковского. Сб. тр. Таганрогского радиотехнического ин-та «Прикладная акустика», 1972, 5, вып. 34, 106—114.
3. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
4. А. А. Космодемьянский. Вихревое сопротивление теоретических профилей, Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 317.
5. Е. Д. Сорокодум, В. И. Тимошенко, Г. В. Швец. Динамика развития акустического течения около осциллирующего цилиндра при больших амплитудах. Сб. тр. Таганрогского радиотехнического ин-та «Прикладная акустика», 1972, 5, вып. 34, 96—106.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступила 1 июня 1972 г.