АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIX 1973 Вып. 6

УДК 534.222

К ВОПРОСУ О ФЛУКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ В СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ

В. Н. Каравайников, В. А. Чуклов

Проведен расчет флуктуаций амплитуды и фазы в сферической волне при корреляционной функции показателя преломления вида: $B(r)=B_0\exp(-r/a)$. Дано сравнение полученных результатов с формулами для флуктуаций амплитуды и фазы, полученными при расчетах с использованием корреляционной функции показателя преломления другого вида.

В работе [1] получены общие формулы для вычисления средних квадратов флуктуаций амплитуды

$$\overline{Z^2}=\frac{1}{2}(I_1-I_2) \tag{1}$$

и фазы

$$\overline{S'^2}=\frac{1}{2}(I_1+I_2) \tag{2}$$

в сферической волне, распространяющейся в среде со случайными неоднородностями, где

$$I_1=\int\limits_0^{L'}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1\{a_2'-a_2';\rho\}B(r')\,d\eta\,d\sigma\,d\xi_1'\,d\xi_2', \tag{3}$$

$$I_2=\int\limits_0^{L'}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1\{a_1'+a_2';\rho\}B(r')\,d\zeta\,d\sigma\,d\xi_1'\,d\xi_2' \tag{4}$$

$$\rho=\sqrt{\eta^2+\sigma^2},$$

$B(r')$ — корреляционная функция показателя преломления, а Φ_1 в общем случае имеет вид

$$\Phi_1(a;\rho)=\frac{1}{2\pi a}\sin\frac{L\rho^2}{2a}, \tag{5}$$

где

$$a=\frac{\xi(L-\xi)}{k_0},\quad L\rho^2=L(\zeta^2+\sigma^2).$$

Там же проведен расчет для случая, когда $B(r')$ задана в виде

$$B(r')=B_0\exp\left(-\frac{r'^2}{a_0'^2}\right).$$

Рассмотрим случай, когда $B(r')$ имеет вид

$$B(r')=B_0\exp\left(-\frac{r'}{a'}\right). \tag{6}$$

Подставляя в формулы (3) и (4) значение $B(r')$ из формулы (6) и раскрывая вид функции Φ_1 для I_1 и I_2, получим

$$I_1=\int\limits_0^{L'}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_0}{2\pi(\xi_1'-\xi_2')(L'-\xi_1'-\xi_2')}\sin\frac{\zeta^2+\sigma^2}{2(\xi_1'-\xi_2')(L'-\xi_1'-\xi_2')}\times$$

$$\times e^{-\frac{r'}{a'}}\,d\eta\,d\sigma\,d\xi_1'\,d\xi_2', \tag{7}$$

$$I_2=\int\limits_0^{L'}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{B_0}{2\pi[L'(\xi_1'+\xi_2')-(\xi_1^{12}+\xi_2^{12})]}\sin\frac{\zeta^2+\sigma^2}{2[L'-(\xi_1'+\xi_2')-(\xi_1^{12}-\xi_2^{12})]}\times$$

$$\times e^{-\frac{r'}{a'}}\,d\zeta\,d\sigma\,d\xi_1'\,d\xi_2'. \tag{8}$$

Переходя здесь к полярным координатам ρ, φ на плоскости $\zeta\sigma$ и учитывая, что коэффициент корреляции есть четная функция относительно η и σ, после интегрирования по φ получим

$$I_1=B_0\iiint\limits_{0\ 0}^{L'\infty}\frac{1}{(\xi_1'-\xi_2')(L'-\xi_1'-\xi_2')}\sin\frac{\rho^2}{2[(\xi_1'-\xi_2')(L'-\xi_1'-\xi_2')]}\times$$

$$\times e^{-\frac{\sqrt{(\xi_1'-\xi_2')+\frac{\rho^2}{L'}}}{a'}}\,d\xi_1'd\xi_2'\rho d\rho,$$

$$I_2=B_0\iiint\limits_{0\ 0}^{L'\infty}\frac{1}{[L'(\xi_1'+\xi_2')-(\xi_1^{12}-\xi_2^{12})}\cdot\sin\frac{\rho^2}{2[L'(\xi_1'+\xi_2')-(\xi_1^{12}-\xi_2^{12})]}\times$$

$$\times e^{-\frac{\sqrt{(\xi_1'-\xi_2')+\frac{\rho^2}{L'}}}{a'}}\,d\xi_1'd\xi_2'\rho d\rho.$$

Дальнейшее упрощение интегралов I_1 и I_2 возможно в том случае, когда дистанция велика по сравнению с радиусом корреляции $(L\gg a_0)$. Вводя относительную координату $\xi'=(\xi_1'-\xi_2')$ и координату центра тяжести $x=\frac{1}{2}(\xi_1'+\xi_2')$, можно написать:

$$I_1=B_0\int\limits_0^{L'}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\sin\frac{1}{\xi'(L'-2x)}\frac{\rho^2}{2\xi'(L'-2L)}\cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^{12}-\frac{\rho^2}{L'}}}{a'}}\,dxd\xi'\rho d\rho, \tag{9}$$

$$I_2=B_0\int\limits_0^{L'}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2L'x-2x^2-\frac{\xi^{12}}{2}}\sin\frac{\rho^2}{2(2L'x-2x^2-\frac{\xi^{12}}{2})}\cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^{12}+\frac{\rho^2}{L'}}}{a'}}\,dxd\xi'\rho\,d\rho. \tag{10}$$

В выражении (9) выполним интегрирование по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Для этого введем новую переменную $z=\frac{\rho^2}{2\xi'(L'-2x)}$ учитывая, что $\frac{\sin z}{z}$ есть четная функция относительно z, и пользуясь определением интегрального синуса, мы придем к выражению

$$I_1=B_0\iint\limits_{0\ 0}^{\infty\ \infty}\frac{1}{2k\xi}\left[\operatorname{si}\left(-\frac{\rho^2}{2k^2\xi'L}\right)-\operatorname{si}\left(\frac{\rho^2}{2k^2\xi'L}\right)\right]\cdot e^{-\frac{\sqrt{\xi^2+\frac{\rho^2}{k^2L}}}{a_0}}\,d\xi'\rho d\rho.$$

Выполняя подстановку $t=\frac{\rho}{\sqrt{k^3L}}$ и переходя к полярным координатам r, φ на плоскости $\xi_1't$, получим

$$I_1=k^3B_0L\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\infty}t\xi\varphi\left[\mathrm{si}\left(-\frac{kr\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}\right)-\mathrm{si}\left(\frac{kr\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}\right)\right]e^{-r/a_0}r\,dr. \quad (11)$$

Вычислим интегралы

$$I_3=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{si}(-rb)\,e^{-r/a_0}r\,dr, \quad (12)$$

$$I_4=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{si}(rb)\,e^{-r/a_0}\,r\,dr, \quad (13)$$

где $b=\frac{k\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}$. Выполняя в формуле (12) интегрирование по частям, а именно:

$$I_3=-a_0e^{-r/a_0}\,\mathrm{si}(-rb)\,r\,\Big|_0^{\infty}+a_0\int\limits_0^{\infty}\mathrm{si}(-rb)\,e^{-r/a_0}\,dr+a_0\int\limits_0^{\infty}e^{-r/a_0}\,r\,d\,\mathrm{si}(-rb)$$

и, учтя, что $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r}{e^{r/a_0}}=0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\mathrm{si}(-rb)=0$ и $d\,\mathrm{si}(-rb)=\frac{\sin(-rb)\,(-b)}{r}$, получим

$$I_3=a_0\int\limits_0^{\infty}\mathrm{si}(-rb)\,e^{-r/a_0}\,dr+a_0b\int\limits_0^{\infty}\sin(rb)\,e^{-r/a_0}\,dr.$$

Вычислим аналогичным путем выражение (13) для I_3-I_4:

$$I_3-I_4=a_0\int\limits_0^{\infty}\mathrm{si}(-rb)\,e^{-r/a_0}\,dr-a_0\int\limits_0^{\infty}\mathrm{si}(rb)\,e^{-r/a_0}\,dr. \quad (14)$$

Интегралы, входящие сюда,— табличные. Вычислив их и внося выражение (14) в формулу (11) для I_1, получим

$$I_1=2k^3B_0La_0\frac{1}{N}\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{arctg}\,\frac{N}{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi, \quad (15)$$

где $N=\frac{1}{a_0}$, $N'=\frac{1}{a'}=\frac{1}{ka_0}\ll1$.

Выполнив в формуле (15) интегрирование по φ и учтя, что $ka_0\gg1$, получим окончательно

$$I_1=2k^2a_0B_0L.$$

Перейдем к вычислению выражения (10). В интеграле для I_2 выполним интегрирование по x. Подстановкой $t=x-\frac{L'}{2}$ это интегрирование сводится к вычислению интеграла

$$2\int\limits_0^{L'/2}\frac{2}{L'^2-4t^2-\xi'^2}\sin\frac{\rho^2}{L'^2-4t-\xi'^2}\,dt,$$

который подстановкой $z=\dfrac{2t}{L'}$ можно привести к виду

$$2L'\int\limits_0^1 \frac{1}{L'^2\left(1-z^2-\dfrac{\xi'^2}{L'^2}\right)}\sin\frac{\rho^2}{L'^2\left(1-z^2-\dfrac{\xi'^2}{L'^2}\right)}\,dz.$$

Учтя, что область существенных значений ξ' определяется неравенством $\xi'<ka_0$ и $L'\gg a'$, членом $\dfrac{\xi'^2}{L'^2}$ в знаменателе можно пренебречь по сравнению с единицей. Вводя новую переменную $z=\dfrac{\xi'}{L'}e^{-t'}$, получим

$$2\xi'\int\limits_{-\ln L'/\xi'}^{\infty}\frac{1}{L'^2\left(1-\dfrac{\xi'^2}{L'^2}e^{-2t'}\right)}\sin\frac{\rho^2}{L'^2\left(1-\dfrac{\xi'^2}{L'^2}e^{-2t'}\right)}\,e^{-t'}\,dt'.$$

Можно показать, что $1-\dfrac{\xi'^2}{L'^2}e^{-2t'}\approx 1$, и тогда

$$\int\limits_{-\ln L'/\xi'}^{\infty}\frac{1}{L'^2}\sin\frac{\rho^2}{L'^2}e^{-t'}\,dt=\frac{2}{L'}\sin\frac{\rho^2}{L'}.$$

Выражение для I_2 в этом случае приводится к виду

$$I_2=\frac{2}{L'}B_0\iint\limits_0^{\infty}\sin\frac{\rho^2}{L'^2}\,e^{-\frac{\sqrt{\xi'^2+\frac{\rho^2}{L'}}}{a'}}\,\rho\,d\rho\,d\xi'.$$

Выполнив подстановку $t=\dfrac{\rho}{\sqrt{L'}}$ и интегрирование ξ', а также переходя к размерным величинам, получим

$$I_2=4B_0\int\limits_0^{\infty}\sin\left(\frac{t^2}{kL_0}\right)t^2K_1\left(\frac{t}{ka_0}\right)dt,$$

где K_1 — цилиндрическая функция $K_1\left(\dfrac{t}{a'}\right)\approx\dfrac{a'}{t}$, т. е. имеет логарифмическую особенность, но $t^2K_1\left(\dfrac{t}{a'}\right)$ такой особенности не имеет. Для K_1 можно написать интегральное представление:

$$K_1\left(\sqrt{\frac{t^2}{a'^2}}\right)=\frac{1}{a't}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{4x}-\frac{1}{a'^2}x}\,dx$$

и тогда

$$I_2=\frac{4B_0}{a'}\int\limits_0^{\infty}\sin\left(\frac{1}{L'}t^2\right)t\,e^{-\frac{t^2}{4x}-\frac{1}{a_{12}}x}\,dx.$$

Изменив порядок интегрирования

$$I_2=\frac{4}{a'}B_0\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{1}{a'^2}x}\,dx\int\limits_0^{\infty}\sin\left(\frac{1}{L'}t^2\right)e^{-\frac{t^2}{4x}}\,t\,dt$$

и, выполнив интегрирование по t и x, окончательно получаем

$$I_2 = -2k^2 L B_0 a_0 D[\mathrm{ci}(D)\sin(D) - \mathrm{si}(D)\cos(D)] + 2k^2 B_0 a_0 L, \tag{16}$$

где $D = \dfrac{L}{4ka_0^2}$.

Используя выражение (15) и (16) для средних квадратов флуктуаций амплитуды и фазы, на основании формул (1) и (2) получим

$$\overline{Z^2} = k^2 a_0 B_0 L D[\mathrm{ci}(D)\sin(D - \mathrm{si}(D)\cos(D)], \tag{17}$$

$$\overline{S'^2} = 2k^2 a_0 B_0 L \left\{ I - \frac{1}{2} D[\mathrm{ci}(D)\sin(D) - \mathrm{si}(D)\cos(D)] \right\}. \tag{18}$$

Параметр D в зависимости от изменения входящих в него величин может принимать различные значения.

Формулы (17) и (18) справедливы при любом значении D. Рассмотрим случай, когда $D \gg 1$. Дадим оценку выражению

$$D[\mathrm{ci}(D)\sin(D) - \mathrm{si}(D)\cos(D)].$$

Для этого необходимо знать асимптотические выражения для интегрального синуса и интегральной показательной функции Ei.

В разложении Ei достаточно ограничиться двумя членами. В этом случае

$$\begin{gathered} D[\mathrm{ci}(D)\sin(D) - \mathrm{si}(D)\cos(D)] = \sin^2(D) - \frac{\cos(D)\sin(D)}{D} + \\ + \cos^2(D) + \frac{\sin(D)\cos(D)}{D} = \sin^2(D) + \cos^2(D) = 1. \end{gathered} \tag{19}$$

На основании формулы (19) формулы (17) и (18) можно написать в виде

$$\overline{Z^2} = k^2 a_0 B_0 L, \tag{20}$$

$$\overline{S'^2} = k^2 a_0 B_0 L, \tag{21}$$

т. е. флуктуации амплитуды и фазы растут прямо пропорционально расстоянию от источника до приемника. Формулы (20) и (21) отличаются от соответственных формул работ [1, 2], где выполнен расчет с корреляционной функцией показателя преломления в виде $B_0 \exp\left(-\dfrac{r'^2}{a_0'^2}\right)$, коэффициентом $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Рассмотрим случай $D \ll 1$. При этом условии $\sin(D) \approx D$, $\cos D \approx 1$ и

$$\mathrm{ci}(D)\sin(D) - \mathrm{si}(D)\cos(D) \approx \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

Формулы (17) и (18), используя формулу (22), можно написать в виде

$$\overline{S'^2} = 2k^2 a_0 B_0 L, \tag{23}$$

$$\overline{Z^2} = \frac{\pi}{8} B_0 L^2, \tag{24}$$

т. е. в случае $D \ll 1$, соответствующем геометрическому приближению, формула (23) отличается от соответственной формулы (20), отвечающей случаю $D \gg 1$, множителем 2.

Средний квадрат флуктуаций амплитуды при $D \ll 1$ растет прямо пропорционально квадрату дистанции и при наложенном условии на a_0 не зависит от a_0. Полученный результат (24) отличается от соответственного результата работы [1] тем, что там средний квадрат флуктуаций амплитуды прямо пропорционален кубу дистанции и обратно пропорционален a_0^3.

В отличие от гауссовой корреляционная функция вида $B(r) = B_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ соответствует скачкообразным изменениям показателя преломления. Этим и объясняется различие результатов при $D \ll 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Каравайников. Флуктуации амплитуды и фазы в сферической волне. Акуст. ж., 1957, 3, 2, 165.
2. Л. А. Чернов. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.

Симферопольский государственный университет

Поступила 10 июня 1972 г.