АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИМПЕДАНЦНОМ ПРЕПЯТСТВИИ

В. Н. Романов

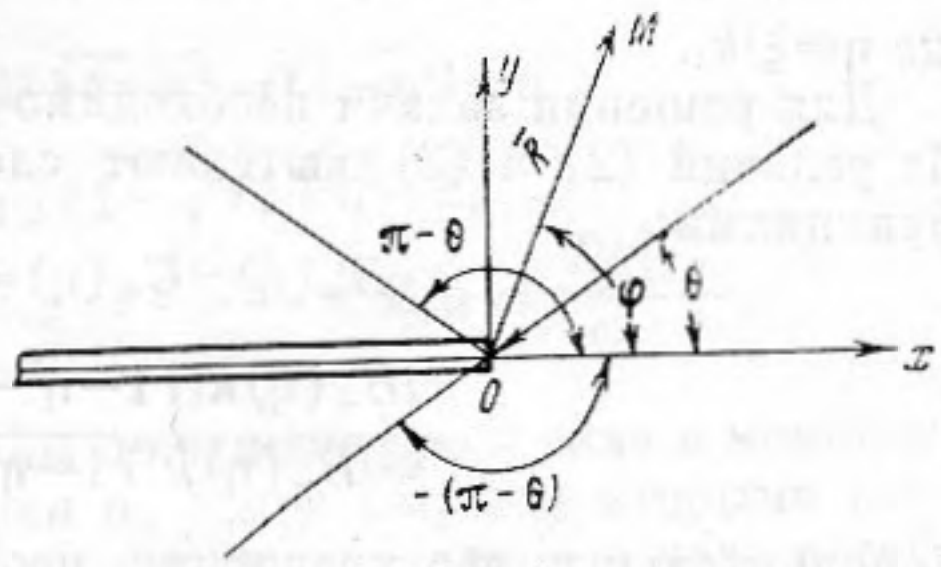
Методом интегрального преобразования Фурье решена задача о рассеянии изгибной волны, распространяющейся по бесконечной пластине, на полубесконечном импеданцном препятствии. Показано, что пространственное распределение рассеянного поля изгибных волн существенным образом зависит от механических импеданцев препятствия. Приведены результаты расчетов коэффициентов прохождения изгибной волны через препятствие с различными механическими импеданцами.

Пусть на полубесконечное линейное препятствие, расположенное по оси x при $x\leqslant 0$ (фиг. 1) и имеющего механические импеданцы на единицу длины по отношению к перерезывающей силе $-Z_F$ и по отношению к изгибающему моменту $-Z_M$, под углом θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$ падает изгибная волна, смещение которой выражается как

$$w_{\text{п}}=e^{-ik_1y\sin\theta-ik_1x\cos\theta-i\omega t},$$

где k_1 — волновое число изгибных волн в пластине (экспоненциальный множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опускаем). Поле изгибных волн в пластине w_0 можно представить в виде суммы двух компонент: $w_0=w_{\text{п}}+w$, где w — излучаемое препятствием вторичное поле. Смещения w_0, а следовательно, и w должны удовлетворять дифференциальному уравнению изгибных колебаний пластины

$$\nabla^2 w-k_1^4 w=0 \qquad (1)$$



Фиг. 1

и граничным условиям на препятствии, определяющим:

а) непрерывность смещений и углов поворотов сечений пластины и препятствия при подходе к препятствию со стороны положительных и отрицательных значений y (введем индексы $y+0$ и $y-0$ соответственно); из этого условия следует, что

$$w_{y+0}=w_{y-0}, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y+0}=\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y-0}. \qquad (3)$$

Эти же соотношения должны иметь место и для точек пластины, находящихся вне препятствия;

б) непрерывность перерезывающих сил и изгибающих моментов на линии контакта препятствия с пластиной.

Из этих условий вытекают следующие соотношения:

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}\right]_{y+0}-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}\right]_{y-0}=-i\omega Z_F w_0|_{y=0},\quad x<0; \tag{4}$$

$$D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y+0}-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y-0}=i\omega Z_M\frac{\partial w_0}{\partial y}\bigg|_{y=0},\quad x<0. \tag{5}$$

Поскольку при $x>0$ линейное препятствие отсутствует, то

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}\right]_{y+0}-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}\right]_{y-0}=0\ \text{ при }\ x>0, \tag{6}$$

$$D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y+0}-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y-0}=0\ \text{ при }\ x>0. \tag{7}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластины, ν — коэффициент Пуассона.

Смещение w ищем в виде интеграла Фурье

$$w=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi,y)\,e^{i\xi x}\,d\xi. \tag{8}$$

Вид функции $\Phi(\xi, y)$ определим, следуя работе [1] и используя уравнение (1) с учетом условий на бесконечности (т. е. при наличии мнимой части у волнового числа k_1 решение w должно стремиться к 0 при $|y|\to\infty$). Тогда решение задачи приводится к виду

$$w_+=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[B_+(\eta)\,e^{ik_1y\sqrt{1-\eta^2}y}+C_+(\eta)\,e^{-k_1y\sqrt{1+\eta^2}}]\,e^{ik_1x\eta}\,d\eta;\quad y>0; \tag{9}$$

$$w_-=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[B_-(\eta)\,e^{-ik_1y\sqrt{1-\eta^2}y}+C_-(\eta)\,e^{k_1y\sqrt{1+\eta^2}}]\,e^{ik_1x\eta}\,d\eta;\quad y<0, \tag{10}$$

где $\eta=\xi/k_1$.

Для решения задачи необходимо определить функции $B_\pm(\eta)$ и $C_\pm(\eta)$. Из условий (2) и (3) вытекают следующие соотношения между этими функциями:

$$B_+(\eta)+C_+(\eta)=B_-(\eta)+C_-(\eta), \tag{11}$$

$$iB_+(\eta)k_1\sqrt{1-\eta^2}-C_+(\eta)k_1\sqrt{1+\eta^2}=$$
$$=iB_-(\eta)k_1\sqrt{1-\eta^2}+C_-(\eta)k_1\sqrt{1+\eta^2}. \tag{12}$$

Дополнительные два уравнения, необходимые для определения неизвестных функций, мы получим из условий (4)—(7). Отметим, что из непрерывности смещений и углов поворота пластины вне препятствия (2), (3) следует тождественность нулю на оси x при $x>0$ величин w и $\partial w/dy$. Подстановка выражений (9) и (10) и выражения для w_0 в уравнения (4)—(7) приводит к следующим интегральным уравнениям:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_1(\eta)\,e^{ik_1x\eta}d\eta=e^{-ik_1x\cos\theta}\quad\text{при}\quad x<0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_1(\eta)\,e^{ik_1x\eta}d\eta=0\qquad\text{при}\quad x>0, \tag{14}$$

где

$$\varkappa_1(\eta)=k_1^2D\{[B_-(\eta)-B_+(\eta)](1-\eta^2)+$$
$$+[C_+(\eta)-C_-(\eta)](1+\eta^2)\}/Z_M|w;$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_2(\eta)\,e^{ik_1x\eta}d\eta=e^{-ik_1x\cos\theta}\quad\text{при}\quad x<0, \tag{15}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varkappa_2(\eta)\,e^{ik_1x\eta}d\eta=0\qquad\text{при}\quad x>0, \tag{16}$$

где

$$\varkappa_2(\eta)=k_1^4D\{[B_+(\eta)+B_-(\eta)][(1-\eta^2)+\eta^2]\sqrt{1-\eta^2}+$$
$$+i[C_+(\alpha)+C_-(\eta)][-(1+\eta^2)+\eta^2]\sqrt{1-\eta^2}\}/Z_F/\omega.$$

Поскольку правая часть интегральных уравнений определяется экспоненциальными функциями, можно результаты интегрирования представить как вычеты подынтегральных функций $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ в полюсе $\eta=-\cos\theta$ (по аналогии с [1], стр. 174—175) и таким образом определить вид этих функций. Следует отметить, что в случае дифракций акустической волны на полуплоскости и на открытых концах волноводов [1, 2] такого простого решения интегральных уравнений нет, потому что подынтегральные функции, аналогичные $\varkappa_{1,2}$ в уравнениях (13), (14) и соответственно в уравнениях (15), (16), не являются тождественными. В нашем же случае тождественность имеет место вследствие того, что соотношения (13) и (15) определяют усилия, действующие по линии притыкания препятствия к пластине, расположенного по оси x при $x<0$, а соотношения (14) и (16) — отсутствие тех же усилий при $x>0$.

Окончательные выражения для неизвестных функций $B_\pm(\eta)$ и $C_\pm(\eta)$ имеют вид

$$B_\pm(\eta)=\frac{in\alpha\sqrt{1+\eta^2}\mp m\delta\sin\theta}{rnm(\eta+\cos\theta)}, \tag{17}$$

$$C_\pm(\eta)=\frac{-n\alpha\sqrt{1-\eta^2}\pm m\delta\sin\theta}{rnm(\eta+\cos\theta)}, \tag{18}$$

где

$$r=\sqrt{1+\eta^2}+i\sqrt{1-\eta^2},\quad n=2(\sqrt{1+\eta^2}-i\sqrt{1-\eta^2})+\delta,$$

$$m=i2(\sqrt{1+\eta^2}-i\sqrt{1-\eta^2})\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1+\eta^2}-\alpha,$$

$$\alpha=i\frac{Z_F}{Z_{0F}};\quad\delta=i\frac{Z_M}{Z_{0M}},\qquad Z_{0F}=\frac{Dk_1^3}{\omega}\ \text{и}\ Z_{0M}=\frac{Dk_1}{\omega}-$$

характеристические импеданцы пластины по отношению к силе и моменту. На больших расстояниях от препятствия по оси y ($k_1y\gg1$) вторыми слагаемыми в выражениях (9) и (10), описывающих неволновое поле изгибных волн вблизи препятствия, можно пренебречь; тогда выражение для смещения во вторичном поле принимает вид

$$w_\pm=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{in\alpha\sqrt{1+\eta^2}\mp m\delta\sin\theta}{rnm(\eta+\cos\theta)}e^{\pm ik_1y\sqrt{1-\eta^2}+ik_1x\eta}d\eta.$$

При вычислении поля изгибных волн вдали от препятствия интеграл можно свести к интегралу по перевальному пути и к вычету в полюсе $\eta=-\cos\theta$. Введем полярную систему координат (фиг. 1). Тогда $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$, $\eta=\cos\gamma$, $\sqrt{1-\eta^2}=\sin\gamma$, $d\eta=-\sin\gamma d\gamma$ и выражение для $w_\pm$ приводится к виду

$$w_\pm=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pm(0+i\infty)}^{\pm(\pi-i\infty)}\frac{D_+(\cos\gamma)}{\cos\gamma+\cos\theta}e^{ik_1R\cos(\gamma-\varphi)}\sin\gamma d\gamma,$$

где

$$D_{\pm}(\cos\gamma)=\frac{in\alpha\sqrt{1+\cos^2\gamma}\mp m\delta\sin\theta}{rnm}.$$

Точка перевала, как следует из вида экспоненциального множителя, определяется соотношением $\gamma=\varphi$ (φ изменяется от 0 до π при $y>0$ и от 0 до $-\pi$ при $y<0$) и при $\gamma=\varphi=\pm(\pi-\theta)$ точка перевала совпадает с полюсом. В этом случае необходимо использовать специальный прием для вычисления интеграла по перевальному пути [1]. При $\varphi>\pm(\pi-\theta)$ полюс выходит из области, ограниченной перевальным путем и путем интегрирования, а при $\varphi<\pm(\pi-\theta)$ — находится в этой области. Поэтому результат вычисления интеграла можно представить следующим образом:

$$w_{\pm}=w_{\pm,\,\text{выч}}=w_{\pm\,\text{пер}}\quad\text{при}\quad\varphi>\pm(\pi-\theta),$$

$$w_{\pm}=w_{\pm\,\text{пер}}\quad\text{при}\quad\varphi<\pm(\pi-\theta).$$

Следуя работе [1] при вычислении $w_{\pm\,\text{пер}}$ с учетом возможного совпадения направления на точку наблюдения M угла φ с углом $\pm(\pi-\theta)$, окончательное выражение получим в виде

$$w_{\pm\,\text{пер}}=-[D_{\pm}(\cos\varphi)-D_{\pm}-(\cos\theta)]\frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi+\cos\theta)\sqrt{2\pi k_1R}}e^{ik_1R-i\pi/4}+$$

$$+i\frac{\cos(\varphi/2)}{\pi^{1/2}\sin(\theta/2)}e^{-i\pi/4}D_{\pm}(-\cos\theta)\left\{F\left[(2k_1R)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\varphi+\theta)\right]e^{-ik_1R\cos(\theta+\varphi)}-\right.$$

$$\left.-F\left[(2k_1R)^{1/2}\cos\frac{1}{2}(\varphi-\theta)\right]e^{-ik_1R\cos(\varphi-\theta)}\right\}. \tag{19}$$

Здесь

$$F[v]=\int_v^{\infty}e^{iu^2}du;\quad F(-v)=\pi^{1/2}e^{i\pi/4}-F[v];$$

$$F(v)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}[C(v)+iS(v)],$$

где $C(v)$ и $S(v)$ — интегралы Френеля. Вычет в полюсе выражается следующим образом:

$$w_{\pm,\,\text{выч}}=-iD_{\pm}(-\cos\theta)e^{\pm ik_1y\sin\theta-ik_1\cos\theta}. \tag{20}$$

В том случае, когда точка наблюдения M достаточно удалена от линий $\varphi=\pm(\pi-\theta)$ (аргумент интегралов Френеля $v\gg1$), выражение (19) можно существенно упростить, воспользовавшись асимптотическими представлениями интегралов Френеля

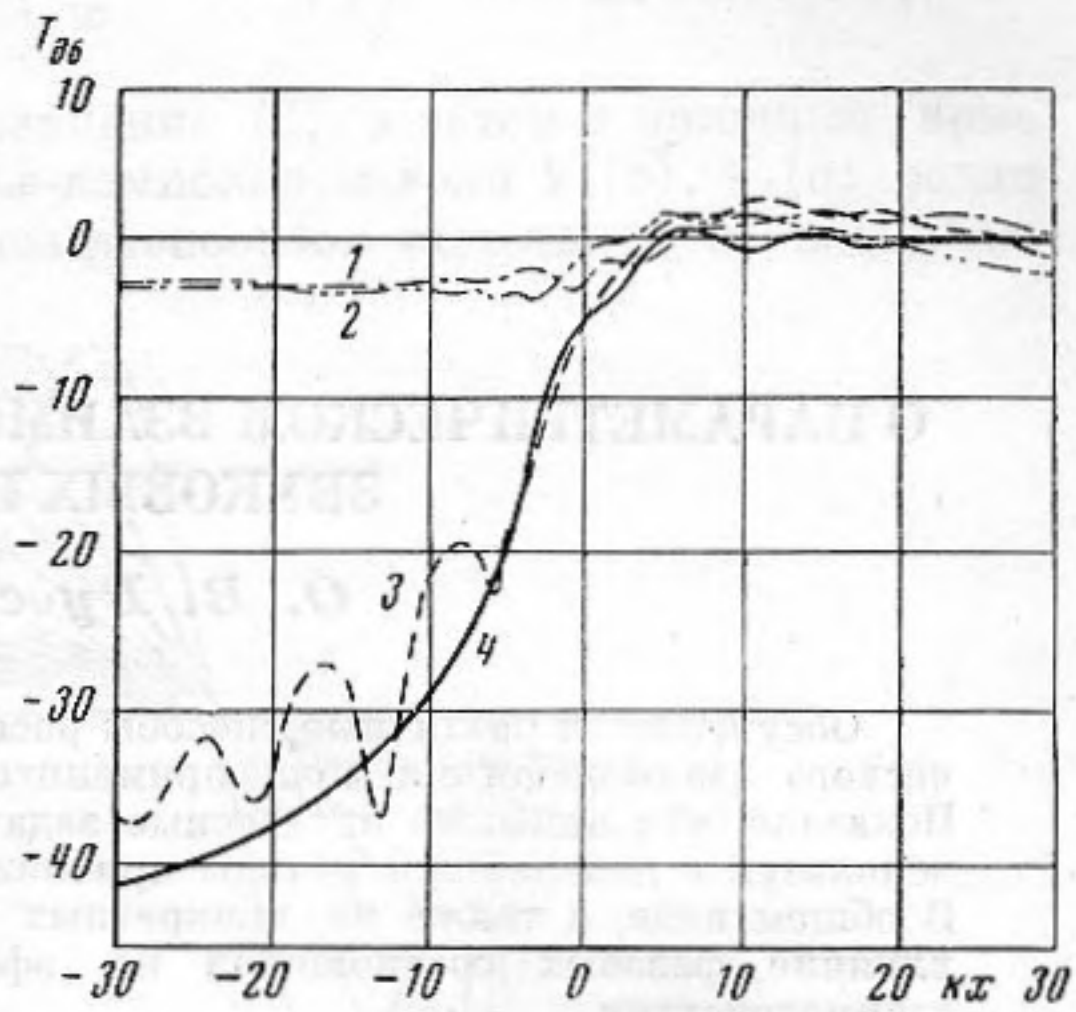
$$w_{\pm\,\text{пер}}=\frac{-\sin\varphi D_{\pm}(\cos\varphi)}{\sqrt{2\pi kR}(\cos\varphi+\cos\theta)}e^{ik_1R-i\pi/4}. \tag{21}$$

Таким образом, вторичное поле, создаваемое препятствием, при падении на него изгибной волны состоит из плоских изгибных волн (20), распространяющихся от препятствия под углами $\varphi=\pm(\pi-\theta)$, и из расходящихся от конца препятствия волн изгиба (19), которые на больших расстояниях от лучей $\varphi=\mp(\pi-\theta)$ являются цилиндрическими волнами.

Плоские изгибные волны (20) имеют ту же величину смещения и то же направление распространения, что и в случае отражения изгибной волны

от бесконечного линейного препятствия с механическими импеданцами Z_F и Z_M. Только расходящиеся волны (19) являются следствием наличия конца у препятствия. Эти волны приводят к тому, что даже в случае абсолютно жесткого препятствия ($Z_F=Z_M\to\infty$) в зоне тени ($-\pi<\varphi<-(\pi-\theta)$) величина смещения волн изгиба будет отличной от 0.

На фиг. 2 представлены результаты расчета коэффициентов прохождения волны изгиба $T=20\lg(w_0/w_п)$ через полубесконечное препятствие с различными механическими импеданцами при угле падения волны $\theta=\pi/2$. Расчет проводился с использованием формулы (19) для точек наблюдения, расположенных по линии $k_1y=-6$, для следующих значений импеданцев: $Z_F=\infty$, $Z_M=0$ — кривая *1*; $Z_F=0$, $Z_M=\infty$ — кривая *2* и $Z_F=Z_M=\infty$ — кривая *3*. В последнем случае для тех же точек наблюдения приведены результаты расчета T с использованием приближенной формулы (21) — кривая *4* (при этом для точки с $\varphi=\pi/2$ результат получен путем интерполирования).



Фиг. 2

Из представленных результатов видно, что в зоне тени ($-\pi<\varphi<-(\pi-\theta)$) коэффициент прохождения для препятствия с малыми механическими импеданцами (кривые *1* и *2*) несущественно зависит от дифракционных явлений, описываемых выражением (21); уже на расстоянии длины волны изгиба от конца препятствия ($k_1x=-6{,}28$) коэффициент прохождения равен -3 *дб*, т. е. равен коэффициенту прохождения для случая препятствия бесконечной длины. Иная картина имеет место для коэффициента прохождения через абсолютно жесткое препятствие ($Z_F=Z_M=\infty$). В этом случае поле изгибных волн в зоне тени полностью определяется дифракционным полем (21), поэтому даже на значительном удалении точки наблюдения от конца препятствия величина смещения волн изгиба остается конечной. При этом для ориентировочной оценки коэффициента T вблизи конца препятствия в этом случае можно использовать приближенное выражение для дифракционного поля (21).

В зоне $x>0$ поле волн изгиба определяется падающей изгибной волной и дифракционное поле дает несущественный вклад для препятствий с рассмотренными механическими импеданцами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Нобл. Метод Винера — Хопфа, М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Л. А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации, М., «Сов. радио», 1966.

Поступила
21 апреля 1972 г.