АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 1

УДК 534.222

О НЕЛИНЕЙНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВЕТРЕ

Л. А. Островский, И. А. Папилова

Рассмотрено двумерное нелинейное течение, вызванное затухающим плоским звуковым пучком в свободном пространстве. Показано, что в «нелинейной» области скорость потока растет до величины, близкой к начальной амплитуде звуковой волны, поперечная структура потока неоднозначна и может содержать осцилляции. Рассмотрено затухание потока на больших расстояниях от «нелинейной» области, а также его особенности в области вблизи излучателя. Показано, что в последней имеется седловая точка, где скорость течения меняет знак. Обсуждается процесс установления потока во времени вблизи оси; оказывается, что время установления нелинейного течения существенно зависит от поведения потока в окрестности седловой точки. Отмечены некоторые особенности нелинейного течения в трубах конечной ширины.

1. Как известно, распространение звуковых волн конечной амплитуды в жидкости или газе при наличии затухания может привести к образованию стационарного течения — звукового ветра. В настоящее время опубликовано довольно много работ, как теоретических, так и экспериментальных, посвященных исследованию стационарных акустических потоков [1—4]. Теоретический анализ конкретных задач обычно сводится к обобщению известного решения Эккарта [1], относящегося к цилиндрически-симметричному потоку в трубе конечного радиуса. Сравнительно недавно был исследован процесс установления стационарного потока эккартовского типа [2—3]. Однако ряд существенных вопросов, связанных с акустическими потоками, остается невыясненным. Почти все имеющиеся решения относятся к «линейному» звуковому ветру; нелинейные члены в уравнениях для потока либо отбрасывались, либо считались малыми. Исключение составляет, по-видимому, задача о расходящемся звуковом пучке (затопленной струе) [4], а также качественное обсуждение нелинейных эффектов в области оси звукового пучка [3]. Кроме того, обычно рассматривались поперечные изменения величин в потоке (одномерные задачи). Однако такие решения применимы лишь для достаточно узкой трубы; в частности решение Эккарта для свободного звукового пучка расходится. Наконец, по-видимому, нигде не исследовалась область вблизи излучателя звука, где скорость течения меняет знак; это оказывается весьма существенным для процесса установления всего нелинейного течения.

В настоящей работе рассматриваются эти вопросы применительно к плоским (двумерным) течениям, в которых нелинейность играет существенную, а в некоторых областях даже определяющую роль. Это приводит к гораздо более сложным и разнообразным эффектам, чем в линейном случае.

Для анализа акустических потоков будем, как обычно, исходить из известных уравнений гидродинамики вязкой жидкости [5], усредненных по периоду звука. Представляя акустические величины (возмущения скорости частиц, давления и плотности) в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\sim}+\mathbf{u}_0,\quad p=p_{\sim}+p_0,\quad \rho=\rho_{\sim}+\rho_0 \tag{1}$$

где $\mathbf{u}_0, p_0, \rho_0$ — не осциллирующие во времени компоненты соответственных величин, определенные так, что средние во времени от $\mathbf{v}$, p, ρ равны соот-

ветственно $\mathbf{u}_0$, p_0, ρ_0, после усреднения получим уравнения для величин, характеризующих поток [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0\nabla)\,\mathbf{u}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\mathbf{u}_0 + \frac{\left(\frac{1}{3}\mu+\eta\right)}{\rho_0^2}\nabla(\nabla\mathbf{u}_0) + \mathbf{F}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{u}_0 + \langle\rho_\sim\mathbf{v}_\sim\rangle) = 0.$$

Здесь $\mathbf{F} = \left\langle \rho_\sim\nabla p_\sim/\rho_0^2 + \frac{\eta}{\rho_0^2}\rho_\sim\nabla^2\mathbf{v}_\sim - (\mathbf{v}_\sim\nabla)\mathbf{v}_\sim + \rho_\sim\frac{\left(\frac{1}{3}\mu+\eta\right)}{\rho_0^2}\nabla(\nabla\mathbf{v}_\sim)\right\rangle$.

Угловые скобки обозначают усреднение по t, причем в (2) учтена возможность медленной зависимости величин от времени.

2. Рассмотрим сначала стационарный звуковой поток на тех его участках, где основную роль играют именно нелинейные члены, вязкостными же членами можно пренебречь (условия применимости такого приближения обсуждаются ниже). Чтобы получить простые аналитические решения, рассмотрим здесь двумерный (плоский) поток. Полагая в формуле (2) $\partial/\partial t=0$ и отбрасывая вязкостные члены, имеем

$$\rho_0\left(u_{z0}\frac{\partial u_{z0}}{\partial z} + u_{x0}\frac{\partial u_{z0}}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p_0}{\partial z} + \rho_0 F_z, \qquad (3а)$$

$$\rho_0\left(u_{x0}\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + u_{z0}\frac{\partial u_{x0}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \rho_0 F_x, \qquad (3б)$$

$$\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial z} = 0. \qquad (3в)$$

Ось z направлена вдоль, а ось x — поперек направления распространения звука. Здесь, кроме вязкостных членов отброшен, как обычно, член $\operatorname{div}\langle\rho_\sim\mathbf{v}_\sim\rangle$ в уравнении непрерывности, поскольку он дает незначительную (порядка $v_\sim^2/c$) поправку к скорости потока. Исключая из формул (3) p_0, нетрудно получить

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u_{x0}\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + u_{z0}\frac{\partial u_{x0}}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{z0}\frac{\partial u_{z0}}{\partial z} + u_{x0}\frac{\partial u_{z0}}{\partial x}\right) = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}. \qquad (4)$$

Пользуясь выражением для $\mathbf{F}$ в (2) нетрудно показать, что правая часть уравнения (4) равна $\operatorname{div}(\mathbf{v}s_y)$, где $s=\operatorname{rot} v$. Далее будем полагать справедливым обычное неравенство $\Lambda_\perp \ll \Lambda_\parallel$, где $\Lambda_\perp$ — поперечный размер пучка, а $\Lambda_\parallel$ — продольный масштаб изменения амплитуды поля. При этом, как будет видно из дальнейшего, $u_{x0} \sim \frac{\Lambda_\perp}{\Lambda_\parallel}u_{z0}$, $p_0 \sim \rho_0|\mathbf{v}_\sim|^2$. Тогда, пренебрегая в уравнении (4) членами порядка $(u_{x0}/u_{z0})^2$, после интегрирования по x получаем с учетом (3в)

$$u_{z0}^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_{x0}}{u_{z0}}\right) = -\psi_z + c(z), \qquad (5)$$

где $c(z)$ — произвольная функция, определяемая из граничных условий, а ψ — правая часть уравнения (4), проинтегрированная по x. В случае $\mathbf{v}\|\mathbf{z}$, рассматриваемом ниже, $\psi = \left\langle -\frac{1}{2}\frac{\partial v_\sim^2}{\partial z}\right\rangle$.

Задача, таким образом, сводится к интегрированию уравнений (5) и (3в). Рассмотрим сперва свободный звуковой пучок конечной ширины, когда $\psi_z(x\to\pm\infty)=0$. Тогда из условия сохранения потока массы $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_0 u_{z0}\,dx=0\right)$ следует, что $c(z)=0$.

Пренебрегая дифракционными эффектами, положим $|\mathbf{v}_\sim|^2=f_1(x)f_2(z)$. Тогда решение уравнения (5) можно искать методом разделения переменных, полагая

$$u_{x0}=\alpha(z)\Phi(x),\quad u_{z0}=\beta(z)F(x). \tag{6}$$

В этом случае из уравнений (3в) и (5) имеем

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d\Phi}{dx}=-\frac{1}{\alpha(z)}\frac{d\beta}{dz}=P,$$
$$-\frac{F^2}{f_1(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi}{F}\right)=\frac{1}{2\alpha\beta}\frac{df_2}{dz}=Q, \tag{7}$$

где P и Q — константы разделения. Отсюда

$$\beta^2(z)=\frac{P}{Q}f_2+k_0, \tag{8}$$

$$\alpha(z)=\frac{1}{2}\frac{df_2}{dz}\sqrt{PQf_2+k_0Q^2}. \tag{9}$$

Для определения зависимости от x получаем уравнение

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2-\Phi\frac{d^2\Phi}{dx^2}=QPf_1(x). \tag{10}$$

Произвольные константы определяются из граничных условий, соответствующих исчезновению потока при $x\to\pm\infty$, а также из требования симметрии потока относительно плоскости $x=0$. Для однородного пучка конечной ширины a ($f_1=1$ при $|x|<\frac{a}{2}$ и $f_1=0$ при $|x|>\frac{a}{2}$) уравнение (10) без труда интегрируется; соответствующие решения для u_{x0} и u_{z0}, удовлетворяющие требованию непрерывности на границе пучка, имеют вид

$$u_{z0}=\sqrt{v_0^2-\langle v_\sim^2\rangle}\cos\alpha_n x,\quad u_{x0}=\frac{\partial\langle v_\sim^2\rangle/dz\sin\alpha_n x}{\alpha_n\sqrt{v_0^2-\langle v_\sim^2\rangle}},\quad |x|<\frac{a}{2},$$

$$u_{z0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v_0^2-\langle v_\sim^2\rangle}\exp\left[-\alpha_n\left(\frac{a}{2}-|x|\right)\right],$$

$$u_{x0}=\frac{\partial\langle v_\sim^2\rangle/dz\exp\left[-\alpha_n\left(\frac{a}{2}-|x|\right)\right]}{\alpha_n\sqrt{v_0^2-\langle v_\sim^2\rangle}\sqrt{2}},\quad |x|>\frac{a}{2}, \tag{11}$$

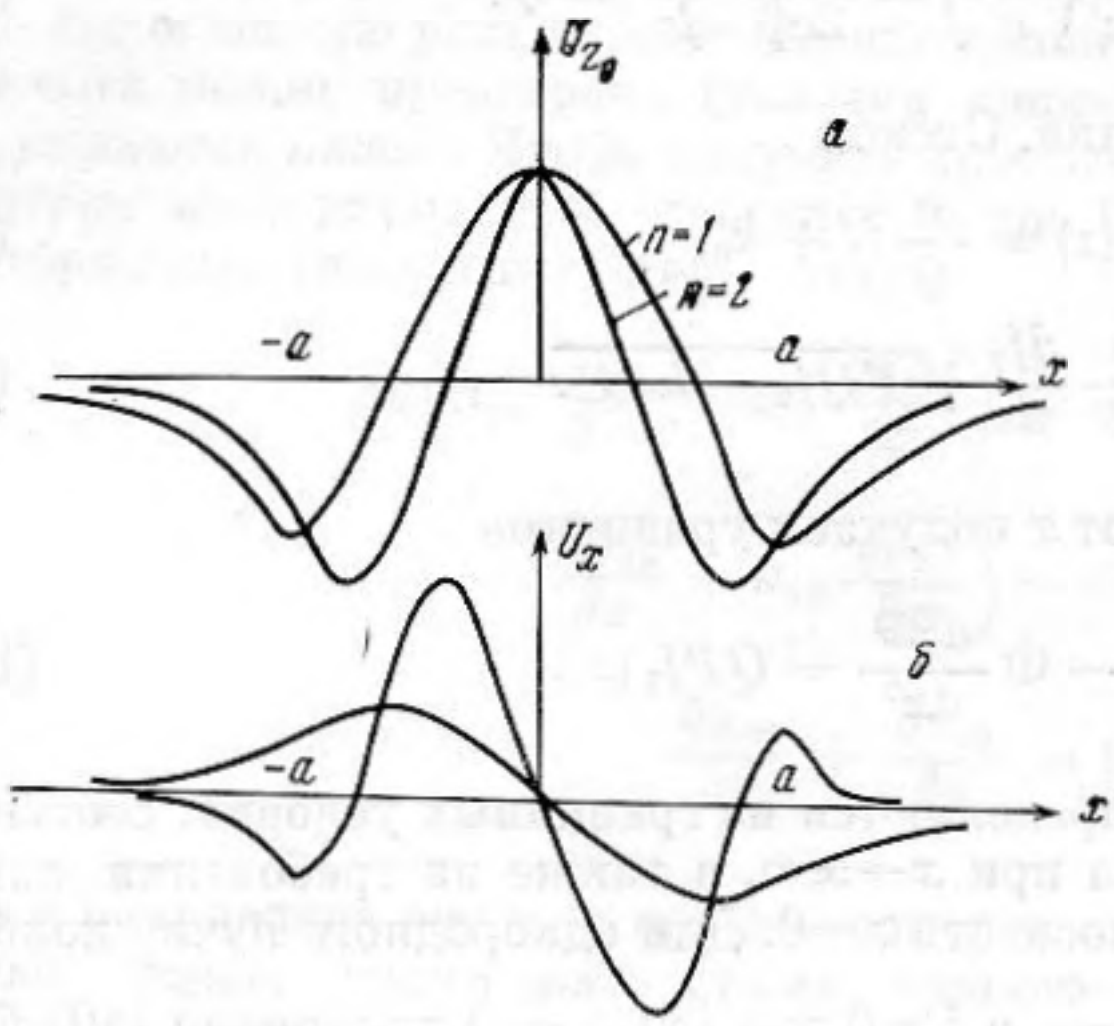
где $v_0^2=\langle v_\sim^2(z=0)\rangle$ — некоторая константа, определяемая интенсивностью звукового пучка, а $\alpha_n=2\pi(n+3/4)/a$ ($n=0, 1, 2\ldots$). На фиг. 1 показана поперечная структура звукового ветра (a — продольная скорость потока, $б$ — поперечная). Это решение имеет совершенно иной характер, чем обычно рассматриваемые линейные потоки. Во-первых, скорость потока растет по мере затухания звука и при $\langle v_\sim^2\rangle\to 0$ достигает величины порядка начальной амплитуды колебательной скорости в звуковой волне, тогда как в «линейном» ветре всегда $u_{z0}\ll|\mathbf{v}_\sim|$. Во-вторых, стационарное нелинейное течение оказывается неоднозначным — имеется бесконечная совокупность решений (мод), отвечающих различным n, которые осциллируют внутри пучка. Правда, фактически число мод конечно, поскольку при $n\geqslant n_{max}=$

$=(\mathrm{Re}_\perp a/\Lambda_\parallel)^{1/2}$ вязкостными членами пренебречь нельзя (см. (12)), однако $n_{\max}$ может быть достаточно велико. Вопрос об условиях реализации той или иной моды требует анализа процессов установления.

Обсудим теперь вопрос о границах применимости полученных решений. Основные ограничения здесь связаны с пренебрежением вязкостными членами в уравнении (2), а это возможно при условии

$$\mathrm{Re}_\perp = \frac{\mathrm{Re}_\sim \Lambda_\perp^2 \sqrt{\langle v_\sim^2 \rangle}}{\sqrt{v_0^2 - \langle v_\sim^2 \rangle}\, \Lambda_\parallel \Lambda} \gg 1. \tag{12}$$

Здесь $\mathrm{Re}_\sim = \dfrac{v_\sim \Lambda}{\eta/\rho_0}$ — акустическое число Рейнольдса (Λ — длина волны звука), а $\mathrm{Re}_\perp = \dfrac{u_{x0}\Lambda_\perp}{\eta/\rho_0}$ — «поперечное» число Рейнольдса в потоке. Ясно, что условие (12) может выполняться как при малом $\mathrm{Re}_\sim$ (для квазигармонической волны), так и при $\mathrm{Re}_\sim \gg 1$, когда волна приобретает пилообразный профиль *. Существенно, что в оценку (12) входит дифракционный параметр $D = \dfrac{\Lambda_\perp^2}{\Lambda\Lambda_\parallel}$; и лишь при $D \gg 1$ звуковой пучок можно считать нерасходящимся на тех расстояниях, где волна успевает существенно затухать по z, а u_{z0} может стать порядка $v_\sim$. Заметим также, что при условии (12) нелинейное решение (11) является достаточно «хорошим» в том смысле, что поправки, связанные с учетом вязкости, в соответствующей области малы.



Фиг. 1

3. Нетрудно видеть, что даже для достаточно интенсивного звукового пучка, когда условие (12) выполняется, полученные решения справедливы лишь в ограниченной области пространства, а именно, при $|x| \leqslant x_m = \Lambda_\perp \mathrm{Re}_\perp$ и $0 \leqslant z < z_m = \Lambda_\parallel \mathrm{Re}_\perp$. Вне этих границ поток мал, его структура определяется вязкостью и описывается уравнениями Лапласа или Пуассона

$$\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial x^2} = L(z), \tag{13}$$

где

$$L(z) = \psi(z)\rho_0/\eta$$

Решения соответствующей линейной задачи следует теперь сшивать с рассмотренной выше нелинейной структурой **.

Общее решение краевой задачи (13) с нулевыми условиями на бесконечности и заданным значением $u_{z0} = \varphi(s)$ на границах нелинейной области имеет вид

$$u_{z0} = \int L(z)\,\sigma(x, z, \tilde{x}, \tilde{z})\, d\tilde{x}\, d\tilde{z} + \int \left(\frac{\partial \sigma}{\partial n}\right)_s \varphi(s)\, ds. \tag{14}$$

Здесь $\sigma(x, z, \tilde{x}, \tilde{z})$ — функция Грина.

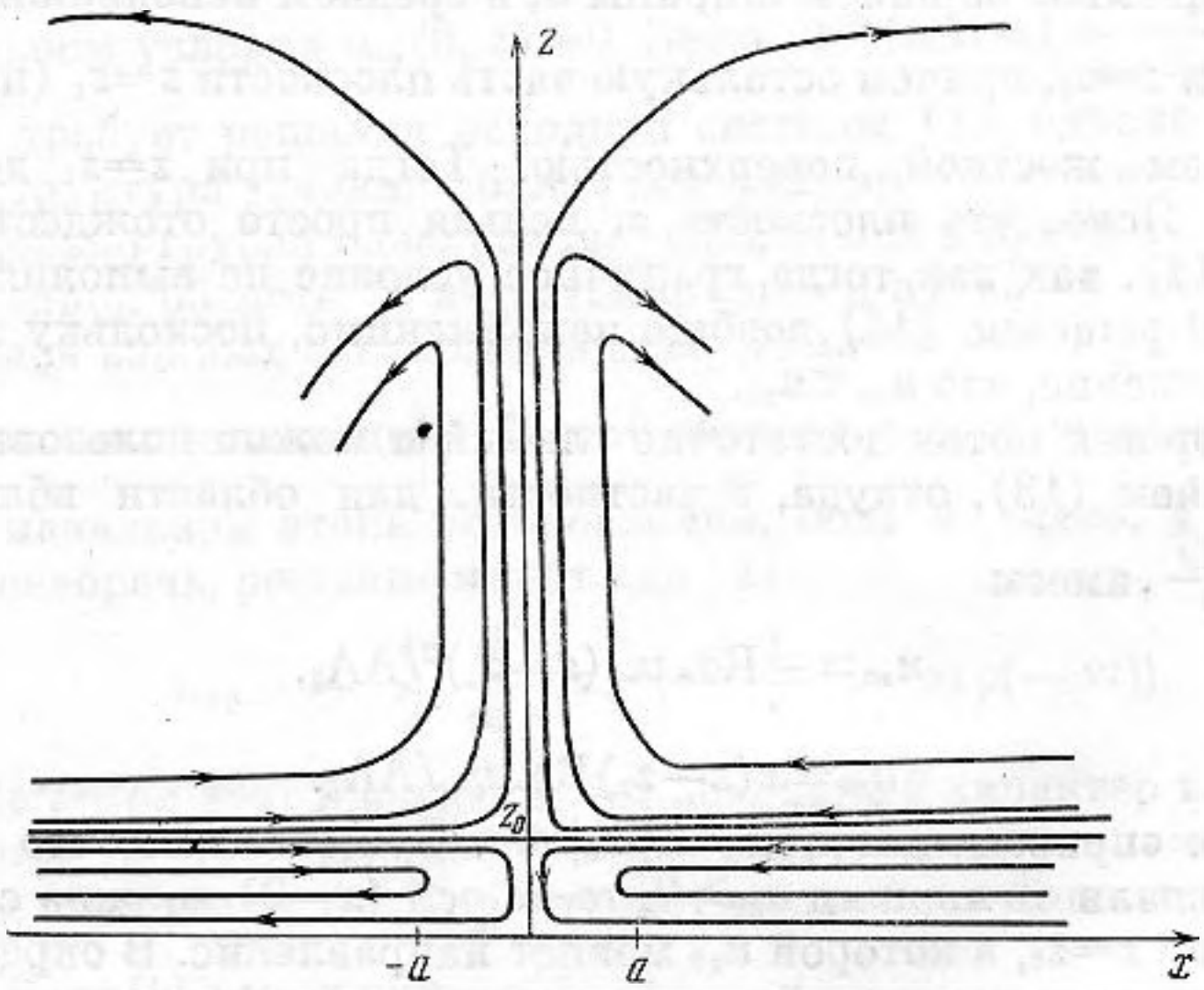
* В этом случае поток резко возрастает именно после образования разрывов.

** Впрочем, результаты этого пункта справедливы и для линейного свободного потока.

Рассмотрим сначала поведение потока при больших z ($z \gg z_m^-$). Задавая структуру потока при $z=z_m^-$, используем функцию Грина для полосы $z_m^- < z < \infty$, $-\infty < x < +\infty$. Если амплитуда звука достаточно быстро спадает при больших z, то вынужденная часть решения (первое слагаемое в формуле (14)) имеет вид

$$u_{z0}^{(1)} = \left(\operatorname{arctg}\frac{x-a/2}{z} - \operatorname{arctg}\frac{x+a/2}{z}\right)\int\limits_0^\infty \tilde{z}L(\tilde{z})\,d\tilde{z} \tag{15}$$

(пучок снова считается однородным по x с шириной a). Интеграл в формуле (15) не зависит от x и z и, по предположению, конечен (это спра-



Фиг. 2

ведливо как при $v_\sim \sim \exp\left(-\frac{mz}{2}\right)$, так и при $v_\sim \sim \frac{1}{z}$). Для не слишком удаленных от оси точек ($x \ll z$) из формулы (15) следует

$$u_{z0}^{(1)} = \frac{C_0}{z}(1 - x^2/z^2), \tag{16}$$

где $C_0 = \frac{a}{\pi}\int\limits_{z_m}^{\infty} \tilde{z}L(\tilde{z})\,d\tilde{z}$. На большом расстоянии от оси ($x \gg z$) $u_{z0}^{(1)}$ изменяется как z/x^2.

Что касается «свободной» части решения (второе слагаемое в формуле (14)), то при тех же условиях, что и для формулы (16), она имеет вид

$$u_{z0}^{(2)} = \frac{A}{z^3}\left(1 - \frac{Bx^2}{z^2}\right), \tag{17}$$

где $A = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2\varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x}$, $AB = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^4\varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x} + 6\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2\varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x}$.

Здесь учтено, что $\varphi(\tilde{x})$ — четная функция и $\int\limits_{-\infty}^{-\infty} \varphi(\tilde{x})\,d\tilde{x} = 0$, ввиду условия сохранения потока массы. Для $x \gg z$ имеем $u_{z0} \sim z/x^4$. Легко видеть, что при больших z, когда применимы решения (16)—(17), $u_{z0}^{(1)} \gg u_{z0}^{(2)}$ и, решение имеет вид (16). Заметим, что вблизи оси $u_{x0} \sim x/z^2$ и $u_{x0}/u_{z0} \sim x/z \ll 1$, а при больших $x - u_{x0} \sim 1/x$ и $u_{x0}/u_{z0} \sim x/z \gg 1$. Следовательно, линии тока расходятся от оси так, что поперечный масштаб потока растет пропорционально z. Вы-

бор координаты z, да и самой функции $u_{z0}(x, z_m)$ влияет лишь на параметры решения, но не на структуру потока при больших z.

Аналогично можно рассмотреть поток при больших x и произвольных z, так что $|x| \gg x_m$. Здесь справедливо уравнение Лапласа (формула (13) при $L(z)=0$) с некоторым граничным распределением $u_{z0}(x=x_m, z)=\varphi(\tilde{z})$, $u_{z0}(z=0, x)=0$, так что в выражении (14) первое слагаемое равно нулю, а граница S совпадает с плоскостями $x=\pm x_m$: $z=0$. Написав функцию Грина для соответственного угла, получим, в частности, что $u_{z0} \sim z/x^2$ при $|x-x_m| \gg z$, что согласуется с формулой (15).

4. Специального рассмотрения требует также область вблизи излучателя. Будем считать для определенности, что звуковой пучок создается твердым непроницаемым поршнем ширины a, в среднем неподвижным и расположенным при $z=z_1$, причем остальную часть плоскости $z=z_1$ (при $|x| > \frac{a}{2}$) также считаем жесткой поверхностью. Тогда при $z=z_1$ должно быть $u_{x0} \simeq u_{z0}=0$ *. Ясно, что плоскость z_1 нельзя просто отождествить с $z=0$ в решении (11), так как тогда граничное условие не выполняется. Кроме того, при $z=0$ решение (11) вообще неприменимо, поскольку не выполняется предположение, что $u_{x0} \ll u_{z0}$.

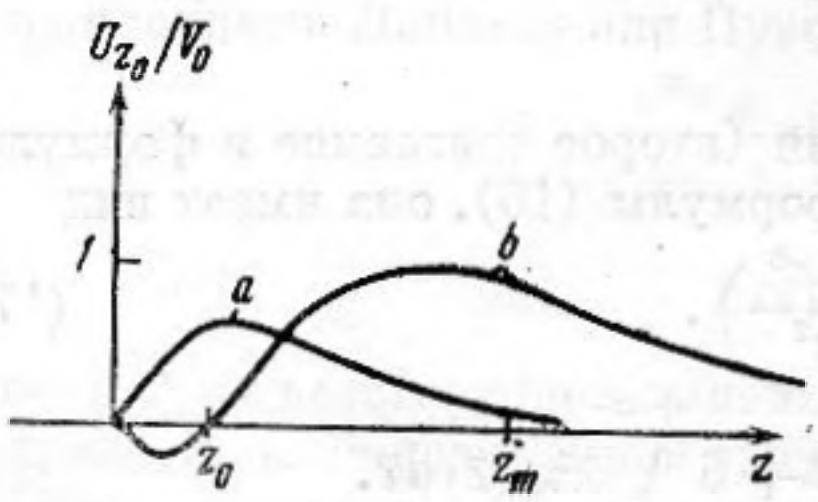
Вблизи поршня поток достаточно слабый и можно пользоваться линейным уравнением (13), откуда, в частности, для области вблизи оси, где $\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial z^2}$, имеем

$$u_{z0} \simeq -\mathrm{Re}_{\sim} v_{\sim} (z-z_1)^2/\Lambda\Lambda_{\parallel},$$
$$u_{x0} \simeq x(z-z_1)\,\mathrm{Re}_{\sim} v_{\sim}/\Lambda\Lambda_{\parallel}. \tag{18}$$

Эти формулы справедливы при $|z-z_1| \ll a$. Существенно, что здесь $u_{z0}<0$, а поскольку вдали от поршня $u_{z0}>0$, то на оси ($x=0$) должна существовать седловая точка $z=z_0$, в которой u_{z0} меняет направление. В окрестности этой точки еще справедливы линейные уравнения, причем, как легко показать, линии тока вблизи нее имеют вид

$$x(z-z_0)=\mathrm{const}. \tag{19}$$

Отсюда ясно, что сепаратрисы седла, т. е. линии тока, входящие в нее, вблизи $z=z_0$ горизонтальны. Для определения полной структуры течения в области от $z=0$ до $z>z_0$, переходящей в нелинейное течение, следует решать линейное уравнение (13) с условиями $u_{z0}=\frac{\partial u_{z0}}{\partial x}=0$ при $z=z_1$, $x=0$. Как известно, такая задача относится к классу некорректных и, хотя она имеет смысл, строгое решение ее затруднительно. Используя грубую аппроксимацию зависимости u_{z0} от x вблизи оси, можно показать, что если в окрестности точки $z=z_0$ поперечный масштаб течения становится порядка a, как в нелинейном решении (z_0 можно отождествить с $z=0$ в формуле (11)), то расстояние этой точки от поршня будет порядка a, а производная $\frac{du_{z0}}{dz}$ в ней — порядка $v_0^2 a \Lambda_{\parallel}^{-1}/\eta/\rho_0$ (а не бесконечна, как в формуле (11)). Это, как будет показано ниже, определяет время установления нелинейного потока. Таким образом, развитая теория дает возможность судить о структуре акустического потока во всем пространстве. На фиг. 2 показан примерный ход ли-



Фиг. 3

* Строго говоря, на поршне $u_{z0} \simeq -v^2 \sim/c_0$ [6], но это существенно лишь на расстояниях порядка длины звуковой волны.

ний тока, а на фиг. 3 — изменение u_{z0} вдоль оси потока (a — линейный ветер, $б$ — нелинейный); легко видеть, что u_{z0} имеет максимум при $z=z_m$, в то время как по линейной теории поток достигает своей максимальной величины уже на масштабе $\Lambda_\perp$ [2].

5. Чтобы судить о реальности полученных решений, следует рассмотреть процесс установления потока. Мы (подобно авторам работ [2, 3]) остановимся лишь на поведении нестационарного течения вблизи оси, где $u_{x0}=0$, а u_{z0} описывается уравнением

$$\frac{\partial u_{z0}}{\partial t}+u_{z0}\frac{\partial u_{z0}}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial z^2}-\frac{u_{z0}}{b^2}\right)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\langle v_\sim^2\rangle \tag{20}$$

при начальном условии $u_{z0}(0, z)=0$. Здесь $b^{-2}(z, t)=\left(\frac{\partial^2 u_{z0}}{u_{z0}\,\partial x^2}\right)_{x=0}$; определение b требует решения исходной системы (2), однако мы будем считать, что структура течения вблизи оси фиксирована (b=const). Разумеется, это довольно грубая идеализация, однако она в какой-то мере оправдана для нелинейной области (b задается шириной пучка) и достаточна для получения ряда важных закономерностей (заметим, что в работах [2, 3] принималась та же идеализация). В этой области, как отмечалось, $\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial z^2}\ll\frac{u_{z0}}{b^2}$. Тогда на начальном этапе установления, пока u_{z0} мало, а нелинейностью можно пренебречь, решение имеет вид [2]

$$u_{z0}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\langle v_\sim^2(z)\rangle\frac{1}{\nu}(1-\exp(-\nu t)), \tag{21}$$

где $\nu^{-1}=2b^2/\eta/\rho_0$; этот процесс имеет локальный характер и характеризуется временем $T_1\sim\nu^{-1}$. Однако по мере роста u_{z0} учет нелинейного члена становится необходимым. Характеристическая система для решения (21) $\left(\text{при } \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial z^2}=0\right)$ имеет вид

$$dt=\frac{dz}{u_{z0}}=\frac{du_{z0}}{\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\langle v_\sim^2\rangle-\nu u_{z0}\right)}. \tag{22}$$

Эта система легко интегрируется при $\nu=0$:

$$\frac{u_{z0}^2}{2}=\varphi(\xi)-\langle v_\sim^2(z)\rangle, \tag{23}$$

где $\xi=t-\int dz/u_{z0}$, φ — произвольная функция. Требуя, чтобы $u_{z0}(0, z)=0$, для $\varphi(\xi)$ получаем граничное условие: $\varphi(\xi_0)=\varphi(-\int\limits_{z_1}^{z} dz/u_{z0})=\langle v_\sim^2\rangle$. Тогда для случая экспоненциального затухания звука $\langle(v_\sim^2(z)\rangle=v_0^2\exp(-mz))$ после интегрирования вдоль характеристики нетрудно получить неявное выражение для $\varphi(z, t)$ *

$$\operatorname{th}(\Lambda_\parallel^{-1}\sqrt{\varphi}\,t)=\sqrt{1-\langle v_\sim^2(z)\rangle/v_0^2} \tag{24}$$

Из формул (23) и (24) следует, что значение u_{z0} переносится в сторону положительных z, нарастая по мере распространения. Время переноса конечно при сколь угодно больших z, поскольку в начальной точке с $u_{z0}=0$, согласно (11), $u_{z0}\sim\sqrt{z}$. Поэтому, хотя без учета вязкости решение и остается везде конечным, стационарное течение установиться не может. Однако выражение (24) может быть справедливо для ограниченного промежутка времени — до тех пор, пока в данную точку не придет характеристика из точки $u_{z0}=0$, и для определения времени установления нелинейной структуры необходимо учесть вязкость. При этом, как нетрудно показать, учет члена

* Это выражение отличается от приведенного в работе [3].

νu_{z0} в уравнении (22) не меняет качественно характера нестационарного процесса, описываемого решением типа (23), (24). Необходим учет члена $\nu\partial^2 u_{z0}/\partial z^2$, который становится определяющим вблизи точки z_0 и приведет к тому, что в окрестности этой точки u_{z0} меняется линейно с z ($u_{z0}\sim\beta z$). В результате время прихода потока из этой точки в любую другую ($T_2\sim\int dz/u_{z0}$) бесконечно (что и естественно для движения по сепаратрисе) и для каждой точки существует асимптотическое значение u_{z0}, отвечающее стационарному распределению. Время установления $T_2\sim(v_0^2 b\Lambda_\parallel^{-1}/\eta/\rho_0)^{-1}$.

Отметим, что из рассмотрения вопроса об устойчивости стационарного нелинейного потока на оси следует, что установившаяся структура (11) устойчива и время ее релаксации $\tau\sim\beta^{-1}$; это соответствует рассмотренному выше переходному процессу. Что касается учета поперечной структуры потока, то здесь лишь отметим, что, согласно формуле (12), нелинейный акустический поток характеризуется весьма большим «продольным» числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_\parallel=\Lambda_\perp u_{z0}/\eta/\rho_0$, а при $\mathrm{Re}_\parallel>10^2-10^3$ возможна, по-видимому, турбулизация потока с характерным масштабом $\Lambda_{\min}=\Lambda\,\mathrm{Re}_\sim^{-1}$. При этом для нелинейной структуры (11) с большим α_n величина $\mathrm{Re}_\perp$ меньше ($\Lambda_\perp\sim\alpha_n^{-1}$), т. е. она в известном смысле более устойчива по отношению к турбулизации. Заметим, что структура мод с большим α_n напоминает структуру течения, вызванного периодической внешней силой [7], для которого удается получить условия устойчивости. Однако вопрос об условиях реализации той или иной моды здесь не рассматривается.

6. Сделаем еще замечание относительно структуры акустических потоков в слое (трубе) конечной ширины $d>a$ с жесткими стенками. Если d достаточно велико, то внутри слоя везде справедливы полученные выше решения за исключением пограничного слоя с толщиной $\delta\ll a$. Если, в частности, δ меньше ширины нелинейной области, то нетрудно показать, что $\delta=\left(\dfrac{\exp(mz)\,\eta}{mv_0\rho_0}\right)^{1/2}$ и на расстояниях $z=z_0=\Lambda_\parallel\ln(d\,\mathrm{Re}_\perp/\Lambda_\parallel)$ становится порядка d, а при $z\gg z_\delta$ течение переходит в эккартовское. Если же $d\leqslant\Lambda_\parallel\,\mathrm{Re}_\parallel^{-1/2}$, то δ сравнимо с d уже на расстоянии порядка d и течение линейно практически везде. Отметим еще, что даже при выполнении неравенства обратного неравенству (12), когда нелинейность вообще несущественна, решение Эккарта справедливо лишь при достаточно малой ширине трубы ($d\ll\Lambda_\parallel$), в противном случае нарушается предположение о малости u_{x0}/u_{z0}.

В заключение отметим, что ряд выводов развитой здесь теории согласуется с данными экспериментов. В частности, описанная выше седловая структура течения вблизи излучателя наблюдалась в работе [8].

Авторы весьма признательны О. В. Руденко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Eckart. Vortices and streams caused by sound waves. Phys. Rev., 1948, **73**, 1, 68.
2. О. В. Руденко, С. И. Солуян. К теории нестационарного акустического ветра. Акуст. ж., 1971, **17**, 1, 122–125.
3. О. В. Руденко, С. И. Солуян. О немонотонности процесса установления акустического ветра. Акуст. ж., 1971, **17**, 2, 273–277.
4. А. И. Ивановский. Теоретическое и экспериментальное исследование потоков, вызванных звуком. М., Гидрометеоиздат, 1959.
5. Л. Д. Ландау, Е. Н. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
6. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. Введение в нелинейную акустику, М., «Наука», 1966.
7. В. И. Кляцкин. К нелинейной теории устойчивости периодических течений. ПММ, 1972, **36**, 2, 263.
8. Н. Г. Семенова. Экспериментальные исследования акустических течений, Канд. дисс., АКИН., М., 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
Горький

Поступила
24 августа 1972 г.