АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 2

УДК 534.23:532.528

РОСТ И ЗАМЫКАНИЕ ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Л. Левковский

Получено приближенное решение задачи о росте и замыкании парового пузырька в безграничном объеме вязкой несжимаемой жидкости, обладающей капиллярными свойствами, под действием постоянного перепада давлений. Сопоставление результатов численного и полученного приближенного решений свидетельствует о высокой точности последнего.

Рассмотрим расширение парового пузырька в безграничном объеме вязкой несжимаемой жидкости под действием не изменяющихся со временем растягивающих напряжений. Движение его границы описывается уравнением [1]

$$\xi\ddot{\xi}+\frac{3}{2}\dot{\xi}^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\dot{\xi}}{\xi}+\frac{W}{\xi}-1=0, \tag{1}$$

где $\xi=R/R_0$ — безразмерный радиус пузырька, $\dot{\xi}$ — безразмерная скорость, $\ddot{\xi}$ — безразмерное ускорение, $\tau=\frac{t}{R_0}\sqrt{z/\rho}$ — безразмерное время, $\mathrm{Re}=R_0\sqrt{z\rho}/4\mu$ — число Рейнольдса, $W=2\sigma/zR_0$ — число Вебера, R, R_0 — текущий и начальный радиус пузырька, t — время, ρ — плотность жидкости, $z=p_{\text{н}}-p_\infty$ — сумма давления насыщенных паров и растягивающих напряжений на бесконечности ($z=\mathrm{const}$), σ — капиллярная постоянная, μ — динамический коэффициент вязкости.

При пренебрежении вязкостью порядок уравнения (1) можно понизить. Использование начального условия $\xi=1$, $\dot{\xi}=0$ при $\tau=0$ дает результат

$$\dot{\xi}^2=\frac{2}{3}(1-\xi^{-3})\left(1-\frac{3}{2}W\frac{\xi^2-1}{\xi^3-1}\right). \tag{2}$$

В связи с тем, что $\dot{\xi}^2\geqslant 0$, рост пузырька может начаться только при условии

$$\frac{3}{2}W\frac{\xi^2-1}{\xi^3-1}\Big|_{\xi=1}=W\leqslant 1. \tag{3}$$

Знак равенства в этой формуле соответствует состоянию неустойчивого равновесия.

Выйдя из равновесия под действием случайного возмущения, пузырек к нему не вернется, а будет либо безгранично расти, либо полностью замкнется. Если начальный радиус пузырька мало отличается от равновесного, хотя и больше его, $W\leqslant 1$, влияние сил поверхностного натяжения на начальных стадиях расширения будет значительным. По мере расши-

рения пузырька скорость его роста очень быстро стремится к величине

$$\dot{\xi}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{3}{4}\frac{W}{\xi}\right). \tag{4}$$

При $\xi \gg 1$ скорость становится постоянной, $\dot{\xi}=\sqrt{2/3}$.

Интегрируя уравнение (4) с использованием начального условия $\xi=1$ при $\tau=0$, мы получим зависимость времени расширения от текущего радиуса пузырька:

$$\tau=\sqrt{\frac{3}{2}}\left[(\xi-1)+\frac{3}{4}W\ln\frac{\xi-3W/4}{1-3W/4}\right]. \tag{5}$$

При сохранении в уравнении (1) слагаемого, учитывающего влияние вязкости, его можно проинтегрировать лишь численно. Однако для некоторых предельных случаев можно получить приближенное аналитическое решение этого уравнения.

Предположим сперва, что влияние вязкости не является определяющим. Тогда в учитывающее влияние вязкости слагаемое уравнения (1) можно подставить асимптотическое значение скорости (4), вычисленное без учета этого влияния. Действительная скорость в результате диссипативных потерь и проявления капиллярных свойств жидкости должна быть меньше, поэтому в полученном решении роль вязкости будет преувеличенной. При сделанных допущениях уравнению (1) можно придать вид

$$\xi\ddot{\xi}+\frac{3}{2}\dot{\xi}^2+\frac{w}{\xi}-1=0, \tag{6}$$

где

$$w=W+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\mathrm{Re}}.$$

Рассматривая w как условное значение числа Вебера, мы вновь приходим к формулировке уже решенной задачи о расширении пузырька в невязкой жидкости. В связи с тем, что рост пузырька может начаться лишь при выполнении условия $w<1$, интеграл уравнения (6) имеет смысл только для чисел Рейнольдса, удовлетворяющих неравенству

$$\mathrm{Re}>\frac{\sqrt{2/3}}{1-W}. \tag{7}$$

Другой предельный случай, при котором возможно интегрирование уравнения (1), соответствует допущению, что движение целиком обусловлено вязкостью. При пренебрежении в уравнении (1) двумя первыми слагаемыми, характеризующими инерционные силы, оно приобретает вид

$$\dot{\xi}=\mathrm{Re}(\xi-W). \tag{8}$$

По смыслу сделанных допущений уравнение (8) справедливо при условии

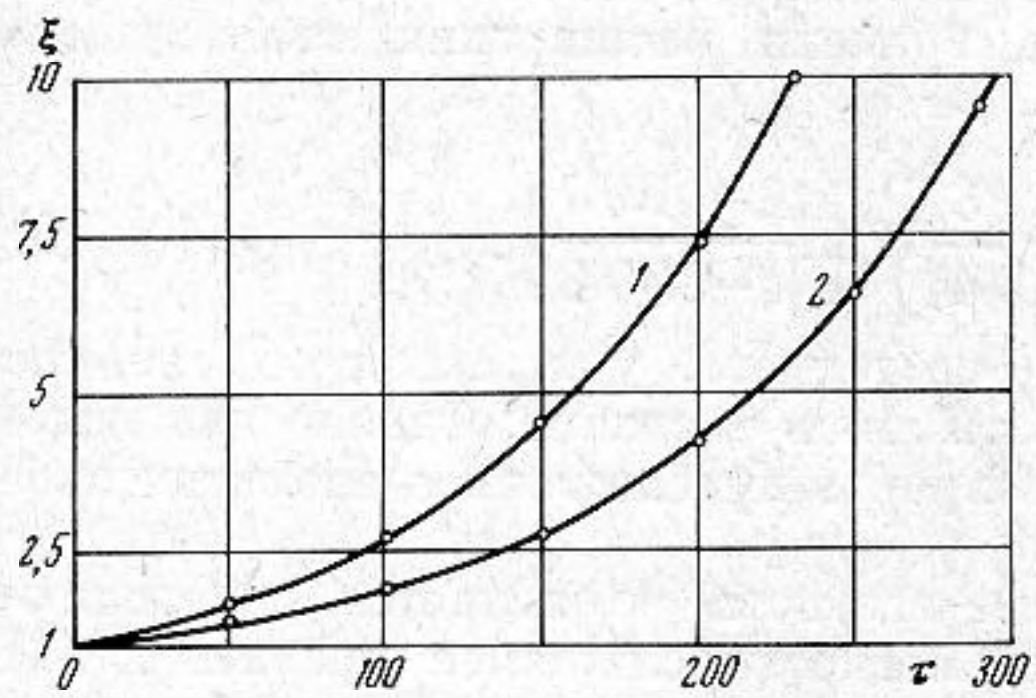
$$\mathrm{Re}\ll\frac{1}{\xi-W}. \tag{9}$$

В начальный момент скорость движения границы пузырька отлична от нуля, $\dot{\xi}=\mathrm{Re}(1-W)$, что противоречит формулировке начальных условий, используемых при решении уравнения (1). Это объясняется тем, что отсутствие движения границы пузырька при отличном от нуля перепаде давлений z может иметь место только вследствие наличия на учитываемых решением инерционных сил. В связи с малостью начальной скорости, $\dot{\xi}\sim\mathrm{Re}$, это отличие в начальных условиях не должно приводить к большим погрешностям на режимах развитого движения.

Интегрирование уравнения (8) с начальным условием $\xi=1$ при $\tau=0$ приводит к соотношению

$$\xi=e^{\mathrm{Re}\,\tau}-W(e^{\mathrm{Re}\,\tau}-1). \tag{10}$$

На фиг. 4 приводятся результаты сопоставления численного интегрирования уравнения (1) (сплошные линии) и расчета по последней формуле (точки) для двух случаев, удовлетворяющих условию (9): $\xi\leqslant 10$; $\mathrm{Re}=10^{-2}$; *1* – $W=0$ и *2* – $W=0{,}5$. Оба решения практически совпадают.



Фиг. 1

По мере расширения пузырька, при $\mathrm{Re}\geqslant(\xi-W)^{-1}$, влияние сил инерции становится преобладающим и уравнение (8) теряет смысл, свидетельствуя о безграничном росте скорости при $\xi\to\infty$, в то время как по ранее доказанному асимптотическое значение скорости в этих условиях описывается выражением (4).

Попытаемся получить приближенное решение задачи о расширении пузырька в вязкой жидкости, справедливое во всем диапазоне изменения чисел Рейнольдса. Сшивая решения уравнения (1) при $\mathrm{Re}\,\xi\to 0$ и $\mathrm{Re}\,\xi\to\infty$, аппроксимируем скорость расширения пузырька выражением

$$\dot{\xi}=\frac{\mathrm{Re}(\xi-W)}{1+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\mathrm{Re}(\xi-W)}{1-\frac{3W}{4}\cdot\frac{\alpha\,\mathrm{Re}}{1+\alpha\,\mathrm{Re}}}-\beta\,\mathrm{Re}(\xi-W)\,e^{-\mathrm{Re}(\xi-W)}}, \tag{11}$$

где α, β – постоянные, численное значение которых определяется путем сопоставления полученного приближенного решения с точным: $\alpha\approx 5$, $\beta\approx\sqrt{2/3}$.

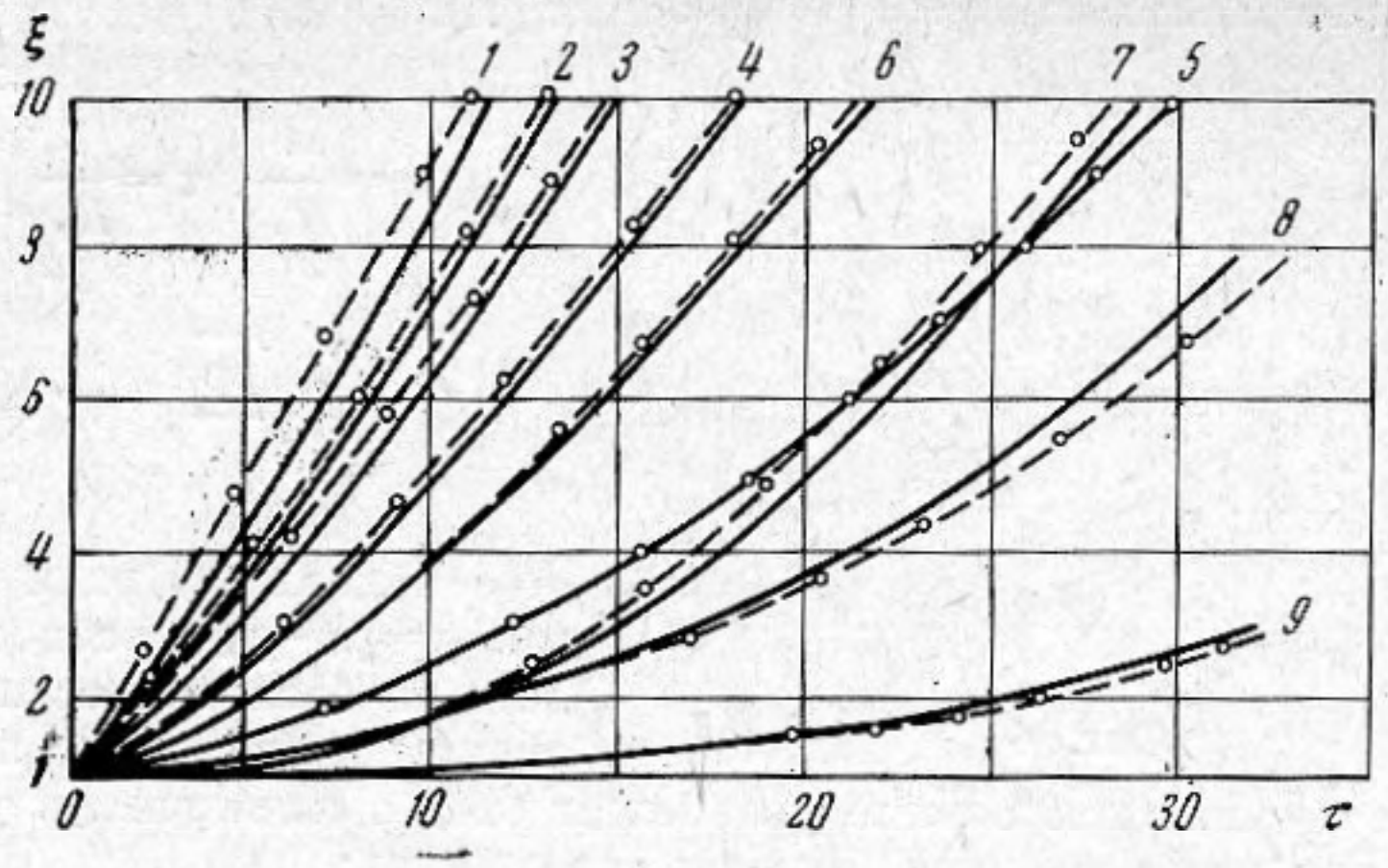
Интегрирование уравнения (11) с начальным условием $\xi=1$ при $\tau=0$ приводит к результату

$$\tau=\sqrt{\frac{3}{2}}(\xi-1)+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3W}{4}\ln\frac{\xi-\frac{3W}{4}}{1-\frac{3W}{4}}-$$

$$-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3W}{4}\ln\frac{5\,\mathrm{Re}+\frac{4}{4-3W}}{5\,\mathrm{Re}+\frac{4}{4\xi-3W}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\ln\frac{\xi-W}{1-W}-\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\xi-1)}\right)e^{-\mathrm{Re}(1-W)}\right]. \tag{12}$$

Два первых слагаемых этого выражения характеризуют время роста пузырька в невязкой жидкости, а три последних – увеличение времени роста вследствие влияния вязкости.

На фиг. 2 приведены результаты сопоставления точного (сплошные линии) и приближенного решений (штриховые линии) при различных значениях чисел Рейнольдса и Вебера: *1* – $\mathrm{Re}\to\infty$, $W=0$; *2* – $\mathrm{Re}=1$, $W=0$; *3* – $\mathrm{Re}=0{,}5$, $W=0$; *4* – $\mathrm{Re}=0{,}25$, $W=0$; *5* – $\mathrm{Re}=0{,}1$, $W=0$; *6* – $\mathrm{Re}=0{,}25$, $W=0{,}5$; *7* – $\mathrm{Re}=0{,}25$, $W=0{,}9$; *8* – $\mathrm{Re}=0{,}1$, $W=0{,}5$; *9* – $\mathrm{Re}=0{,}1$, $W=0{,}9$. Как видно, их соответствие является хорошим и формулу (12)



Фиг. 2

можно рассматривать как универсальную зависимость, связывающую время роста пузырька и его радиус, справедливую при $0<\mathrm{Re}<\infty$, $0<W\leqslant 1$.

Для оценки влияния вязкости и капиллярных сил на уменьшение радиуса, достигаемого пузырьком за определенный промежуток времени, формулу (12) удобно представить в виде

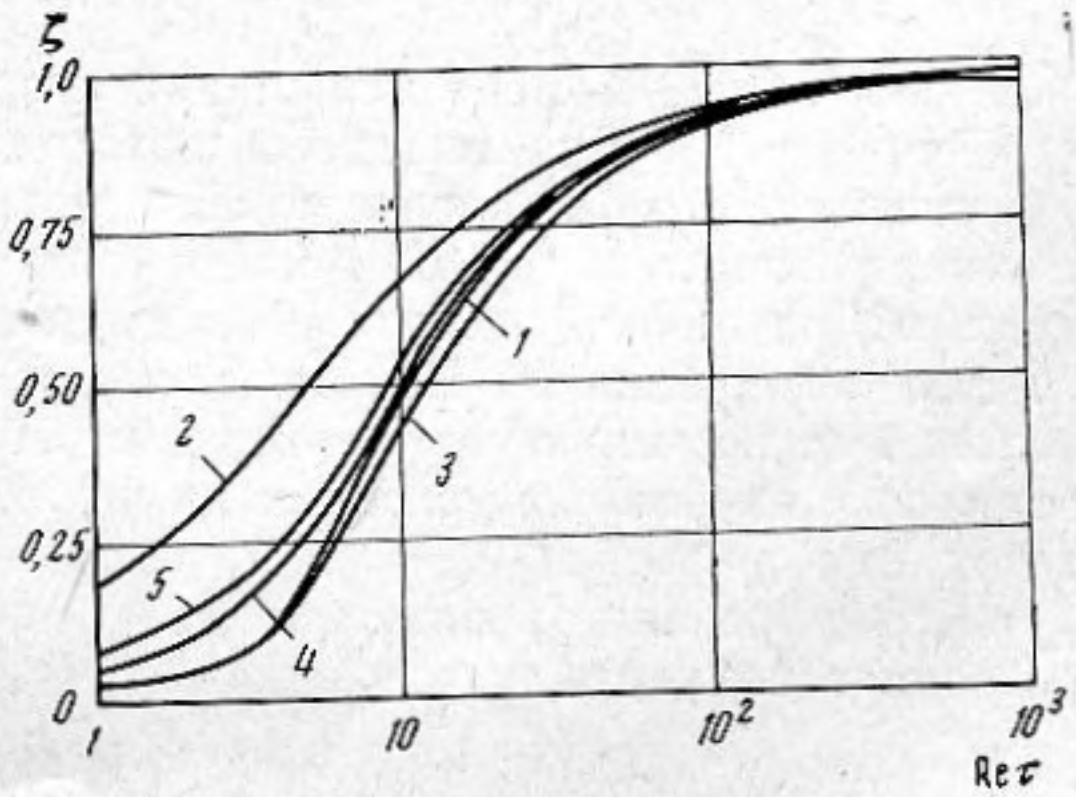
$$\zeta=\frac{\xi-1}{\sqrt{2/3}\,\tau}=1-\frac{1}{\mathrm{Re}\,\tau}\left[\ln\frac{\xi-W}{1-W}-\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1-e^{-\mathrm{Re}(\xi-1)}\right)e^{-\mathrm{Re}(1-W)}\right]-$$

$$-\frac{3}{4}\frac{W}{\tau}\ln\frac{\xi-\frac{3W}{4}+\frac{1}{5\,\mathrm{Re}}}{1-\frac{3W}{4}+\frac{1}{5\,\mathrm{Re}}}. \qquad (13)$$

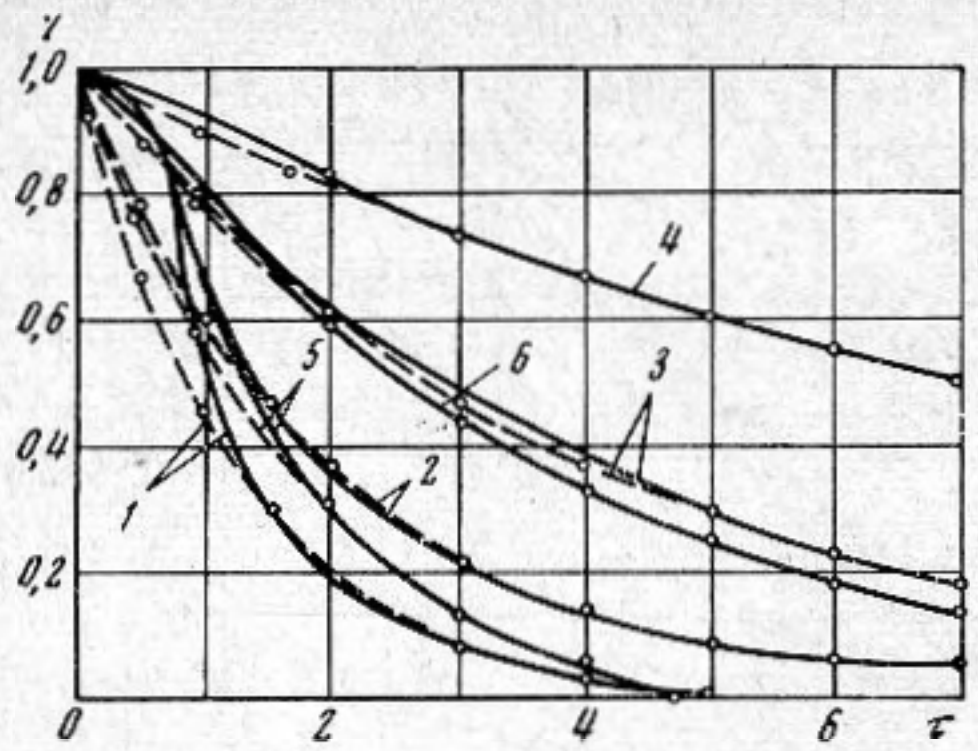
Хорошо видно, что с течением времени относительная доля слагаемых, характеризующих влияние этих факторов, уменьшается. Результаты расчетов по последней формуле представлены на фиг. 3: *1* – Re=0,01, $W=0$; *2* – Re=0,1, $W=0$; *3* – Re=0,1, $W=0{,}9$; *4* – Re=0,25, $W=0{,}9$; *5* – Re=0,5, $W=0{,}9$. Их анализ показывает, что при $\mathrm{Re}\ll 1$ влиянием вязкости можно пренебречь ($\zeta\geqslant 0{,}9$), если $\mathrm{Re}\,\tau\geqslant 10^2$, т. е. время роста пузырька $t\geqslant 400$ μ/*z*. Наоборот, при $\mathrm{Re}\,\tau\leqslant 10$, т. е. при $t\leqslant 400$ μ/*z*, это влияние оказывается весьма существенным.

Уравнение движения границы пузырька, замыкающегося в вязкой несжимаемой жидкости под действием не изменяющегося со временем избыточного давления, имеет вид [1]

$$\eta\ddot{\eta}+\frac{3}{2}\dot{\eta}^2+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\dot{\eta}}{\eta}+ \qquad (14)$$
$$+\frac{W}{\eta}+1=0,$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где

$$\eta=\frac{R}{R_0},\ \tau=\frac{t}{R_0}\sqrt{\frac{p}{\rho}},$$

$$\mathrm{Re}=\frac{R_0\sqrt{p\rho}}{4\mu},\quad W=\frac{2\sigma}{pR_0},$$

R_0 — начальный радиус пузырька, $p=p_\infty-p_н$ — разность давлений на бесконечности и насыщенных паров (p=const).

При $\mathrm{Re}\to\infty$ интегрирование уравнения (14) с начальными условиями $\eta=1$, $\dot\eta=0$ при $\tau=0$ позволяет понизить его порядок:

$$\dot\eta^2=\frac{2}{3\eta^3}(1-\eta^3)\left(1+\frac{3}{2}W\frac{1-\eta^2}{1-\eta^3}\right). \tag{15}$$

Это уравнение отличается от классического решения Рэлея [2], не учитывающего влияние капиллярных сил, последним сомножителем.

Приближенное решение уравнения (14) в случае слабого влияния вязкости на процесс замыкания может быть выполнено с помощью того же приема, который использовался при исследовании роста пузырька. При этом для подстановки в слагаемое, учитывающее влияние вязкости, используется асимптотическое значение скорости $\dot\eta=-\sqrt{2/3}\,\eta^{-3/2}$.

В результате мы получим для скорости замыкания выражение [3]

$$\dot\eta^2\approx\begin{cases}\dfrac{2}{3\eta^3}(1-\eta^3)\left(1+W-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\right) & \text{при } \eta\leqslant1,\\[2ex] \dfrac{2}{3\eta^3}\left(1+\dfrac{3}{2}W-2\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\right) & \text{при } \eta\to0.\end{cases} \tag{16}$$

Точность полученного решения растет при $\mathrm{Re}\to\infty$, а его применимость ограничена условием

$$\mathrm{Re}>2\sqrt{6}/1+{}^3/_2W. \tag{17}$$

При замыкании небольших пузырьков в очень вязких жидкостях влияние вязкости может оказаться преобладающим. В этом случае уравнение (14) после пренебрежения инерционными членами приобретает вид

$$\dot\eta=-\mathrm{Re}(\eta+W). \tag{18}$$

В начальный момент замыкания скорость оказывается максимальной $\dot\eta_м=-\mathrm{Re}(1+W)$. Причина несоответствия этого вывода с формулировкой начальных условий, используемых при решении уравнения (14), подробно анализировалась выше. Как бы ни были малы инерционные силы в последующем, на начальных этапах замыкания движение должно ими полностью определяться. Вместе с тем из-за слабого влияния начальных условий на последующее движение пузырька, регулируемое вязкостью, это отличие в начальных условиях не должно сильно сказываться на результатах при $\eta\ll1$.

Интегрирование уравнения (18) с начальным условием $\eta=1$ при $\tau=0$ позволяет получить выражение

$$\eta=e^{-\mathrm{Re}\,\tau}-W(1-e^{-\mathrm{Re}\,\tau}). \tag{19}$$

Положив в этой формуле $\eta=0$, определим время, в течение которого происходит замыкание пузырька:

$$\Delta\tau=\frac{1}{\mathrm{Re}}\ln\frac{1+W}{W}. \tag{20}$$

В гипотетической жидкости, лишенной капиллярных свойств, $W=0$, время замыкания пузырька бесконечно велико.

Таким образом, при очень малых и очень больших значениях чисел Рейнольдса решения уравнения (14) качественно различны: в первом случае скорость по мере замыкания уменьшается, стремясь к постоянной величине, $\dot{\eta}\to W\cdot\mathrm{Re}$ при $\eta\to 0$, а во втором — безгранично растет. Следовательно, должно существовать такое критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_*<2\sqrt{6}(1+{}^3/_2W)^{-1}$, при котором происходит это качественное изменение поведения решения уравнения (14). Численный анализ показывает, что $\mathrm{Re}_*\approx 2{,}1$ [3, 4]. Точность соотношений (19) и (20) должна расти при уменьшении отношения $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_*$ и может быть оценена путем сопоставления с численным решением уравнения (14). Результаты такого сопоставления представлены на фиг. 4 и свидетельствуют о хорошем соответствии приближенного и точного решений при $\eta\ll 1$ даже в случае $\mathrm{Re}\approx 0{,}4\mathrm{Re}_*$: точное решение — сплошные линии, приближенное решение — пунктир; *1* — $\mathrm{Re}=0{,}8$, $W=0$; *2* — $\mathrm{Re}=0{,}5$, $W=0$; *3* — $\mathrm{Re}=0{,}25$, $W=0$; *4* — $\mathrm{Re}=0{,}1$, $W=0$; *5* — $\mathrm{Re}=0{,}5$, $W=0{,}1$; *6* — $\mathrm{Re}=0{,}25$, $W=0{,}05$. При $\mathrm{Re}\leqslant 0{,}1$ движение целиком определяется вязкостью практически с начального момента замыкания пузырька.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Перник. Проблемы кавитации, Л., «Судостроение», 1965.
2. Rayleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity, Philos. Mag., 1917, 34, 94–98.
3. Ю. Л. Левковский, В. П. Ильин. Влияние поверхностного натяжения и вязкости жидкости на замыкание кавитационной каверны. Инж.-физ. ж., 1968, 14, 5, 903–908.
4. Е. И. Забабахин. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. Прикл. матем. и мех., 1960, 24, 6, 1129–1131.

Поступила
18 ноября 1972 г.