

УДК 534.213

АКУСТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ С КОНИЧЕСКОЙ ВХОДНОЙ ЧАСТЬЮ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

А. Н. Руденко, И. С. Шлыкова, В. Л. Эпштейн

Исследованы частотные характеристики сверхзвуковых сопел с конической входной частью. Эти характеристики используются при определении собственных частот и инкрементов для цилиндрической камеры с коническим соплом. Результаты численных расчетов показывают, что сопло при поперечных колебаниях в отличие от продольных не является источником потерь и может оказывать дестабилизирующее влияние.

В ряде вопросов, связанных в основном с исследованием высокоскоростных, высокотемпературных течений (в ракетной и авиационной технике, в МГД-генераторах и т. п.), возникает необходимость в определении акустических характеристик сверхзвуковых сопел. Например, эти характеристики используются в качестве граничного условия при рассмотрении высокочастотной неустойчивости процесса горения в камерах сгорания. Возникающие в цилиндрической части камеры сгорания колебания имеют сложную структуру и могут быть представлены в виде известных разложений по собственным функциям соответствующего волнового оператора. Однако в подавляющем большинстве работ рассматривается устойчивость по отношению к определенной форме (моду) колебаний, представляющей собой комбинацию нескольких (обычно двух) членов указанного разложения. Такой подход в основном соответствует опытным данным, которые показывают, что в большинстве случаев (но не всегда) доминирующее значение имеет одна форма колебаний. В соответствии с этим в настоящей работе рассматриваются акустические характеристики по отношению к так называемым продольным колебаниям (направление вектора пульсационной скорости параллельно оси цилиндра) и акустическая проводимость по отношению к одной из форм «продольно-поперечных» (комбинированных), т. е. трехмерных колебаний. В последнем случае характер изменения амплитуд по поперечному сечению такой же, как и у одной из форм (мод) собственных радиально-тангенциальных колебаний (неподвижного в среднем) столба газа, заключенного в прямой цилиндрический объем.

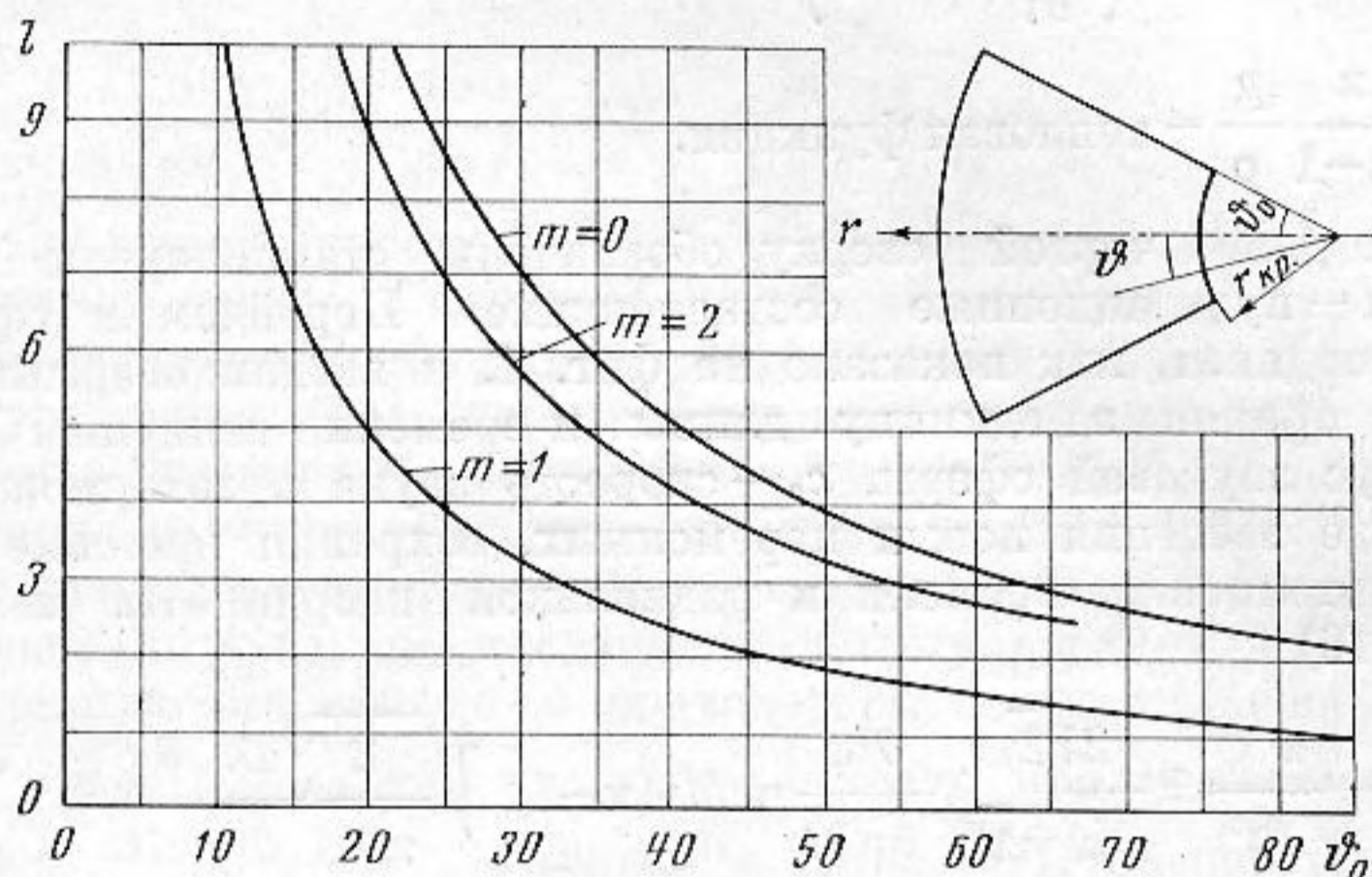
Наиболее часто встречающейся характеристикой сопла является безразмерная акустическая проводимость, определяемая как отношение комплексных амплитуд осевой составляющей скорости и давления, умноженное на волновое сопротивление среды

$$\eta = \delta + i\sigma = \rho c \frac{\dot{v}_x}{\dot{p}}$$

Динамика сверхзвуковых сопел впервые исследовалась, по-видимому, в работах [1, 2]. В этих работах рассматривался случай одномерных колебаний и получены численные результаты для сопел с линейным рас-

пределением скорости, как при изоэнтропических, так и при неизоэнтропических колебаниях. В более поздней работе [3] задача об отражении сопла была рассмотрена в трехмерной постановке.

В работах [4, 5] рассмотрена задача о распространении колебаний конечной амплитуды в соплах с малой крутизной профиля. В качестве независимых переменных использовались функция тока ψ и потенциал Φ стационарного течения. Предположение о малой крутизне профиля позволило заменить поверхности $\Phi = \text{const}$ плоскостями, перпендикулярными оси сопла, что упростило уравнения. Авторы использовали метод малого параметра и подробно рассмотрели лишь уравнения второго приближения. Решение уравнений и численные результаты в работе не приводятся.



Фиг. 1

Численное решение нелинейной задачи об отражении одномерных возмущений от сопел приведено в работе [6]. Сравнение этого решения с линейной теорией, проведенное в работе [6], показало, что при не очень больших частотах обе теории дают практически одинаковые результаты.

В настоящей статье рассмотрены частотные характеристики сопел с конической дозвуковой частью. Такая форма сопла позволяет получить точное решение задачи (в рамках линейной теории), и в то же время результаты расчетов могут быть использованы для оценки частотных характеристик и собственных частот камер с соплами реальной формы путем аппроксимации реального профиля коническим.

Рассмотрим распространение малых колебаний в коническом сопле, заполненном вязким нетеплопроводным газом. Система координат показана на фиг. 1. Стационарный поток считается одномерным. На сфере радиуса r_{kp} достигается скорость, равная скорости звука. Течение предполагается безвихревым, а колебания — изоэнтропическими. Заметим, что в ряде случаев возникает необходимость в рассмотрении вихревых и энтропийных волн, однако здесь эти случаи не рассматриваются. В указанных предположениях уравнения сохранения имеют вид

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \mathbf{v} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0.$$

Вместо уравнения энергии используется условие изоэнтропичности

$$(3) \quad \frac{p}{\rho^*} = \text{const.}$$

Линеаризуя уравнения (1)–(3) и вводя потенциал для пульсационной составляющей скорости

$$(4) \quad v' = \nabla \varphi,$$

получим

$$(5) \quad p' = -\bar{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \nabla \varphi \right),$$

$$(6) \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\bar{v} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \bar{v} \nabla (\bar{v} \nabla \varphi) + \nabla \varphi \nabla \bar{w} + c^2 \Delta \varphi -$$

$$-(\kappa - 1) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v} \nabla \varphi \right) \nabla \bar{v} = 0,$$

где $\bar{w} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}$ — тепловая функция.

Здесь и далее чертой сверху обозначены стационарные величины, а штрихом — пульсационные составляющие. Перейдем к сферической системе координат, как показано на фиг. 1, и введем безразмерные переменные, приняв за единицу длины и времени величины $r_{кр}$ и $r_{кр}/c_0$ ($r_{кр}$ — радиус звуковой сферы, c_0 — скорость звука в заторможенном потоке). После введения новых переменных, сохраняя прежние обозначения для потенциала, времени и радиальной координаты, получим из уравнения (6)

$$(7) \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa+1}} \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + M^2 (\kappa - 1) \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} \frac{d\lambda}{dr} \frac{\partial \varphi}{\partial t} +$$

$$+ \left[2 \frac{\tau(\lambda)}{r} - \frac{\lambda}{\tau(\lambda)} \frac{4}{\kappa+1} \frac{d\lambda}{dr} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\tau(\lambda)}{r^2} \Delta_{\theta, \psi} \varphi = 0,$$

где $\Delta_{\theta, \psi}$ — двумерный оператор Лапласа, $\tau(\lambda) = \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 = \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right)$

$\lambda = \frac{v}{c_{кр}} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}} \frac{v}{c_0}$, $M = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} \frac{\lambda}{\sqrt{\tau(\lambda)}}$ — известные газодинамические

функции. Связь между λ и r находится из уравнения неразрывности

$$(8) \quad r = \frac{1}{\sqrt{q(\lambda)}},$$

где $q(\lambda) = \lambda \left[\frac{\kappa+1}{2} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2 \right) \right]^{\frac{\kappa-1}{2}}$

Решение уравнения (7) ищется методом разделения переменных

$$(9) \quad \varphi = R(r) Y(\theta, \psi) e^{st},$$

где $s = \gamma - i\omega$ — комплексная частота. Проводимость сопла ищется при $\gamma = 0$. Решения с комплексным s необходимы для определения собственных частот и инкрементов. После подстановки формулы (9) в уравнение (7) и разделения переменных получим следующие уравнения:

$$(10) \quad \Delta_{\theta, \psi} Y + kY = 0,$$

$$(11) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{1-\lambda^2} \left[\frac{2}{r} \tau(\lambda) + \frac{8}{\kappa+1} \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \sqrt{q(\lambda)} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa+1}} \lambda s \right] \frac{dR}{dr} +$$

$$+ \frac{1}{1-\lambda^2} \left[-s^2 - M^2 (\kappa - 1) \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} \frac{2\lambda \tau(\lambda) \sqrt{q(\lambda)}}{1-\lambda^2} s - \frac{\tau(\lambda) k}{r^2} \right] R = 0,$$

где k — константа разделения. Для продольных колебаний $k=0$, а для продольно-поперечных колебаний ее величина (собственное значение) определяется из краевых условий

$$(12) \quad \left(\frac{dY}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_0} = 0,$$

означающих, что нормальная составляющая скорости на конической поверхности равна нулю. Разделяя далее переменные в уравнении (10), получим

$$(13) \quad \begin{aligned} Y &= \Theta(\vartheta) \Phi(\psi), \\ \frac{d^2 \Phi}{d\psi^2} + m^2 \Phi &= 0, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[k - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta &= 0. \end{aligned}$$

Из условия однозначности по углу ψ следует, что множитель Φ должен быть периодическим с периодом 2π . Отсюда получаем, что m — целое число и собственными функциями будут $\sin m\psi$ и $\cos m\psi$. Частными решениями уравнения (13), удовлетворяющим условию (12), являются присоединенные функции Лежандра $P_l^m(\cos \vartheta)$, $k=l(l+1)$.

Собственные значения l определяются из условия (12). Зависимость l от ϑ_0 и m приведена на фиг. 1. Найденные значения k следует подставить в уравнение (11) для численного интегрирования. Это уравнение имеет регулярную особенность в критическом сечении. Можно показать (пользуясь уравнением (8)), что коэффициенты при R и $\frac{dR}{dr}$ как функции r , имеют полюс первого порядка в точке $r=1$. Следовательно, одно из двух линейно независимых решений обращается в этой точке в бесконечность [7].

Переходя в формуле (11) к независимой переменной λ , получим

$$(14) \quad \begin{aligned} 4\lambda^2 q(\lambda) \frac{d^2 R}{d\lambda^2} + \left[2q(\lambda) (1+M^2) - 4\sqrt{q(\lambda)} \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}} M^2 s \right] \frac{dR}{d\lambda} + \\ + \left[-\frac{s^2}{\tau(\lambda)} (1-M^2) - 2(\kappa-1) \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} \frac{M^2 \lambda}{\tau(\lambda)} \sqrt{q(\lambda)} s - \right. \\ \left. - kq(\lambda) (1-M^2) \right] R = 0. \end{aligned}$$

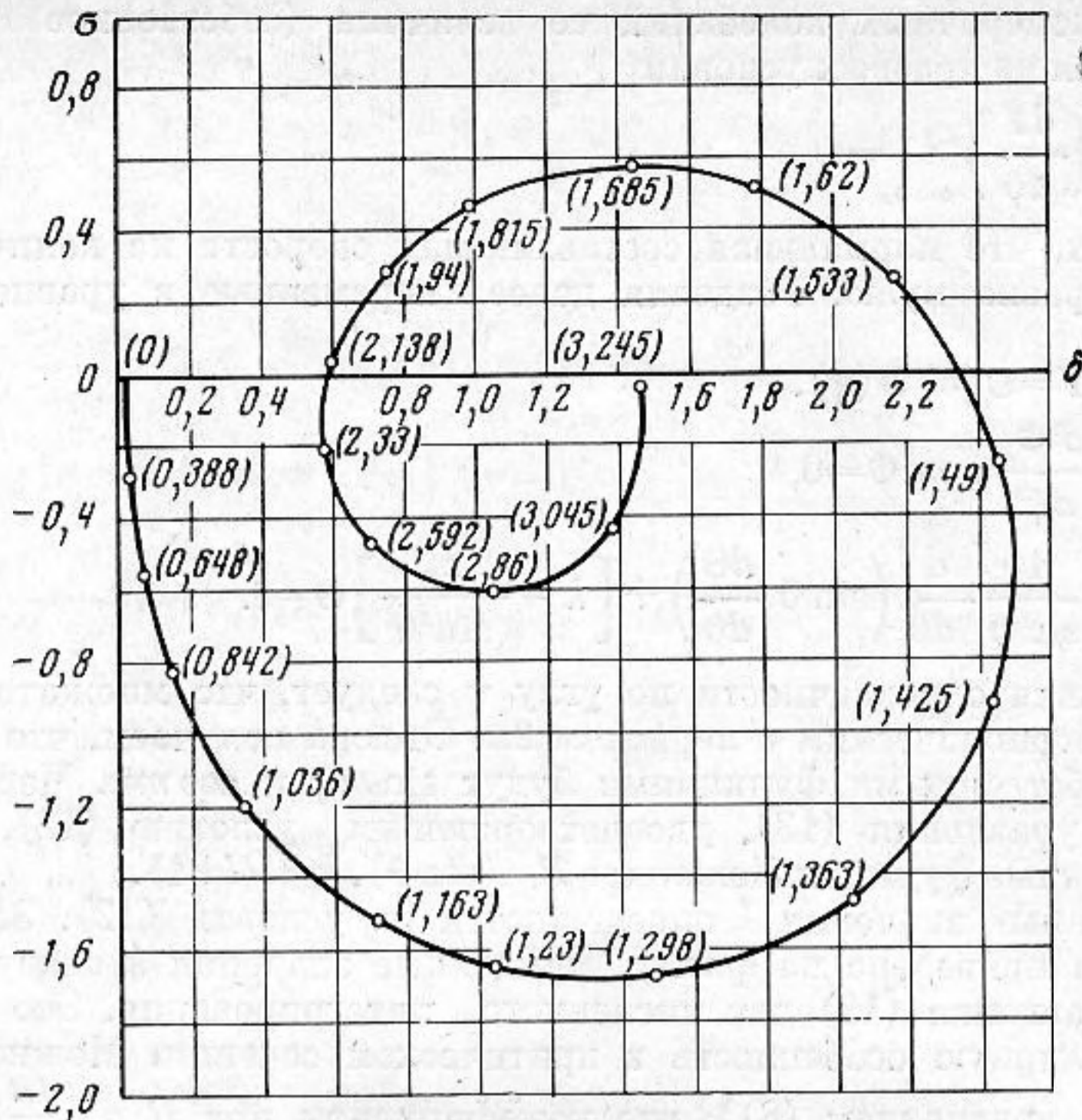
Это уравнение уже не имеет особенности при $\lambda=1$, и численное интегрирование может быть легко выполнено, начиная с $\lambda=1$. Выражение для проводимости получим из формул (4) и (5)

$$(15) \quad \eta = -\rho c \frac{\dot{v}_r}{\dot{p}} = \frac{1}{\frac{c_0}{c} s \frac{R}{dR/dr} - M}$$

Поскольку уравнение (14) является уравнением второго порядка, то из формулы (15) следует, что для определения проводимости достаточно знать решение с точностью до постоянного множителя, и граничное условие для R при $\lambda=1$ несущественно. Второе граничное условие имеет вид

$$(16) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{dR}{d\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{dR}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = 0,$$

так как акустическая скорость должна быть ограничена, а $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{dr}{d\lambda} = 0$.



Фиг. 2

Вычислив при помощи уравнения (14) коэффициенты разложения R в ряд по $(1-\lambda)$ и пользуясь соотношениями (15) и (16), можно показать, что в критическом сечении выполняется условие квазистационарности

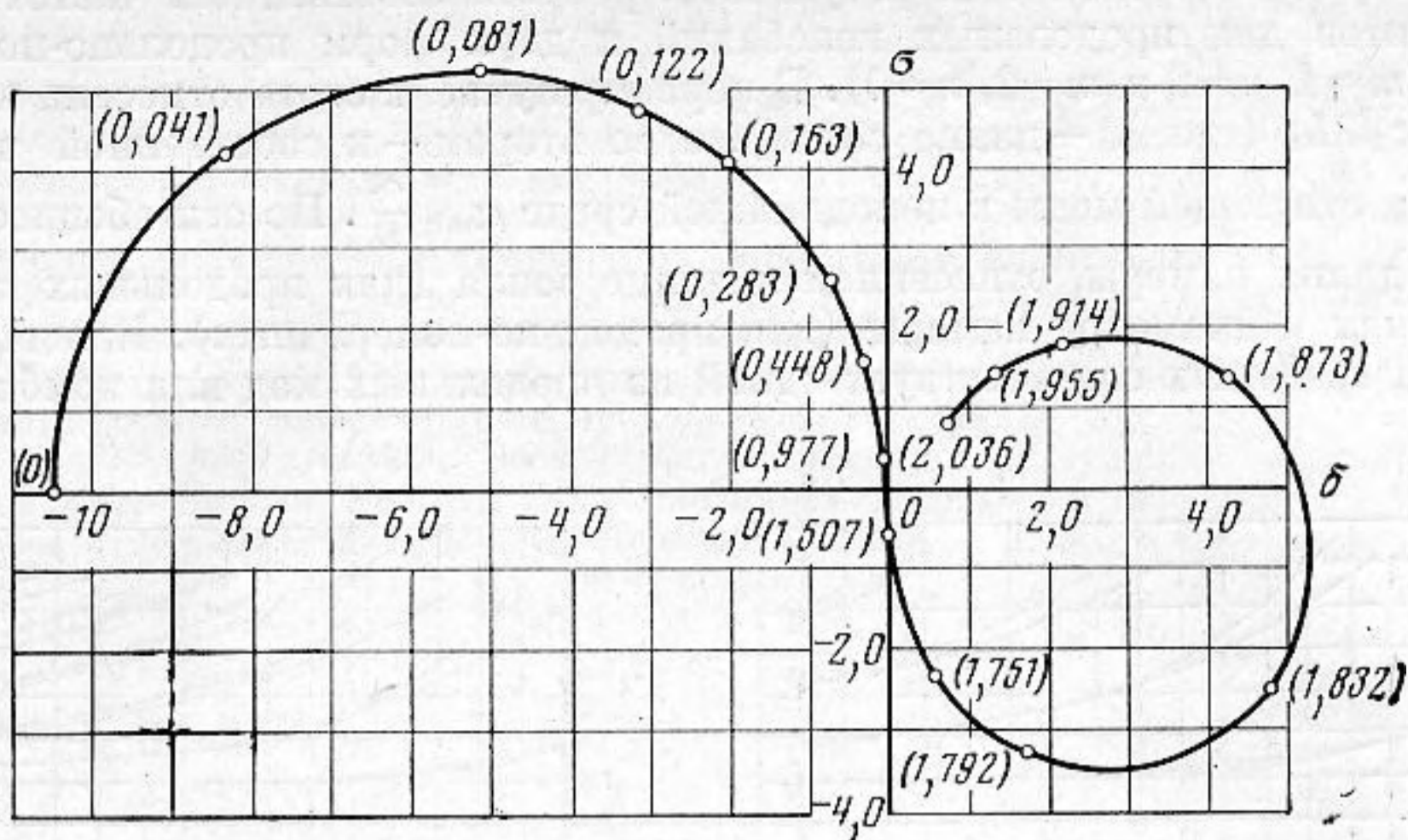
$$\eta_{\lambda=1} = \frac{\kappa-1}{2}.$$

Для определения входного импеданса сопла (точнее — на сфере $\lambda=\lambda_{\text{вх}}$) уравнение (14) необходимо проинтегрировать в интервале $(\lambda_{\text{вх}}, 1)$, при граничном условии (15), при $s=-i\omega$ и полученное решение подставить в формулу (16).

Ниже приводятся результаты расчета для $\lambda_{\text{вх}}=0,1$. Численное интегрирование проводилось на ЭВМ БЭСМ-3М методом Рунге — Кутты с постоянным шагом, равным 0,01. На фиг. 2 показан годограф акустической проводимости конического сопла для продольных колебаний. Цифры у кривых означают безразмерную частоту $\omega r_{\text{кр}}/c$. При продольных колебаниях (в отличие от продольно-поперечных) эта характеристика определяется только величиной $\lambda_{\text{вх}}$ и не зависит от угла конусности ϑ_0 , так как последний не входит в уравнения.

На фиг. 3 показан годограф акустической проводимости сопла с углом конусности $\vartheta_0=30^\circ$ для первой радиально-тангенциальной формы продольно-поперечных колебаний ($m=1, n=0, \kappa=1,2$). Частота отнесена к собственной частоте рассматриваемой моды, определенной по диаметру и скорости звука во входном сечении.

При больших частотах ($\bar{\nu} \rightarrow \infty$) сопло при продольно-поперечных колебаниях ведет себя так же, как при продольных. Годограф имеет вид спирали, лежащей в правой полуплоскости, сворачивающейся к точке $\eta=1$. Но при частотах, близких к собственной частоте ($\bar{\nu} \approx 1$) и меньших ее, имеется существенное отличие: годограф переходит в левую полуплоскость

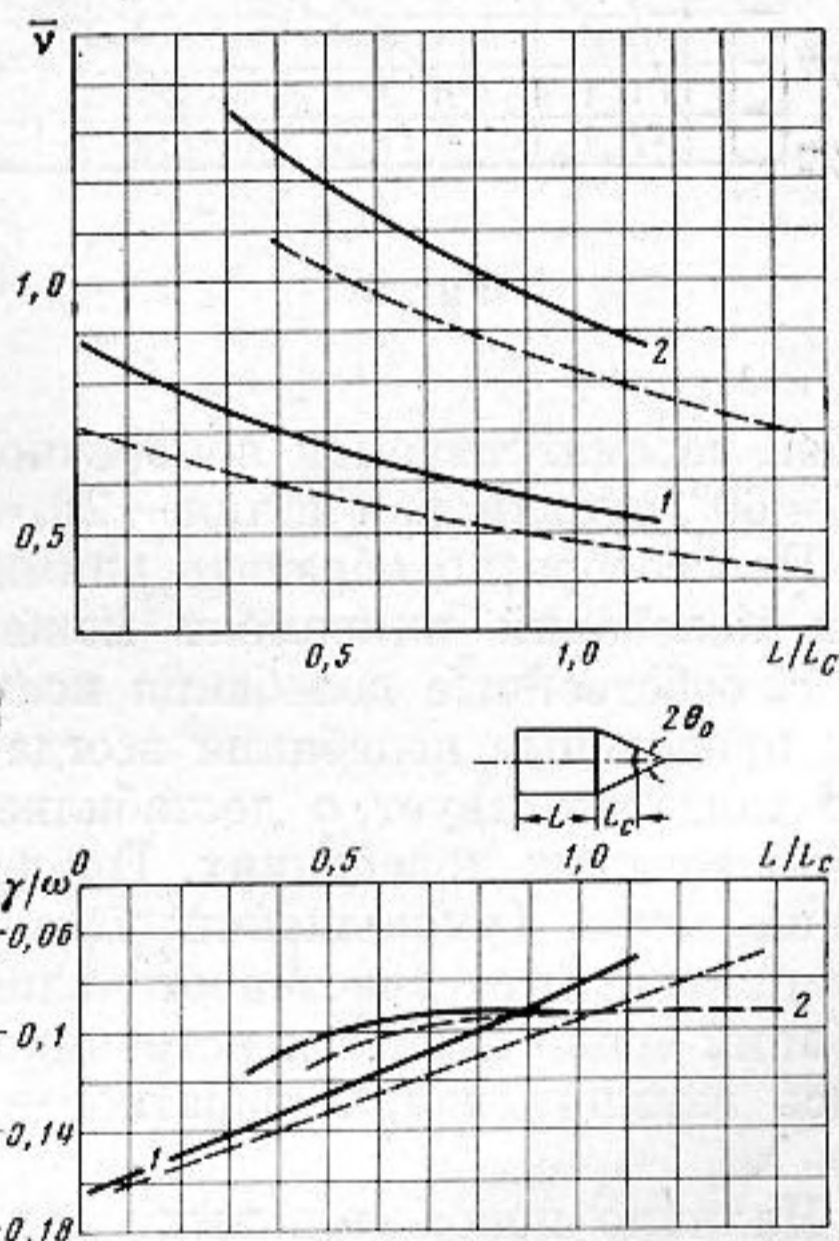


Фиг. 3

и вещественная часть проводимости становится отрицательной. Таким образом, в окрестности собственной частоты δ очень малой (значительно меньше, чем при продольных колебаниях). Это означает, что поток акустической энергии через сопло определяется в основном конвективным переносом и может стать отрицательным, если $\delta=0$.

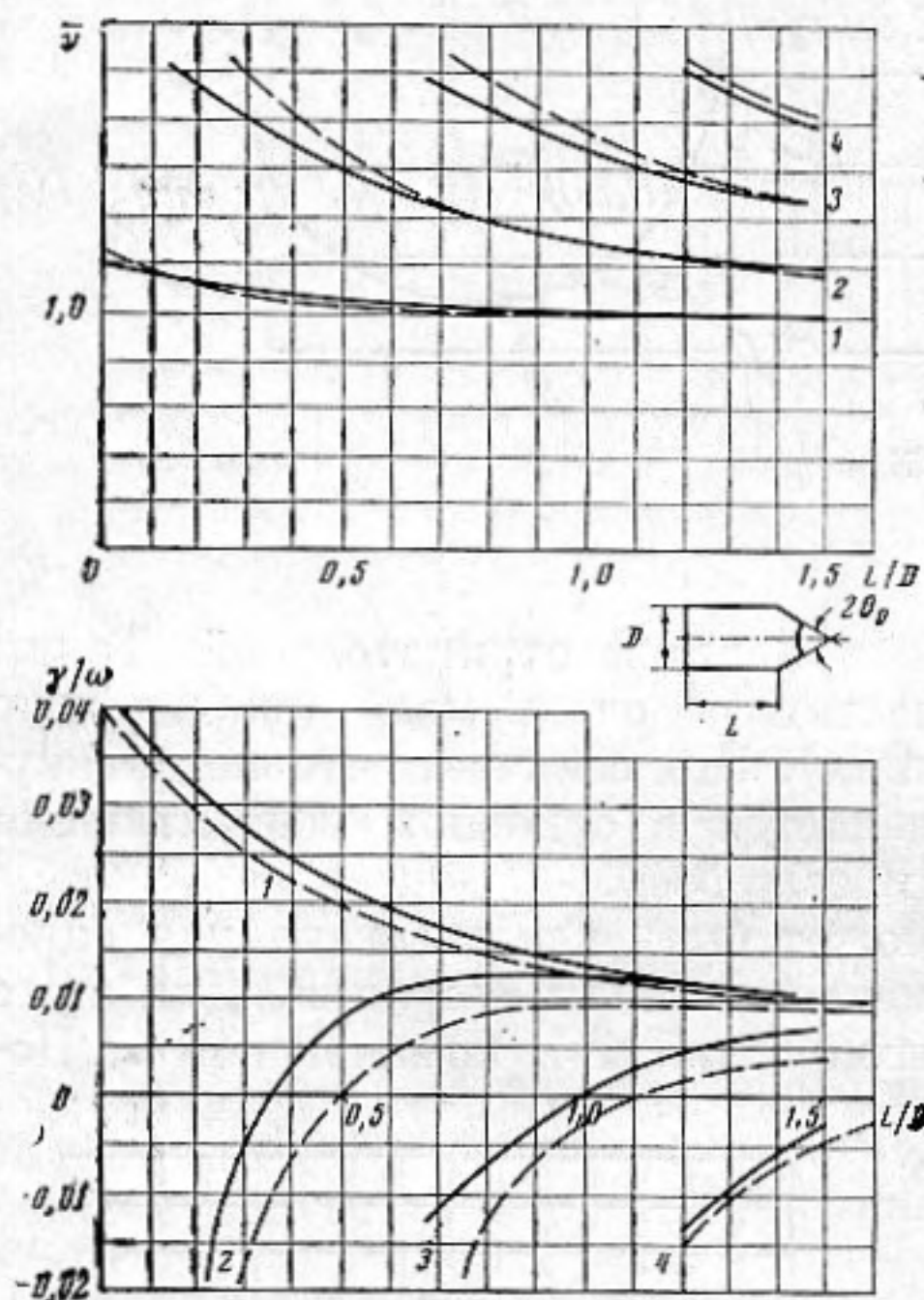
Частотная характеристика сопла может быть использована для определения собственных частот и инкрементов камеры сгорания. Для этого уравнение (14) должно быть проинтегрировано при комплексном s . Полученный таким образом операторный импеданс затем переносится со сферы на плоскость входного сечения сопла и используется в качестве одного из граничных условий для цилиндрической части камеры. Второе граничное условие (в начальном сечении камеры) определяется акустической проводимостью форсуночной головки.

Рассмотрим случай, когда эта проводимость равна нулю (близкое к этому условие выполняется, например, для камер сгорания некоторых жидкостных ракетных двигателей). Собственная частота и декремент находятся из решения волнового уравнения для цилиндрического участка, удовлетворяющего указанным граничным условиям. Это решение должно быть записано для комплексной частоты. Кроме того, в случае продольно-поперечных колебаний выбирается одна форма, соответствующая рассматриваемой форме колебаний в коническом сопле. Строго говоря, при стыковке цилиндрического и конического участков следовало бы учесть все моды, возникающие при отражении от сопла. Однако если их собственные частоты выше частоты основной моды, то вносимые ими искажения акустического поля будут невелики.

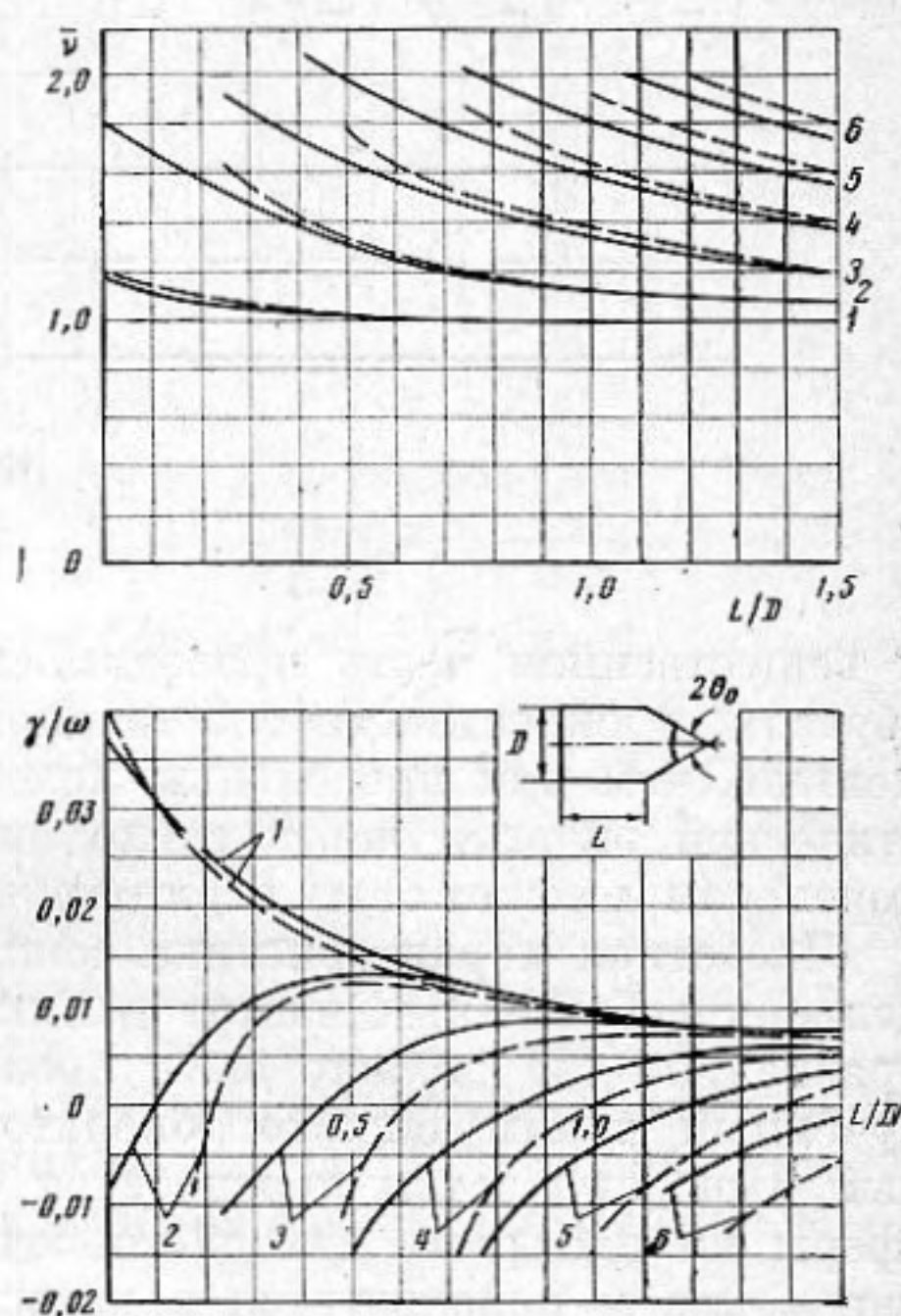


Фиг. 4

На фиг. 4–6 показаны результаты расчета собственных частот и инкрементов для продольных колебаний и двух форм продольно-поперечных ($m=1, n=0$ и $m=2, n=0$). В первом случае частота отнесена к величине $c_0/2L_c$ (где L_c — длина сопла), а во втором — к собственной частоте соответствующей моды в неподвижной среде $\alpha_{mn} \frac{c_0}{D}$. По оси абсцисс отложена длина камеры, отнесенная к длине сопла (для продольных колебаний) или к диаметру камеры (для продольно-поперечных). Каждая кривая на графиках соответствует одной из продольных мод или комбинации



Фиг. 5



Фиг. 6

с ней рассматриваемой поперечной моды. Сплошная линия соответствует $2\theta_0=60^\circ$, пунктирная линия — $2\theta_0=90^\circ$.

Целесообразно обратить внимание на то, что для продольно-поперечных колебаний инкремент может принимать положительные значения (т. е. собственные колебания носят возрастающий характер), в то время как продольные колебания всегда затухающие (инкремент отрицателен). Это свидетельствует о дестабилизирующем влиянии сопла при продольно-поперечных колебаниях. Причем, как видно из фиг. 5 и 6, при удлинении сопла (уменьшении угла конусности) и при неизменной длине цилиндрического участка это влияние усиливается. Для продольных колебаний сопло является источником потерь акустической энергии, причем здесь влияние длины обратное — удлинение сопла приводит к стабилизации.

Наличие положительных инкрементов при трехмерных колебаниях для рассматриваемого типа течения обусловлено тем, что при ускорении газа в суживающейся части сопла энергия среднего потока частично переходит в энергию колебаний, причем условия выноса колебательной энергии различны для одномерных и трехмерных колебаний. Продольные колебания выносятся через сопло, а для продольно-поперечных выносно ничтожно мал или отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. S. Tsien*. The transfer functions of rocket nozzles. *J. Amer. Rock. Soc.*, 1952, 22, 3.
2. *Л. Крокко, Чжен Синь-и*. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. *L. Crocco, W. A. Sirignano*. Behaviour of supercritical nozzles under three-dimensional oscillatory conditions, AGARDograph 117 Butterworth Publications LTD., 1967.
4. *B. T. Zinn, L. Crocco*. Periodic, finite-amplitude oscillations in slowly converging nozzles. *Astronaut. acta*, 1968, 13, 5, 6, 481-488.
5. *B. T. Zinn, L. Crocco*. The nozzle boundary conditions in the nonlinear rocket instability problem. *Astronaut. acta*, 1968, 13, 5, 6, 489-496.
6. *А. А. Осипов, А. Н. Крайко*. Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лавалья. *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газов*, 1973, 1, 84-93.
7. *Ф. Морз, Г. Фешбах*. Методы теоретической физики, т. I, М., Изд-во иностр. лит., 1958.

Поступила
6 июля 1973 г.