АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 5

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Н. А. Багрянцева, Д. Д. Плахов

Исследовано звуковое поле вблизи бесконечной цилиндрической оболочки при падении на нее сферической волны. Произведено сравнение теории и эксперимента.

Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке рассматривалась в работах [1—3]. В настоящей работе исследовано дифракционное поле при падении на оболочку сферической волны, создаваемой элементарным излучателем звука единичной производительности.

Звуковое давление вблизи поверхности цилиндрической оболочки радиуса a определяется при учете результатов работы [4] следующим выражением:

$$p=\frac{ik}{8\pi}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\Big\{H_n^{(1)}(kr_0\sin\theta)I_n(kr\sin\theta)-$$

$$-\frac{I_n'(ka\sin\theta)}{H_n^{(1)\prime}(ka\sin\theta)}H_n^{(1)}(kr_0\sin\theta)H_n^{(1)}(kr\sin\theta)[1-D_n(\theta)]-$$

$$-\frac{I_n'(ka\sin\theta)}{H_n^{(1)}(ka\sin\theta)}H_n^{(1)}(kr_0\sin\theta)H_n^{(1)}(kr\sin\theta)D_n(\theta)\Big\}\times \tag{1}$$

$$\times\cos_n(\varphi-\varphi_0)\exp[ik(z-z_0)\cos\theta]\sin\theta\,d\theta,$$

$$D_n(\theta)=\Big[1+\frac{\rho_1c_1}{\rho c}\frac{k}{k_1}\frac{H_n^{(1)\prime}}{I_n'}\frac{(ka\sin\theta)I_n(k_1a\sin\theta)}{(k_1a\sin\theta)H_n^{(1)}(ka\sin\theta)}-$$

$$-i\frac{Z_n(\theta)}{\rho c}\frac{H_n^{(1)\prime}(ka\sin\theta)}{H_n^{(1)}(ka\sin\theta)}\sin\theta\Big]^{-1}.$$

Здесь r, φ, z и r_0, φ_0, z_0 — соответственно цилиндрические координаты точек наблюдения и излучения, ось z совпадает с продольной осью оболочки, $r<r_0$; ρc и ρ_1c_1 — соответственно волновые сопротивления сред вне и внутри оболочки; k и k_1 — волновые числа в средах вне и внутри оболочки; сомножитель $\exp(-i\omega t)$, определяющий зависимость от времени, опущен; $\varepsilon_n=1$ при $n=0$, $\varepsilon_n=2$ при $n\neq0$; $H_n^{(1)}(x)$ и $I_n(x)$ — соответственно функции Ханкеля первого рода и Бесселя порядка n от аргумента x, штрихом в формуле (1) обозначены производные этих функций по аргументу; $Z_n(\theta)$ — механическое сопротивление оболочки при нагрузке вида $\cos n(\varphi-\varphi_0)\exp\cdot[ik(z-z_0)\cos\theta]$. В формуле (1) исправлены неточности, допущенные при

написании аналогичного выражения в работе [4]. Величину Z_n можно вычислить по формуле

$$\frac{iZ_n(\theta)}{\rho c}=kh\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left\{1-\left[\left(\frac{c_u}{c}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{n}{k_u a}\right)^2\right]^2\right\}. \tag{2}$$

Выражение (2) имеет достаточную для численных расчетов точность при дополнительных условиях, которые в частном случае $c/c_0=0{,}3$, $\rho/\rho_0=0{,}125$ (при этих значениях параметров выполнены расчеты и эксперимент) можно записать в виде $k_0a\gg1$ и $kh\leqslant3$. Здесь k_0 — волновое число продольных волн в материале оболочки, ρ_0c_0 — волновое сопротивление материала, h — толщина оболочки, c_u и k_u — скорость распространения и волновое число изгибных волн в пластине толщины h, находящейся в вакууме. Указанные выше условия определяют нижнюю и верхнюю частоты диапазона, в пределах которого справедлива зависимость (2) для оболочки заданной толщины. При этом оказывается, что на низких частотах эта зависимость нарушается из-за возникновения резонансных колебаний, когда длина продольной волны в материале становится соизмеримой с окружностью оболочки ($k_0a\approx1$). На высоких частотах потеря точности при расчетах обусловлена появлением разности перемещений наружной и внутренней поверхностей оболочки при ее колебаниях. Разность перемещений оказывается существенной при $k_0h\gg1$ (или $kh\gg3$ при $c/c_0=0{,}3$).

Мы будем рассматривать случай, когда точки излучения и наблюдения расположены вблизи цилиндрической оболочки таким образом, что имеет значение лишь распространение звука по кратчайшему пути, а вкладом волн, обогнувших оболочку с противоположной стороны, можно пренебречь. Это допущение упрощает решение задачи и эквивалентно предположению, что $|\varphi-\varphi_0|<\pi$, причем точность решения тем выше, чем меньше r_0-a при $r<r_0$.

Принимая во внимание указанное выше допущение, ряд по индексу n в формуле (1) преобразуем при помощи метода Ватсона [5] в интеграл по контуру C, проходящему выше вещественной оси в плоскости комплексной переменной ν. Выполнив это преобразование и представив функцию Бесселя в виде полусуммы функций Ханкеля первого и второго родов, получим выражение

$$p=-\frac{ik}{16\pi}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty}\left[\int\limits_C A_\nu(\theta)\,e^{i\nu|\varphi|}\,d\nu\right]e^{ik(z-z_0)\cos\theta}\sin\theta\,d\theta, \tag{3}$$

$$A_\nu(\theta)=\frac{H_\nu^{(2)}(ka\sin\theta)-i\dfrac{Z_\nu(\theta)}{\rho c}\sin\theta H_\nu^{(2)\prime}(ka\sin\theta)}{H_\nu^{(1)}(ka\sin\theta)-i\dfrac{Z_\nu(\theta)}{\rho c}\sin\theta H_\nu^{(1)\prime}(ka\sin\theta)}\times$$

$$\times H_\nu^{(1)}(kr_0\sin\theta)\,H_\nu^{(1)}(kr\sin\theta).$$

Здесь и в дальнейшем предполагается $\varphi_0=0$, что не нарушает общности анализа, поскольку обращение в нуль φ_0 всегда может быть обеспечено за счет соответствующего поворота осей системы координат. Кроме того, при выводе формулы (3) использовано неравенство $\rho_1c_1\ll\rho c$, что допустимо в случае пренебрежимо малого влияния сопротивления среды внутри оболочки на ее колебания по сравнению с влиянием сопротивления окружающей среды (например, указанное соотношение выполняется, когда внутри оболочки вакуум). Если принять $Z_\nu(\theta)/\rho c\to0$ или $Z_\nu(\theta)/\rho c\to\infty$, то интеграл в квадратных скобках в формуле (3) совпадает с выражением, найденным в работе [6] (с точностью до членов, определяющих многократное огибание цилиндра волной) для идеально проводящего цилиндра при падении на него электромагнитной волны. Используя асимптотические формулы Дебая для функций Ханкеля [7] и применяя метод перевала [8] для вычисления

интеграла (3), мы найдем при учете формулы (2) звуковое поле в освещенной области; при $z=z_0$ получаем выражение

$$(4)\qquad p=\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\Phi,\quad \Phi=1-\frac{e^{i[h(R_1-R)+2\,\mathrm{arctg}\,\beta]}}{\frac{R_1}{R}\left[1+2\left(\frac{a}{s}+\frac{a}{s_0}\right)^{-1}\cos^{-1}\chi\right]^{1/2}}$$

$$\beta=kh\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left[1-\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{(kh)^2}{12(1-\mu^2)}\sin^4\chi\right]\cos\chi,\quad R^2=r_0^2-r^2-2rr_0\cos\varphi,$$

$$R_1=[r_0^2-(a\sin\chi)^2]^{1/2}+[r^2-(a\sin\chi)^2]^{1/2}-2a\cos\chi,$$
$$s_0=[r_0^2-(a\sin\chi)^2]^{1/2}-a\cos\chi,\quad s=[r^2-(a\sin\chi)^2]^{1/2}-a\cos\chi.$$

В формуле (4) обозначено: μ — коэффициент Пуассона, χ — угол падения звукового луча, равный углу отражения и отсчитываемый от нормали к поверхности оболочки в точке отражения. Этот угол определяет направление на излучатель из некоторой точки на поверхности цилиндра, выбранной таким образом, что сумма длин отрезков прямых, соединяющих эту точку (точку отражения) с излучателем и приемником, оказывается наименьшей из всех возможных при заданном положении точек излучения и наблюдения относительно цилиндра.

Аналогичная электромагнитная задача подробно рассмотрена в работе [7], где для геометрических величин использованы обозначения, совпадающие с нашими. Из результатов работ [6, 7] следует, что угол χ является корнем уравнения

$$\varphi=\arccos\left(\frac{a}{r_0}\sin\chi\right)+\arccos\left(\frac{a}{r}\sin\chi\right)-2\arccos(\sin\chi).$$

Этот корень легко определить численно по правилу Ньютона, если в качестве первого приближения принять $\chi=|\varphi|/2$. Точность первого приближения тем выше, чем дальше точки наблюдения и излучения отстоят от поверхности оболочки. Предлагаемый нами способ вычисления угла χ справедлив до тех пор, пока точка излучения видна из точки наблюдения (в освещенной области).

Из анализа выражения (4) следует, что звуковое давление в освещенной области определяется суммой падающей и отраженной от оболочки волн, причем обе волны имеют примерно равную амплитуду лишь вблизи оболочки, когда $R\simeq R_1$, а возвышение s, s_0 для точек излучения и наблюдения над поверхностью оболочки мало в сравнении с ее радиусом кривизны a. В этом случае оба слагаемых, вошедших в функцию Φ формулы (4), близки по модулю, и при благоприятном соотношении фаз, зависящем от безразмерной толщины оболочки kh, возможно интерференционное усиление или ослабление давления звука в рассматриваемой точке пространства.

При величине $|\varphi|$, большей некоторого значения, зависящего от координат точек излучения и наблюдения (в области тени), интеграл в формуле (3) не удается вычислить методом перевала. Для вычисления звукового давления в области тени интеграл (3) необходимо преобразовать, используя для функций Ханкеля, зависящих от аргумента $ka\sin\theta$, представления, имеющие при $\nu\simeq ka\sin\theta$ более высокую точность, чем формула Дебая. При соблюдении условий $\nu=ka\sin\theta+Mt$, $M=(ka\sin\theta/2)^{1/3}$, $|t|\ll M^2$, $ka\sin\theta\gg 1$ выполняется соотношение $H_\nu^{(1)(2)}(ka\sin\theta)\simeq(i/\sqrt{\pi}M)\,w_{1,2}(t)$, где $w_{1,2}(t)$ — функция Эйри [9, 10]. Для функций Ханкеля от аргументов $kr\sin\theta$ и $kr_0\sin\theta$ целесообразно по-прежнему воспользоваться формулой Дебая. Это

позволяет считать

$$H_\nu^{(1)}(kr_0\sin\theta)H_\nu^{(1)}(kr\sin\theta)\simeq\frac{2}{\pi k\sin\theta}\times$$

$$\times\frac{\exp\left\{i\left[k\sin\theta(\sqrt{r_0^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2})-\frac{\pi}{2}-\nu\left(\arccos\frac{a}{r_0}+\arccos\frac{a}{r}\right)\right]\right\}}{\sqrt[4]{(r_0^2-a^2)(r^2-a^2)}},$$

если $\nu<kr\sin\theta$, $kr_0\sin\theta$; r, $r_0>2a$.

При соблюдении перечисленных условий получаем

$$\int_c A_\nu(\theta)e^{i\nu|\varphi|}d\nu=-\frac{2M}{\pi k\sin\theta}\times \tag{5}$$

$$\times\frac{\exp\{i[k\sin\theta(\sqrt{r_0^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}+a\psi)-\pi/2]\}}{\sqrt{(r_0^2-a^2)(r^2-a^2)}}\int_\Gamma\frac{w_2'(t)-q(t)w_2(t)}{w_1'(t)-q(t)w_1(t)}\times$$

$$\times e^{iMt\psi}dt,$$

$$\psi=|\varphi|-\arccos\frac{a}{r_0}-\arccos\frac{a}{r},\quad \psi\geqslant 0;$$

$$q(t)=\frac{M}{kh\sin\theta}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left\{\left[\left(\frac{c_u}{c}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{c_u}{c}\right)^2\left(\sin\theta+\frac{Mt}{ka}\right)^2\right]^2-1\right\}^{-1}.$$

Здесь контур Г проходит по лучу $\arg t=\frac{2}{3}\pi$ от бесконечности до нуля и по вещественной оси от нуля до бесконечности. Аналогичный интеграл по переменной t при $q(t)=\infty$ был рассмотрен в работе [10]; интеграл при $q(t)=$ $=\text{const}$ исследовался в работах [11, 12].

Анализируя изменение подынтегральной функции в интеграле (5) при перемещении переменной t вдоль контура Г, можно установить, что величину интеграла определяет в основном значение подынтегральной функции при $|t|\leqslant 1$. Это обусловлено тем, что находящиеся под интегралом в знаменателе функция Эйри $w_1(t)$ и ее производная $w_1'(t)$ быстро увеличиваются по модулю при интегрировании от нуля до бесконечности вдоль вещественной оси, если $t>1$. Кроме того, $w_2(t)=w_1(t)-2iv(t)$, где $v(t)$ — мнимая часть функции $w_1(t)$, и поэтому интеграл по вещественной оси распадается на два интеграла, один из которых вычисляется в общем виде, а находящиеся в числителе дроби под знаком второго интеграла функция $v(t)$ и ее производная быстро убывают при $t>1$. Аналогично этому при численном интегрировании вдоль луча $\arg t=\frac{2}{3}\pi$ наблюдается быстрое уменьшение подынтегральной функции при $|t|>1$, вызванное наличием сомножителя $\exp(-M\psi|t|\sin\frac{3}{2}\pi)$. Учитывая сказанное выше, можно при вычислении интеграла (5) принять, что $Mt\ll ka\sin\theta$ при $ka\gg 1$, $c_u/c\neq 1$. Поскольку $(c_u/c)^4=(c_0/c)^2(kh)^2/12(1-\mu^2)$, то можно считать $q(t)\simeq q^*$, причем $q^*=\frac{M}{kh\sin\theta}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\left[\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{(kh)^2}{12(1-\mu^2)}-1\right]^{-1}$. Пользуясь обозначениями работы [12], интеграл по контуру Г представим в виде

$$\int_\Gamma\frac{w_2'(t)-q^*w_2(t)}{w_1'(t)-q^*w_1(t)}e^{i\zeta t}dt=-2i\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}V_{11}(\zeta,q^*). \tag{6}$$

Функция $V_{11}(\zeta, q^*)$ табулирована в работе [12] для $q^*=0$ и $q^*=\infty$; в нашем случае $\zeta=M\psi$.

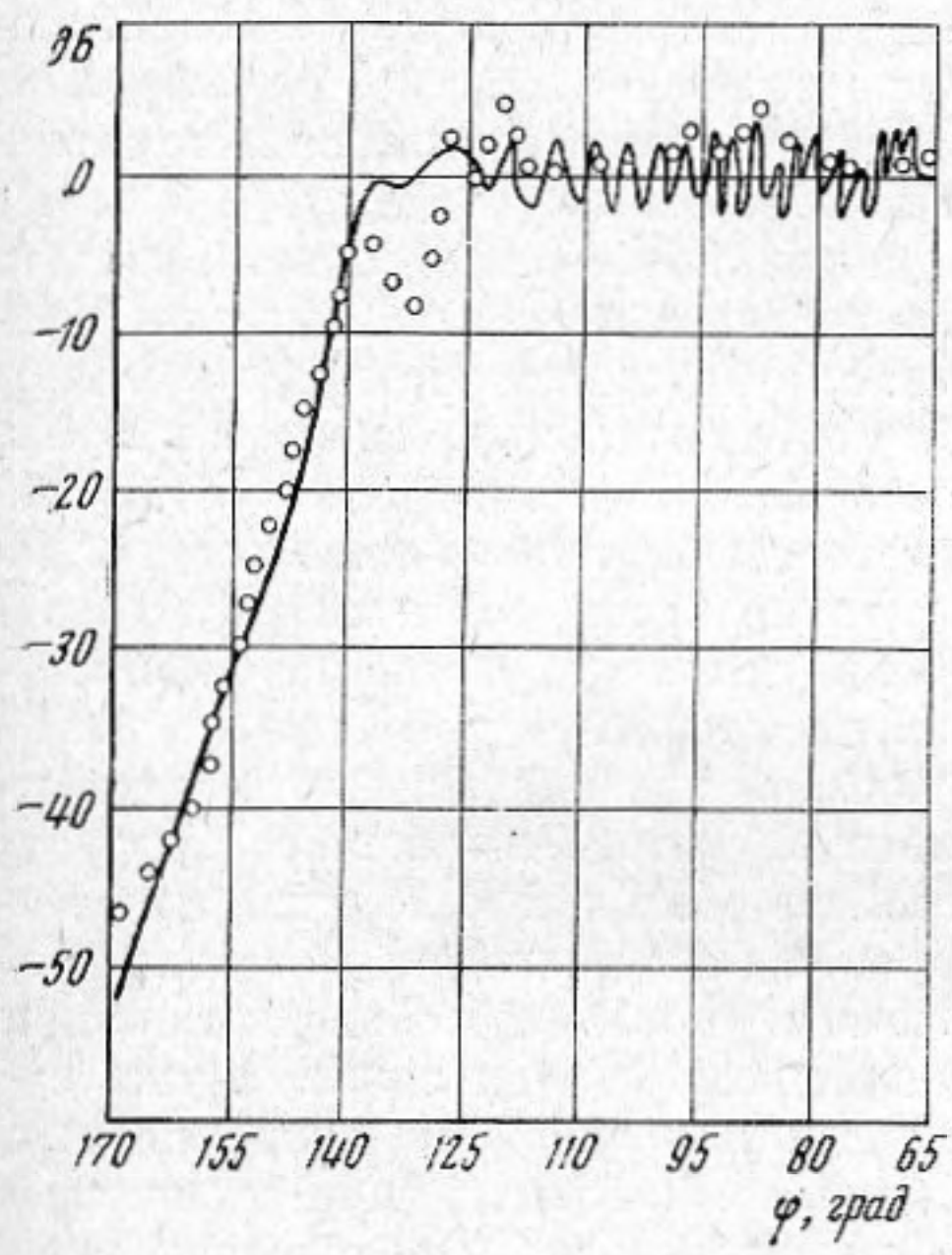
Используя соотношения (5), (6) и обозначая при интегрировании по переменной θ в формуле (3) точку стационарной фазы символом θ^*, получим для поля p при $\psi \geqslant 0$ следующее выражение:

$$(7) \qquad p = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}\Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{2}\, M^* V_{11}(M^*\psi, q^*) R}{\sqrt[4]{(kR_2)^2 (r_0^2 - a^2)(r^2 - a^2)}} e^{i[k(R_2 - R) - \pi/2]},$$

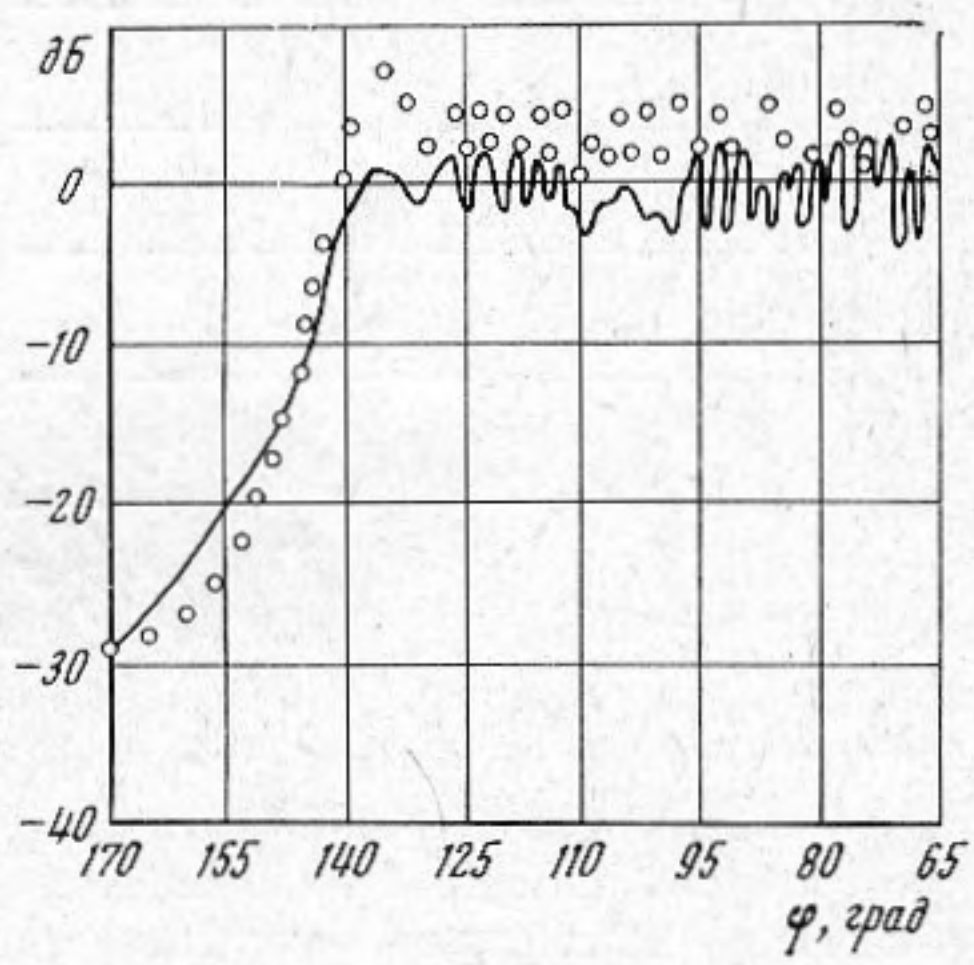
$$R_2 = [(r_0^2 - a^2)^{1/2} + (r^2 - a^2)^{1/2} + a\psi]^2 + (z - z_0)^2,$$

$$\theta^* = \arccos(z - z_0)/R_2, \quad M^* = \left(\frac{ka \sin\theta^*}{2}\right)^{1/3}.$$

Формула (7) позволяет рассчитать давление в зоне тени на конечном расстоянии от упругой оболочки, если известно значение функции $V_{11}(M^*\psi, q^*)$. Практически при выполнении расчетов на докритических частотах, когда скорость изгибных волн в пластине толщины h меньше скорости звука в



Фиг. 1



Фиг. 2

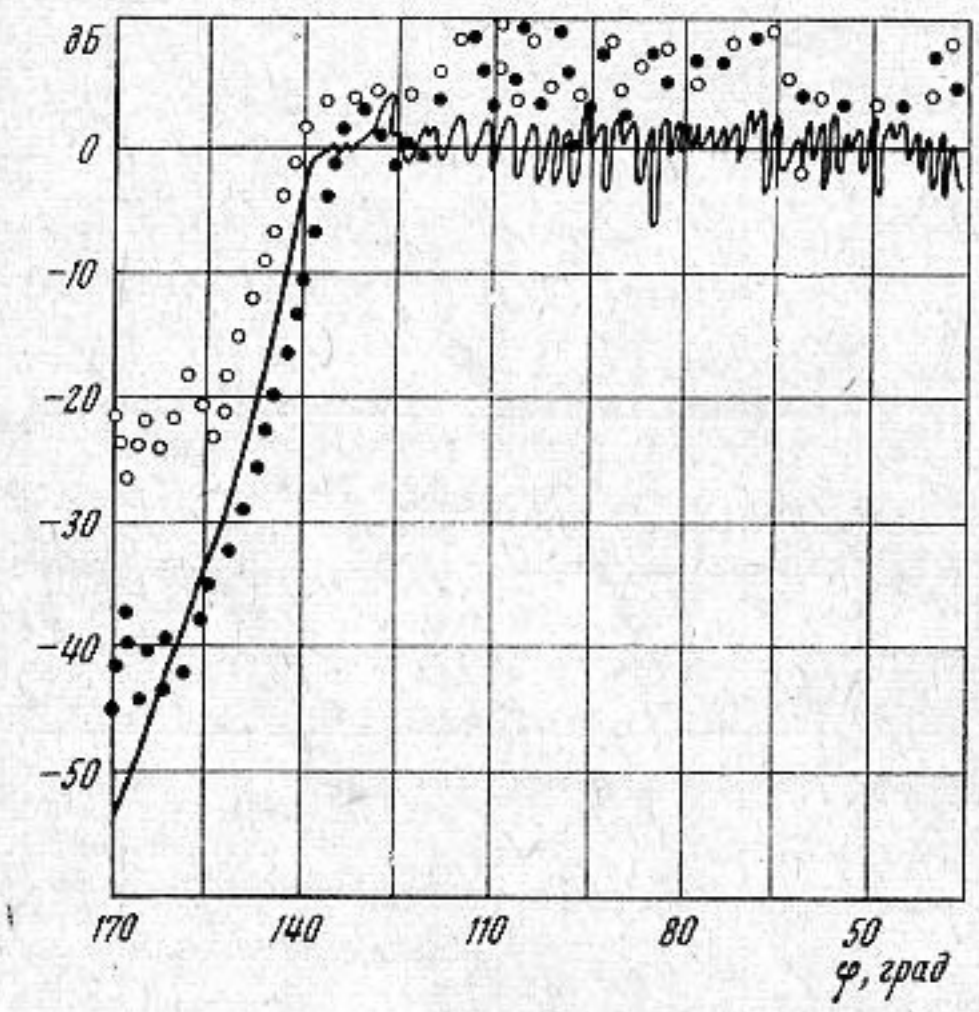
окружающей оболочку среде ($c_u/c<1$), можно считать $q^* \gg 1$; если же рассматривается закритический диапазон частот ($c_u/c>1$), то вычисления показывают, что $q^* \simeq 0$. Это позволяет в упомянутом выше случае $c/c_0=0{,}3$; $\rho/\rho_0=0{,}125$ принять при определении по таблицам [12] функции $V_{11}(M^*\psi, q^*)$, что $q^*=\infty$ при $kh<1$ и $q^*=0$ при $kh>1$. Вблизи критической частоты $kh \simeq 1$ и использование формулы (7) возможно, если только для определения функции $V_{11}(M^*\psi, q^*)$ выполнить численное интегрирование по контуру с учетом зависимости величины $q(t)$ от аргумента t.

Результаты расчета модуля функции Φ в децибелах представлены на фиг. 1 сплошной линией, причем для области тени ($\varphi \geqslant 141°$) использовалась формула (7), а при меньших значениях φ расчет производился по формуле (4). При расчетах предполагалось, что точка наблюдения перемещается по окружности радиуса $r=2a$ вокруг цилиндрической оболочки при расположении точки излучения в плоскости окружности ($\theta^*=\pi/2$) на расстоянии $r_0=5a$ от центра оболочки. Геометрические размеры оболочки были выбраны так, что $kh=0{,}17$; $ka=125$. При указанных выше параметрах материала оболочки это позволяло считать $q^*=\infty$ при определении величи-

ны функции $V_{11}(M^*\psi, q^*)$. Кружками на фиг. 1 показано экспериментально найденное распределение давления.

Точность экспериментальных данных, представленных на фиг. 1 и на других графиках, может быть оценена величиной ± 5 *дб* и определяется, главным образом, ошибками, которых не удалось избежать при определении угловых координат. В качестве нулевого уровня на фиг. 1 выбрано давление в точке с координатой $\varphi=81°$ при отсутствии оболочки. Из фиг. 1 видно, что расчетное и найденное в эксперименте значения давления близки друг к другу. Аналогичные измерения и расчеты, выполненные при других значениях параметра $kh<1$, позволяют утверждать, что величину q^* можно принимать равной бесконечности при выполнении расчетов по формуле (7) в области тени вплоть до значений $kh\simeq 1$.

При $kh>1$ расчет распределения давления был выполнен при тех же положениях точек излучения и приема относительно оболочки, при которых были получены результаты, представленные на фиг. 1. За счет изменения частоты звука и толщины оболочки при сохранении геометрических размеров оказалось возможным обеспечить значения параметров $kh=1{,}71$; $ka=258$, что позволило при определении величины функции $V_{11}(M^*\psi, q^*)$ принимать $q^*=0$. Результаты расчета представлены на фиг. 2 сплошной линией, а кружками там же показаны экспериментальные значения функции $|\Phi|$. Из рассмотрения фиг. 2 следует, что расчетные зависимости достаточно хорошо описывают изменение звукового давления на закритических частотах.



Фиг. 3

Сравнение фиг. 1 и 2 позволяет отметить, что изменение упругих свойств оболочки мало влияет на распределение давления в освещенной области. Наоборот, в области тени при неизменном ka давление звука существенно больше для $kh>1$. По этой причине уровень давления при $\varphi\simeq 150-170°$ на фиг. 1 оказывается меньше, чем на фиг. 2 (при тех же значениях φ), несмотря на то, что представленные на фиг. 2 результаты относятся к случаю, когда частота звука возросла в два раза, а радиус кривизны остался неизменным.

Следует отметить, что описанные выше закономерности подтверждаются также результатами, приведенными в работе [3]. Там же указывалось на специфические особенности в распределении давления, создаваемого плоской волной звука вблизи цилиндрической оболочки на критической частоте. В связи с этим нами были выполнены эксперименты при $ka=156$, $kh=1{,}04$, результаты которых представлены на фиг. 3. Кружками показаны экспериментальные результаты, сплошной линией нанесены результаты расчетов по формулам (4) и (7), причем при выполнении расчетов принималось $q^*=\infty$. Можно видеть, что найденный экспериментально уровень давления превышает расчетный как в освещенной области, так и в области тени. Отмеченное различие результатов можно объяснить тем обстоятельством, что при колебаниях оболочки с частотой, близкой к критической, образующиеся изгибные волны имеют значительную амплитуду и создают дополнительное звуковое давление, особенно заметное в области тени. Это позволяет предположить, что звуковое давление в тени может быть понижено, если увеличить поглощение энергии изгибных колебаний в упругой оболочке. В связи с этим были предприняты измерения, в процессе которых

на внутренней поверхности оболочки закреплялась губчатая резина, обладающая повышенным коэффициентом поглощения энергии в сравнении с материалом оболочки. Результаты измерений, выполненных после установки резины, показаны на фиг. 3 зачерненными кружками. Видно, что поглощение энергии колебаний оболочки, достигнутое за счет нанесения губчатой резины, приблизило результаты эксперимента к расчетным зависимостям. Измерение поглощения энергии, выполненное реверберационным методом [13] после закрепления резины, показало, что коэффициент потерь возрос в два раза. Таким образом, значительное уменьшение давления звука в области тени, обнаруживаемое из рассмотрения результатов, представленных на фиг. 3, обеспечивается на частотах, близких к критической, за счет сравнительно небольшого увеличения коэффициента потерь в оболочке.

Выполненное сопоставление результатов расчетов и эксперимента свидетельствует о том, что найденные выше расчетные зависимости вполне пригодны для оценки распределения давления, создаваемого источником сферической волны звука вблизи цилиндрической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Лямшев.* Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке. Акуст. ж., 1958, *4*, 2, 161–167.
2. *P. Ugincius, H. Überall.* Greeping – wave analysis of acoustic scattering by elastic cylindrical shells. J. Acoust. Soc. America, 1968, *43*, 5, 1025–1035.
3. *Е. А. Лиходаева, Е. Л. Шендеров.* Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке. Акуст ж., 1971, *17*, 1, 79–84.
4. *Д. Д. Плахов.* Звуковое излучение бесконечного упругого цилиндра под действи ем точечного усилия. Акуст. ж., 1973, *19*, 1, 80–87.
5. *В. А. Фок.* Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Л.– М., Изд-во АН СССР, 1946.
6. *W. Franz.* Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen. Berlin, Springer-Verlag, 1957.
7. *Л. А. Вайнштейн, Г. Д. Малюжинец.* Поперечная диффузия при дифракции на импедансном цилиндре большого радиуса, ч. II. Радиотехника и электроника, 1961, *6*, 9, 1489–1495.
8. *Л. М. Бреховских.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
9. *В. А. Фок.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., «Сов. радио», 1970.
10. *А. С. Горяинов.* Асимптотическое решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на проводящем цилиндре. Радиотехника и электроника, 1958, *3*, 5, 603–614.
11. *В. А. Фок.* Дифракция Френеля от выпуклых тел. Успехи физ. наук, 1951, *43*, 4, 587–599.
12. *П. А. Азрилянт, М. Г. Белкина.* Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности. М., «Сов. радио», 1957.
13. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.

Поступила
7 августа 1972 г.