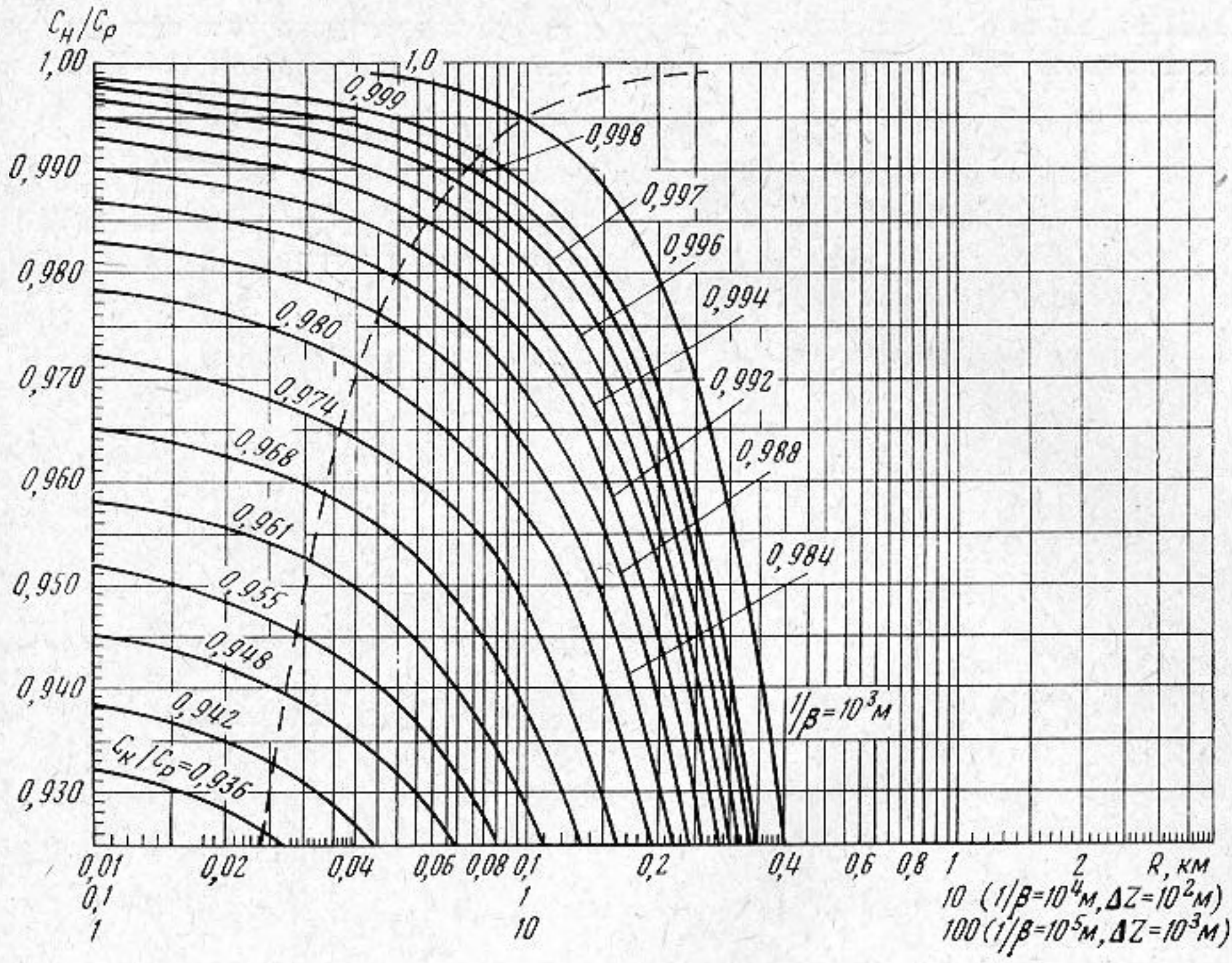
напротив значения $C_н/C_р=0{,}9548$, а положение второй ножки на горизонтали даст значение пробега луча (в данном слое) $R=0{,}19$ *км*. Если же нам нужно определить дальность пробега луча между точками 5 и 6 (или 6 и 7), то в этом случае значение отношения $C_к/C_р$ становится равным 1,0.



Фиг. 2

Аналогично определяем расстояние и для отраженного луча; при этом если задаемся значением $\sin\theta_н$, то определяем $\sin\theta_к$.

Для луча, проходящего слой с постоянной скоростью, и если ΔZ равно не 10 *м*, как указано на фиг. 2, а к примеру, 35 *м*, то соответствующий раствор измерителя устанавливаем по логарифмической шкале и далее поступаем аналогично: одну ножку измерителя ставим на штриховую кривую, напротив значения $C_н/C_р$ (где $C_н$ — скорость в слое), а положение второй ножки измерителя даст нам расстояние.

Когда источник, приемник и волна находятся в одном слое, то по данной палетке можно определять изменение амплитуды А волны (за счет геометрического расхождения L ее фронта), учитывая, что $A\sim L^{-1}$, где $L=R/\sin\theta_н$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. П. Сташкевич.* Акустика моря. Л., «Судостроение», 1966.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Географический факультет

Поступила
21 апреля 1973 г.

УДК 534.26

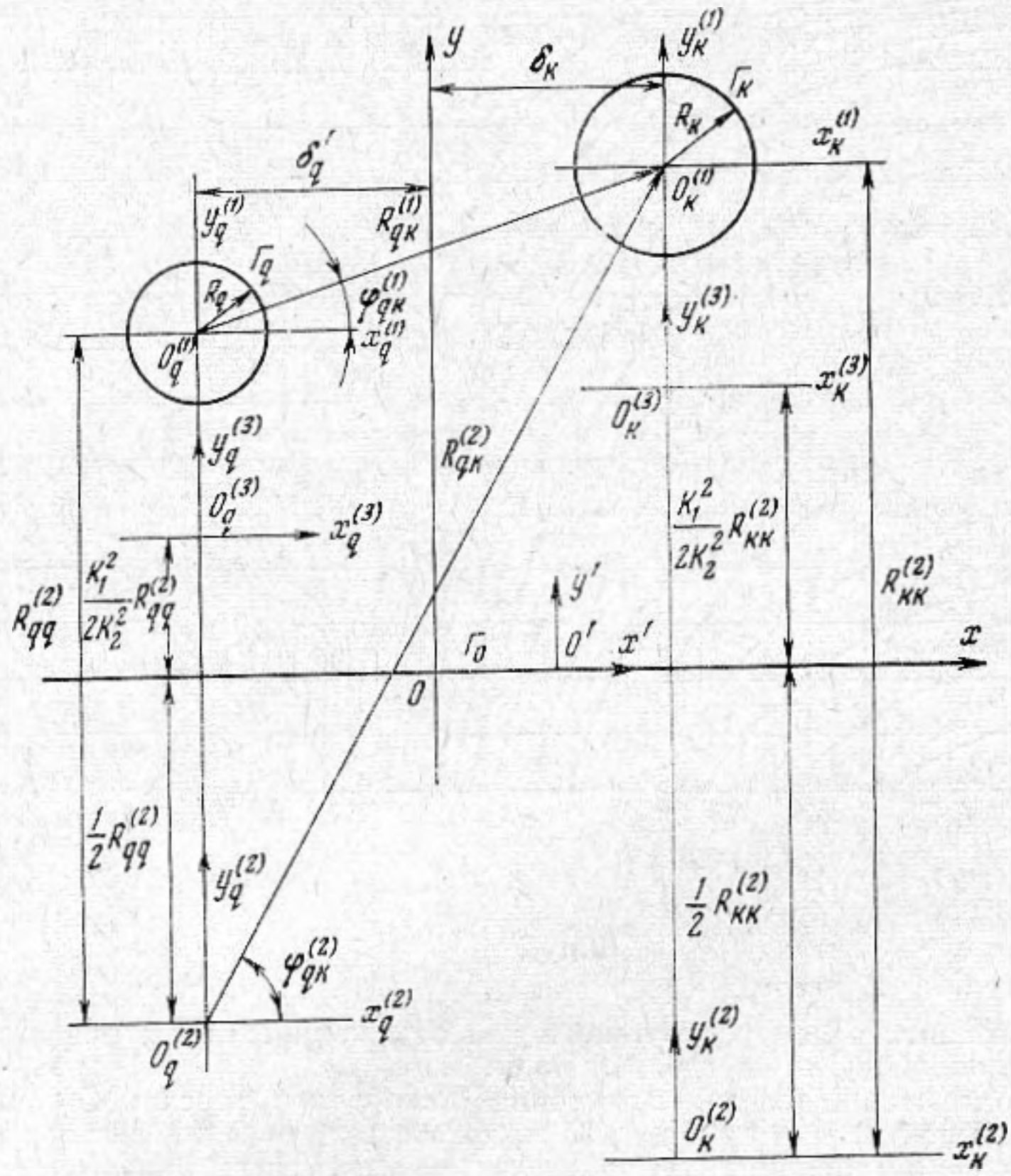
ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ В ИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Р. Я. Бераха

Задача о дифракции сдвиговой волны на цилиндрических полостях в изотропном полупространстве при однородных граничных условиях была рассмотрена в работе [1].

В настоящей работе приводится решение той же задачи в случае, когда изотропное тело с цилиндрическими полостями граничит с изотропным полупространством.

Пусть изотропное упругое тело с m цилиндрическими взаимно параллельными полостями занимает полупространство $y>0$ и граничит с изотропным упругим полупространством $y<0$. На фигуре показана рассматриваемая модель при $z=0$. Плоскость z декартовой системы координат $Oxyz$ является границей полупространства: ось z параллельна осям отверстий; $O_k^{(1)} x_k^{(1)} y_k^{(1)}$ – локальная декартова система координат с началом $O_k^{(1)}$ в центре k-го отверстия, R_k – радиус отверстия ($k=1, \ldots, m$).



Пусть в данном теле в направлении, образующем угол α_1 с осью y, распространяется сдвиговая волна

$$u_0=\exp\{i[k_1(x\sin\alpha_1+y\cos\alpha_1)-\omega t]\}, \tag{1}$$

где u_0 – смещение частиц в направлении оси z; $k_1=\omega/c_{t_1}$ – волновое число, ω – частота колебаний, c_{t_1} – скорость поперечных волн в теле; $i^2=-1$.

В последующих формулах временной множитель $e^{-i\omega t}$ для удобства пропущен.

Волна (1), дифрагируя на поверхности, ограничивающей тело, создает отраженные u_1 и преломленные u_2 волны, которые должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\Delta u_{1,2}+k_{1,2}^2 u_{1,2}=0 \tag{2}$$

($k_2=\omega/c_{t_2}$ – волновое число преломленных волн, c_{t_2} – их скорость) и условию излучения на бесконечности.

Необходимо найти решение уравнений (2) при следующих граничных условиях на границе $\Gamma_0+\Gamma_1+\ldots+\Gamma_m$:

$$\left.\begin{aligned} &u_0+u_1=u_2\\ &\mu_1\frac{\partial(u_0+u_1)}{\partial y}=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad y=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(u_0+u_1)}{\partial n_k}=0\quad \text{на}\ \Gamma_k\quad (k=1,\ldots,m),$$

где μ_1 и μ_2 – соответственно модули сдвига изотропного тела и полупространства.

Рассеянное поле в упругом теле будем искать в виде [1]:

$$u_1 = C_1 \exp[ik_1(x \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1)] + \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n^{(k)} H_n(k_1 r_k^{(1)}) \exp(in\varphi_k^{(1)}) + B_n^{(k)} H_n(k_1 r_k^{(2)}) \exp(in\varphi_k^{(2)})], \tag{4}$$

где $r_k^{(s)} = x_k^{(s)} \cos \varphi_k^{(s)}$, $\varphi_k^{(s)} = \operatorname{arc\,tg} y_k^{(s)}/x_k^{(s)}$ $(s = 1, 2;\ k = 1, \ldots m)$; декартова система координат $O_k^{(2)} x_k^{(2)} y_k^{(2)}$ симметрична системе $O_k^{(1)} x_k^{(1)} y_k^{(2)}$ относительно плоскости $y=0$; H_n функции Ганкеля первого рода; C_1. A_n^k и b_n^k – константы. Первый член в формуле (4) представляет собой плоскую сдвиговую волну, отраженную от границы Γ_0, а сумма — отраженные от отверстий и границы раздела Γ_0 цилиндрические сдвиговые волны.

Очевидно, что поле u_2 в полупространстве $y<0$ должно также задаваться двумя членами: плоской волной, полученной в результате преломления падающей волны u_0 на границе Γ_0, и совокупностью цилиндрических волн – результатом взаимодействия волны u_0 с отверстиями, т. е.

$$u_2 = C_2 \exp[ik_2(x \sin \alpha_2 - y \cos \alpha_2)] + \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^{(k)} H_n(k_2 r_k^{(3)}) \exp(in\varphi_n^{(3)}), \tag{5}$$

где C_2 и $D_n^{(k)}$ – константы $r_k^{(3)} = x_k^{(3)} \cos \varphi_k^{(3)}$, $\varphi_k^{(3)} = \operatorname{arctg} y_k^{(3)}/x_k^{(3)}$.

Члены бесконечной суммы в (5) можно рассматривать как волны, отраженные от фиктивной цилиндрической полости, параллельной поверхности, ограничивающей тело; связанная с этой полостью декартова система координат $O_k^{(3)} x_k^{(3)} y_k^{(3)}$ должна удовлетворять условиям

$$x_k^{(3)} = x_k^{(1)}, \qquad y_k^{(3)} = y_k^{(1)} - \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \frac{1}{2} R_{kk}^{(2)} \qquad (k=1, \ldots, m).$$

Константы C_1, C_2 и α_2 подберем из граничных условий на Γ_0:

$$C_1 = (1 - Z_2/Z_1)/(1 + Z_2/Z_1), \qquad C_2 = 2/(1 + Z_2/Z_1), \qquad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{k_1}{k_2},$$

$$Z_{1,2} = \rho_{1,2} C_{t_{1,2}} \cos \alpha_{1,2},$$

где ρ_1 и ρ_2 – соответственно плотности материала изотропного тела и полупространства.

Выражая поля u_1 и u_2 через координаты декартовой системы $O'x'y'$ (где O' – произвольная точка оси x), из граничных условий (3) на Γ_0 получаем бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $D_n^{(k)}$ $(k=1, \ldots, m)$:

$$B_n^{(k)} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^{p+1} a_{p,n} D_{-p}^{(k)} = (-1) A_{-n}^{(k)},$$

$$B_n^{(k)} + B_{n+2}^{(k)} + \frac{\rho_2 c_{t_2}}{\rho_1 c_{t_1}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p a_{p+1,\, n+1} (D_{-p}^{(k)} + D_{-p-2}^{(k)}) = \tag{6}$$

$$= (-1)^n (A_{-n}^{(k)} + A_{-n-2}^{(k)})$$

где

$$a_{n,p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[i \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \varphi \right) \right] e^{-ip\varphi}\, d\varphi.$$

Из граничных условий на Γ_k $(k=1, \ldots, m)$ аналогично работе [1] имеем:

$$A_n^{(q)} + \frac{J_n'(k_1 R_q)}{H_n'(k_1 R_q)} \Bigg[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^{m} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_n^{(k)} H_{p-n}(k_1 R_{kq}^{(1)}) \exp[i(p-n)\varphi_{kq}^{(1)}] +$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_n^{(k)} H_{p-n}(k_1 R_{kq}^{(2)}) \exp[i(p-n)\varphi_{kq}^{(2)}] =$$

$$= (-i)^n \left[\exp ik_1 \left(\delta_q \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} R_{qq}^{(2)} \cos \alpha_1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1-Z_2/Z_1}{1+Z_2/Z_1} \exp \left[ik_1 \left(\delta_q \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} R_{qq}^{(2)} \cos \alpha_1 \right) \right] \frac{J_n'(k_1 R_q)}{H_n'(k_1 R_q)}$$

(7) $(q=1, \ldots, m; \quad n=0, \pm 1, \ldots)$,

где J_n – функции Бесселя, штрих над функциями J_n и H_n означает дифференцирование по R_q, смысл остальных обозначений ясен из фигуры.

Таким образом, решение данной граничной задачи свелось к решению бесконечной системы уравнений (6) и (7), которую после элементарных преобразований можно записать в нормальном виде. Следуя работе [2], нетрудно показать, что к полученной системе применимы теоремы Крамера и Руше [3]. Из теоремы единственности стационарной задачи теории дифракции следует, что определитель системы (6), (7) отличен от нуля. Следовательно, данная система имеет единственное нетривиальное решение, которое может быть найдено одним из приближенных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Т. Головчан.* Колебания полуплоскости с круговыми отверстиями. Прикладная механика, 1970, *5*, 1, 113—115.
2. *А. Н. Гузь, В. Т. Головчан.* О решении основных граничных задач теории установившихся колебаний для бесконечной полуплоскости с круговыми отверстиями. Инж. ж., Механика твердого тела, 1968, *2*, 58—64.
3. *Л. В. Канторович, В. И. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.

Центр гигиены Медицинской академии
София, Болгария

Поступила
10 апреля 1973 г.

УДК 534.231.1

ОБ УСРЕДНЕННЫХ ЗАКОНАХ СПАДАНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРОТЯЖЕННОГО ИСТОЧНИКА В СЛОЕ

М. Д. Бронтвейн, Л. И. Кацович

Известно [1], что тонкая структура акустического поля в слое воды при многомодовом распространении имеет весьма сложный вид и экспериментально, как правило, не разрешается. Поэтому целесообразно описывать поле в среднем (усреднение по вертикальной координате z) как функцию расстояния r между источником и точкой наблюдения. Такого рода расчеты для поля точечного источника в слое приведены в монографии Л. М. Бреховских. Полученный там закон убывания среднего поля, пропорциональный $1/r^{3/2}$, широко используется при интерпретации натурных измерений. Поскольку на практике не всегда источник можно полагать точечным и не обладающим направленностью, возникают вопросы: сохраняется ли закон «трех вторых» для поля направленного источника, будет ли угловая зависимость у среднего поля и как она связана с диаграммой направленности источника? Ниже мы вычислим усредненный закон спадания поля протяженного источника с диаграммой $F=F(ka \sin \vartheta)$ в слое, что позволит ответить на поставленные вопросы.

Рассмотрим линейный излучатель (палочку) длины $2a$ в слое глубины h (фигура); обозначим через ϑ_0 угол между нормалью к источнику и линией $PQ=r$, соединяющей центр источника Q и точку наблюдения P. Пусть точка Q находится в середине слоя (при $r \gg h$ положение точки Q несущественно), а наклон источника в плоскости $X0Y$ определяется углом $\varkappa_0$. Поле в слое на достаточно больших расстояниях в приближении геометрической оптики можно представить в виде бесконечной суммы полей мнимых источников *; для звукового потенциала ψ получаем выра-

* Тот факт, что при малых углах скольжения α в приближении геометрической оптики сумма полей соседних мнимых источников стремится к нулю (поскольку коэффициент отражения $V(\alpha) \to -1$ при $\alpha \to 0$), не влияет на последующее рассмотрение, так как при усреднении по существу суммируются квадраты модулей отраженных полей.