АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XX 1974 Вып. 6

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ ЦИЛИНДРОВ

И. И. Клюкин, В. Е. Чабанов

Определяется рассеяние плоских звуковых волн на решетке, составленной из жестких цилиндров. Используемый при решении метод разделения переменных модифицирован, вследствие чего удалось избежать решения бесконечных систем алгебраических уравнений. Исследуется характер отражения звука решеткой в случае появления так называемых «аномалий Вуда». Используемый прием позволяет упростить решение других задач подобного рода.

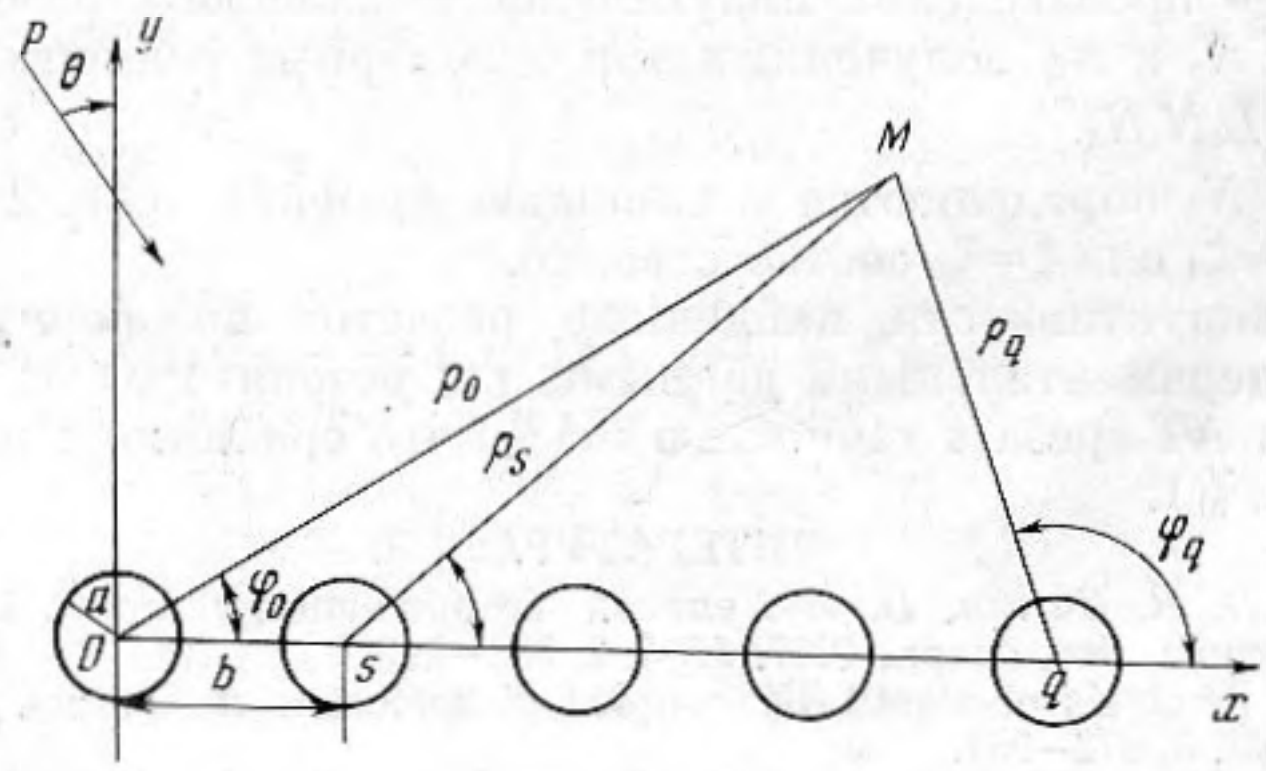
Решению задачи об отражении звука плоскими решетками цилиндров посвящено большое число работ, в частности работы [1—4]. Общая трудность, с которой приходится сталкиваться при исследовании подобных задач, заключается в том, что поле в пространстве находится только после определения его значения на поверхности рассеивателей, а для этого предварительно приходится решать либо бесконечные системы алгебраических уравнений, либо интегральные уравнения. Такой подход не позволяет получить решение в аналитической форме, что в значительной степени усложняет анализ и увеличивает трудоемкость расчета.

Кроме того, решение вообще сложно получить при появлении так называемых «аномалий Вуда», когда один из дифрагированных спектров распространяется вдоль поверхности решетки. В настоящей работе делается попытка упростить решение таких задач.

Пусть на решетку, составленную из N жестких круговых цилиндров радиуса a, под углом θ относительно нормали к поверхности решетки падает плоская звуковая волна P (фиг. 1). Расстояние между соседними цилиндрами равно b; временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду будем опускать. Волну P зададим в виде

$$P=\exp[ik(x\sin\theta-y\cos\theta)]. \tag{1}$$

Падающую волну представим в виде суммы цилиндрических волн относительно нормали цилиндра с номером s. Отраженную волну P_s также бу-



Фиг. 1

дем искать в виде суммы цилиндрических волн

$$(2)\qquad P_s=\exp(ikbs\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nH_n(k\rho_s)\exp[in(\varphi_s-\theta)],$$

где A_n — неизвестные амплитуды; они находятся из граничных условий на поверхности цилиндров

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho_s}\left(P+P_s+\sum_{\substack{g=0\\ g\neq s}}^{N-1}P_g\right)\Bigg|_{\rho_s=a}=0.$$

В этом выражении сумма по g описывает характер влияния всех цилиндров решетки на 1-й цилиндр. Здесь полагается, что число цилиндров в решетке настолько велико, что особым положением краевых цилиндров можно пренебречь.

Для совмещения локальных систем координат с осью цилиндра s воспользуемся теоремой сложения цилиндрических функций [5]. Тогда при $g>s$ получим

$$(4)\qquad P_g=\exp(ikbg\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho_s)\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m\times$$

$$\times\exp\left[i(m-n)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]H_{m-n}[kb(g-s)]\exp[in(\varphi_s-\theta)];$$

соответственно при $g<s$ будем иметь

$$(5)\qquad P_g=\exp(ikbg\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho_s)\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m(-1)^{m-n}\times$$

$$\times\exp\left[i(m-n)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]H_{m-n}[kb(s-g)]\exp[in(\varphi_s-\theta)].$$

С целью улучшить сходимость системы алгебраических уравнений введем новые неизвестные амплитуды [4]:

$$(6)\qquad A_n^0=A_nH_n'(ka)\exp(-in\,\pi/2).$$

Подставляя поля P, P_s и P_g в граничное условие (а), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными A_n^0:

$$(7)\qquad b_n+\sum_m A_m^0a_{mn}=0\qquad -\infty<m,\ n<\infty,$$

где

$$b_n=(-1)^nJ_n'(ka),\ a_{mn}=C_{mn}\exp[-i(m-$$
$$-n)\theta)\Phi_{mn}+\delta_{mn},\ C_{mn}=J_n'(ka)/H_m'(ka),$$

$$\Phi_{mn}=\sum_{r=1}^{\infty}H_{m-n}(kbr)[\exp(-ikbr\sin\theta)+$$

$$+(-1)^{m-n}\exp(ikbr\sin\theta)],$$

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 \text{ при } m=n\\ 0 \text{ при } m\neq n,\end{cases}$$

$J_n'(ka)$ и $H_n'(ka)$ — соответственно производные функций Бесселя и Ханкеля первого рода. Для мягких цилиндров вместо производных цилиндрических функций войдут сами функции.

Система уравнений (7) разрешима при выполнении условия $b>2a$.

Функция Φ_{mn} описывает характер взаимодействия цилиндров решетки. Она может быть представлена в виде суммы плоских волн [6]:

$$\Phi_{2t}\underset{t\neq 0}{=}2\sum_{\mu=0}^{\infty}C_\mu\exp(-i2t\varphi_\mu)+2\sum_{\mu=-\infty}^{-1}C_\mu\exp(i2t\varphi_\mu)+ \tag{8}$$

$$+\frac{i}{t\pi}+\frac{i}{\pi}\sum_{l=1}^{t}\frac{(-1)^l4^l(t+l-1)!B_{2l}(\Delta\sin\theta)}{(2l)!(t-l)!\Delta^{2l}}.$$

$$\Phi_{2t+1}=2\sum_{\mu=0}^{\infty}C_\mu\exp[-i(2t+1)\varphi_\mu]-2\sum_{\mu=-\infty}^{-1}C_\mu\exp[i(2t+1)\varphi_\mu]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{t}\frac{(-1)^l4^l(t+l)!B_{2l+1}(\Delta\sin\theta)}{(2l+1)!(t-l)!\Delta^{2l+1}},$$

$$\Phi_0=\frac{2}{kb}\sum_{-\mu_-}^{+\mu_+}\frac{1}{\cos\varphi_\mu}-1+i\left\{-\frac{2}{\pi}\lg\frac{\gamma kb}{4\pi}+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}+\sum_{\mu=1}^{\mu_-}\frac{1}{\mu}\right)-2\sum_{\mu_++1}\left[\frac{1}{kb\,\mathrm{sh}\,\eta_{\mu_+}}-\frac{1}{2\pi\mu}\right]-$$

$$\left.-2\sum_{\mu_-+1}^{\infty}\left[\frac{1}{kb\,\mathrm{sh}\,\eta_{\mu_-}}-\frac{1}{2\pi\mu}\right]\right\}.$$

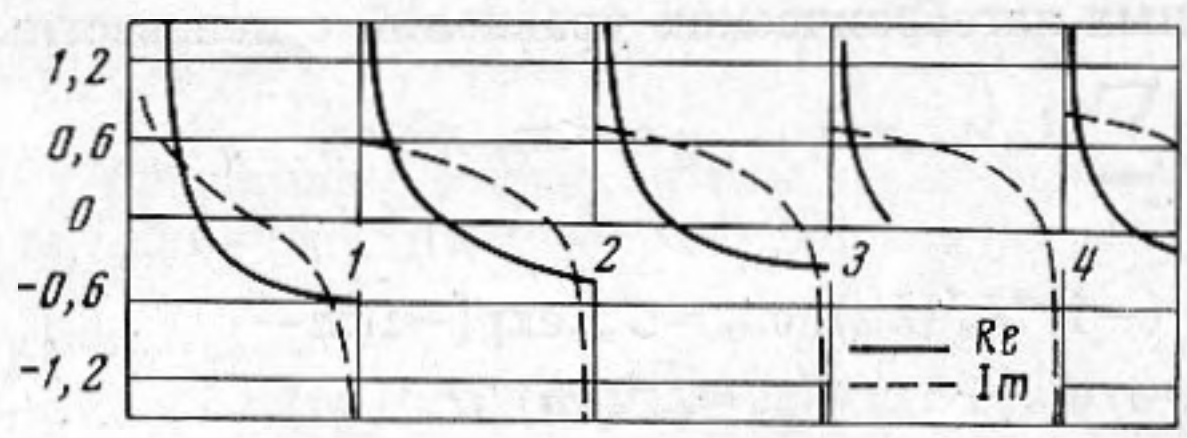
В этих выражениях обозначено

$$\Delta=\frac{kb}{2\pi},\quad \sin\varphi_\mu=\sin\theta+\frac{2\pi\mu}{kb},\quad C_\mu=\frac{1}{kb\sqrt{1-\sin^2\varphi_\mu}},$$

$$\gamma=1{,}781,\quad \mathrm{ch}\,\eta_{\mu_\pm}=\pm\sin\theta+\frac{2\pi\mu}{kb},\quad B_l-$$

полиномы Бернулли, $\Phi_{m-n}=(-1)^{m-n}\Phi_{n-m}$.

В качестве примера на фиг. 2 представлена расчетная характеристика Φ_0 при $\theta=\theta^\circ$ в зависимости от волнового расстояния между цилиндрами.



Фиг. 2

Поле отражения решетки в точке M пространства определяется суммированием отражений от каждого цилиндра с использованием теоремы сложения. В направлении, обратном приходу звука, когда расстояние от решетки до точки наблюдения велико, имеем

$$P_M=\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho_0}}\exp\left[i\left(k\rho_0-\frac{\pi}{4}\right)\right]\exp[ikb(N-1)\sin\theta]\times \tag{9}$$

$$\times\frac{\sin(kbN\sin\theta)}{\sin(kb\sin\theta)}A,$$

где величина A определяет поле отражения одного цилиндра решетки при воздействии на него всех других цилиндров; имеем

$$A=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{A_l^0}{H_l'(ka)}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что для получения решения необязательно находить каждое из неизвестных A_l^0, а достаточно определить лишь их соответственную сумму. Отсюда, умножая определители Крамера, которые составляются для получения неизвестных A_l^0, на $1/H_l'(ka)$, прибавляя к ним определители, заведомо равные нулю, и складывая их между собой, вместо бесконечной суммы определителей получим один определитель, равный

$$A=\frac{\det[a_{mn}+b_n/\alpha_m]}{\det(a_{mn})}-1, \tag{11}$$

где $\alpha_m=H_m'(ka)$.

Справедливость этого перехода можно проверить особенно просто, если идти от обратного, раскладывая определитель (11) на сумму определителей с коэффициентами a_{mn} и b_n/α_m.

Проведенная операция позволяет во много раз сократить трудоемкие выкладки при решении, а при использовании ЭЦВМ — затраты машинного времени.

Как следует из выражения (9), характеристика отражения решетки имеет ряд дифракционных спектров, положение которых определяется известным условием

$$\sin\theta=\frac{\pi n}{kb},\qquad n=0,\pm1,\pm2\ldots. \tag{12}$$

Кроме того, отражение от каждого из цилиндров решетки способно меняться скачком, когда

$$\sin\theta'=1-\frac{2\pi\mu}{kb}, \tag{13}$$

что может привести к появлению дополнительных спектров. Условие (13) соответствует появлению так называемых «аномалий Вуда», когда один из дифрагированных спектров начинает распространяться вдоль решетки. В этом случае повторяемые возмущения от всех цилиндров суммируются по фазе, вследствие чего энергия, рассеиваемая каждым цилиндром, в значительной степени возрастает [2]. Эта картина, однако, не определяет всех особенностей аномалий. Хессель и Олинер [7] приписывали аномалии поверхностной волне, которая могла бы распространяться вдоль поверхности, если бы усредненная проводимость ее обладала соответствующими условиями для появления поверхностных волн.

Определение величины отражения при появлении аномалий всегда представляло значительную трудность. С помощью равенства (11) это, однако, можно сделать достаточно просто. Пусть

$$a_{mn}=a_{mn}'+\frac{d_{mn}}{\Delta}, \tag{14}$$

где a_{mn}' — конечная часть a_{mn}, когда Δ стремится к нулю. Тогда

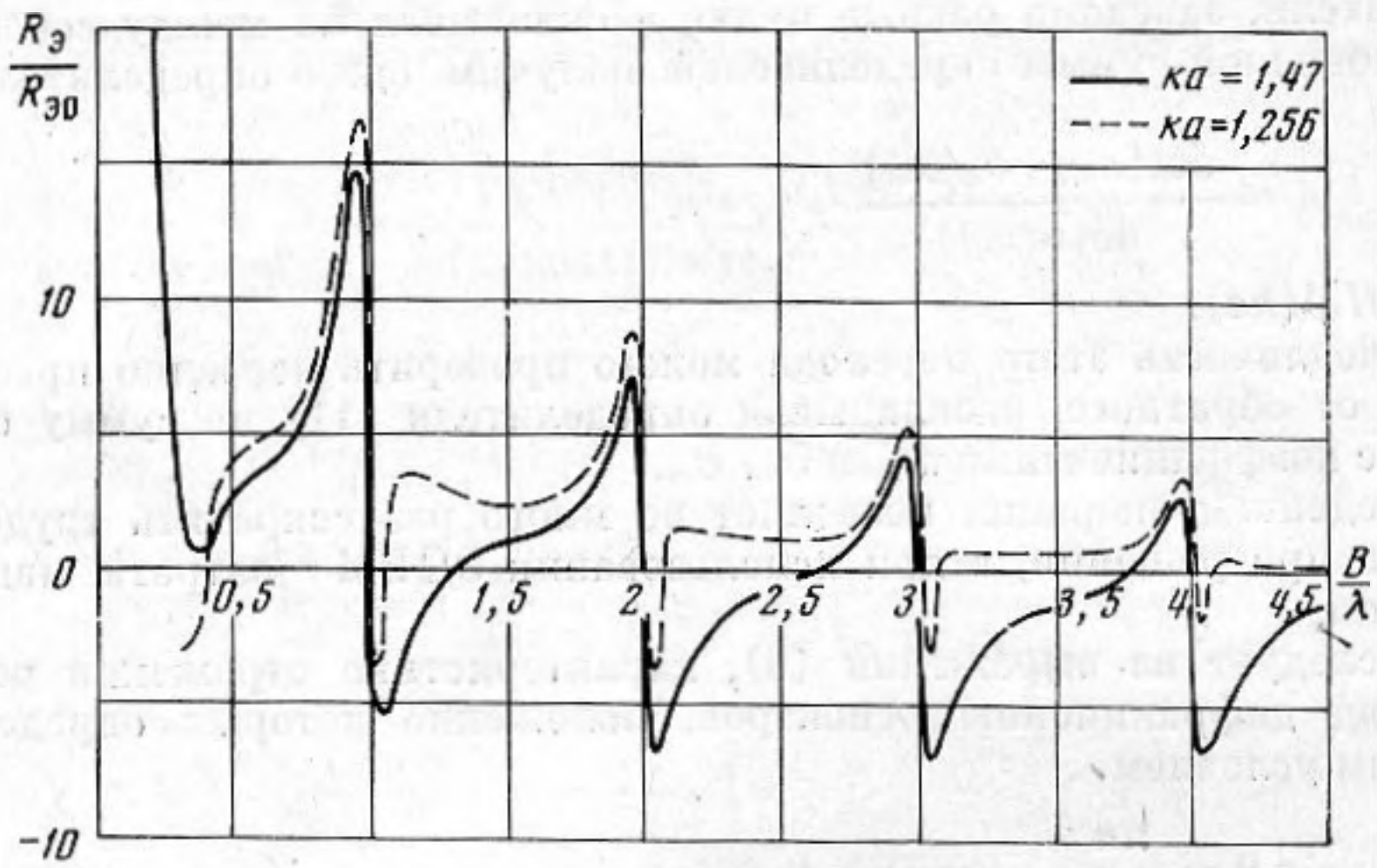
$$A+1=\lim_{\Delta\to0}\frac{\det[\Delta a_{mn}'+\Delta bn/\alpha_m+d_{mn}]}{\det[\Delta a_{mn}'+d_{mn}]}. \tag{15}$$

Вынося за знак определителя одинаковые множители в строках и столбцах d_{mn}, будем иметь $d_{mn}'=1$.

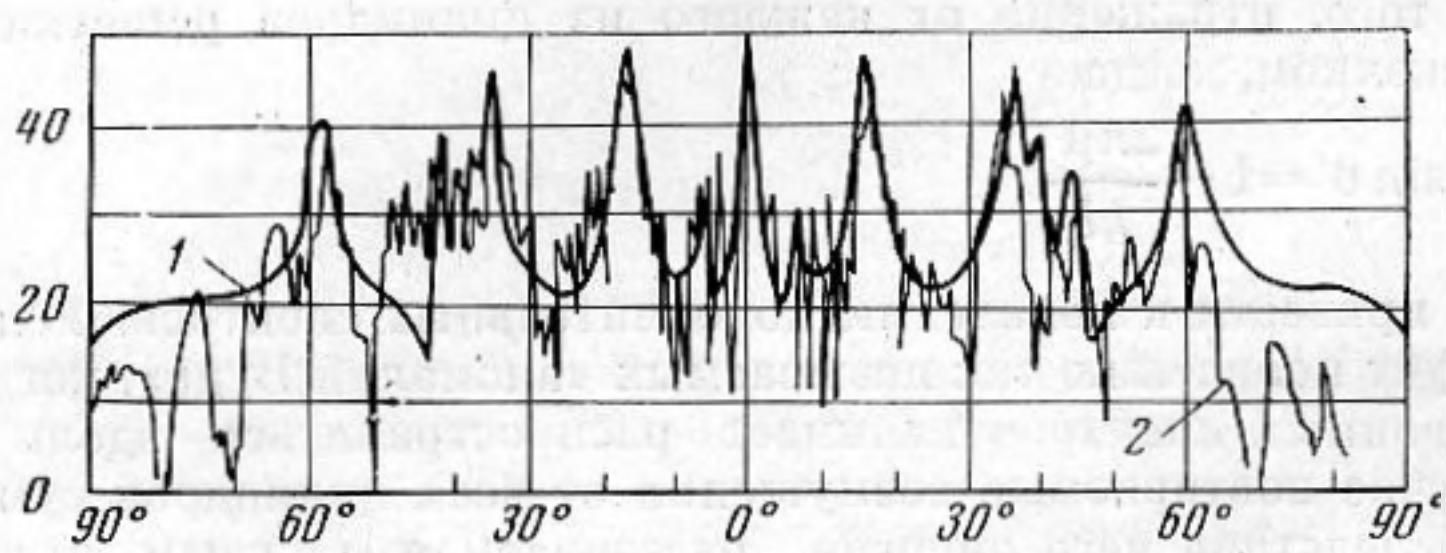
Неопределенность в выражении (15) можно разрешить по правилу Лопиталя путем дифференцирования по Δ числителя и знаменателя n раз, где n — порядок определителей. Откуда следует

$$A = \frac{\det[a_{mn}' + bn/\alpha_m]}{\det[a_{mn}']} - 1. \tag{16}$$

Таким образом, члены, которые вносят особенность, пропадают. Это — предельный переход. В ближайшей окрестности θ' происходит неограниченное увеличение (убывание) величины A. Это вызвано тем, что при



Фиг. 3



Фиг. 4

разложении функции Φ_{mn} в ряд по плоским волнам число цилиндров решетки принималось бесконечно большим. В случае, когда указанное допущение не используется, величина A при наличии аномалии становится большой, но ограниченной.

На фиг. 3 представлен расчет отражения решетки с учетом взаимодействия цилиндров по сравнению с тем же расчетом без учета взаимодействия для случая $\theta=0^0$ при изменении волнового расстояния между цилиндрами решетки. Из характеристик следует, что при появлении аномалий отражение от решетки меняется скачком, достигая максимума и минимума в ее окрестности. Это, в конечном итоге, ведет к появлению дополнительных спектров отражения, обусловленных взаимодействием цилиндров.

На фиг. 4 представлены расчетные (кривая *1*) и экспериментальные (кривая *2*) характеристики отражения решетки, длина которой 75 *мм*, $N=17$, $a=1{,}55$, $b=7{,}5$, $f=360$ *кгц*, из сравнения кривых видно, что расчет хорошо согласуется с экспериментом.

Для получения численных результатов обычно приходится привлекать вычислительную технику. В случае больших волновых размеров цилиндров порядок определителей (11) и (16), для получения соответствующей точности расчета, может быть настолько большим, что вычисление их становится затруднительным даже для ЭВМ. Отсюда большой интерес представляют методы, с помощью которых можно понижать порядок определителей.

С этой целью сравним между собой коэффициенты A_l^0 и A_{-l}^0 системы уравнений (7). Величина соответствующих им определителей Крамера не изменится, если каждый из их элементов умножить на $\exp[i(m-n)\theta]$. Тогда

$$a_{mn}^0 = C_{mn}\Phi_{mn} + \delta_{mn}, \tag{17}$$

$$b_n^0 = (-1)^n J_n(ka)\exp[i(l-n)\theta].$$

Поменяем местами строки и столбцы определителя A_{-l}. Полученный вновь определитель будет иметь такой же вид, что и A_l, за исключением того, что в нем индексы m и n поменяют знак на противоположный.

Из сопоставления коэффициентов этих определителей следует:

$$\overset{0}{a}_{-m-n} = a_{mn}^0,$$

$$b_n^0 = e^{il\theta} i^n J_n'(ka)\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right], \tag{18}$$

$$b_{-n}^0 = e^{-il\theta} i^n J_n'(ka)\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right].$$

Определители A_l^0 и A_{-l}^0, таким образом, можно представить в виде суммы двух определителей. Нетрудно видеть, что они являются решениями двух новых систем алгебраических уравнений, коэффициенты при неизвестных у которых равны a_{mn}^0, а свободные члены

$$b_n' = i^n J_n'(ka)\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \quad b_n'' = i^{n+1} J_n'(ka)\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right). \tag{19}$$

Новые неизвестные связаны с прежними с помощью следующих выражений:

$$A_l^0 e^{-il\theta} = \eta_l + \zeta_l,\ A_{-l}^0 e^{il\theta} = \eta_l - \zeta_l,\ \zeta_0 = 0. \quad 0 \leqslant l < \infty. \tag{20}$$

Т. е.

$$\eta_{-l} = \eta_l,\ \zeta_{-l} = -\zeta_l. \tag{21}$$

Отсюда число неизвестных в каждой из полученных систем можно уменьшить в два раза. Коэффициенты их при этом становятся равными:

для системы η_l

$$a_{mn}' = C_{mn}[\Phi_{m-n} + (-1)^{m-n}\Phi_{m+n}] + \delta_{mn}, \tag{22}$$

$$a_{0n}' = C_{0n}(-1)^n\Phi_n + \delta_{0n}. \quad 0 \geqslant m,\ n < \infty,$$

а для системы ζ_e

$$a_{kt}'' = C_{kt}[\Phi_{k-t} - (-1)^{k-t}\Phi_{k+t}] + \delta_{kt}.$$

Поле отражения одного цилиндра решетки в этом случае равно:

$$A = \frac{\det[a_{mn}' + d_{mn}']}{\det[a_{mn}']} + \frac{\det[a_{kt}'' + d_{kt}'']}{\det[a_{kt}'']} - 2, \tag{23}$$

где

$$d_{mn}' = \varepsilon_m C_{mn} i^n \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)[e^{-im\theta} + (-1)^m e^{im\theta}],$$

$$d_{kt}''=C_{kt}i^{t+1}\sin t\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)[e^{-ik\theta}-(-1)^k e^{ik\theta}],$$

$$\varepsilon_m=\begin{cases}{}^1/_2 & \text{при } m=0\\ 1 & \text{при } m>0.\end{cases}$$

Полученное выражение справедливо для произвольных параметров решетки и любого угла падения звука на нее. Применение его позволяет в два раза уменьшить порядок определителей (11) и (16), используемых при решении задачи. В случае, когда требуется определить величину дифракционных спектров решетки при выполнении условия (12), порядок определителей можно уменьшить еще в два раза.

Действительно, как следует из выражений (7), в этом случае функция Φ_{mn} при нечетных значениях $m-n$ становится равной нулю. Отсюда при четных n имеют смысл лишь коэффициенты системы с четными m, а при нечетных n — с нечетным m. Пользуясь следующим равенством:

$$\det[a_{mn}+d_{mn}]+\det[a_{mn}-d_{mn}]=2\det[a_{mn}], \tag{24}$$

которое справедливо, если $d_{mn}=\gamma_m-\beta_n$, т. е. d_{mn} равно произведению членов, зависящих отдельно от индексов m и n, окончательно получим:

$$A=\frac{\det[a_{mn}'+d_{mn}']}{\det[a_{mn}']}\Bigg|_{m,n\text{-четные}}+\frac{\det[a_{mn}'+d_{mn}']}{\det[a_{mn}']}\Bigg|_{m,n\text{-нечетные}}-\frac{\det[a_{kt}''+d_{kt}'']}{\det[a_{kt}'']}\Bigg|_{kt\text{-четные}}-\frac{\det[a_{kt}''+d_{kt}'']}{\det[a_{kt}'']}\Bigg|_{kt\text{-нечетные}}. \tag{25}$$

Равенством (24) можно с успехом пользоваться для понижения порядка определителей.

Значения a_{mn}', a_{kt}'', d_{mn}', d_{kt}'' определяются из выражений (22), (23). В частности, для нечетных значений m, n, k, t имеем:

$$\begin{aligned}
&a_{mn}'=C_{mn}(\Phi_{m-n}+\Phi_{m+n})+\delta_{mn},\\
&a_{0n}=C_{0n}\Phi_n,\\
&a_{kt}''=C_{kt}(\Phi_{k-t}-\Phi_{k+t})+\delta_{kt},\\
&d_{mn}'=2C_{mn}\sin n\theta\sin m\theta,\\
&d_{kt}''=2C_{kt}\cos k\theta\cos t\theta,
\end{aligned} \tag{26}$$

для четных m, n, k, t

$$\begin{aligned}
&a_{mn}'=C_{mn}(\Phi_{m-n}+\Phi_{m+n})+\delta_{mn},\\
&a_{0n}'=C_{0n}\Phi_n+\delta_{n0},\\
&a_{kt}''=C_{kt}(\Phi_{k-t}-\Phi_{k+t})+\delta_{kt},\\
&d_{mn}'=2\varepsilon_m C_{mn}\cos m\theta\cos n\theta,\\
&d_{kt}''=2C_{kt}\sin k\theta\sin t\theta.
\end{aligned} \tag{27}$$

Значения этих коэффициентов совпадают с полученными ранее [3] для частного случая $\theta=0°$.

При ручном счете в случае больших значений ka можно использовать следующий прием, который позволяет получать приближенные результаты. Пусть

$$a_{mn}=g_{mn}+\delta_{mn}. \tag{28}$$

Тогда определители (23), (25) можно разложить в следующий ряд по возрастающим порядкам определителей:

$$\det[a_{mn}]=1+\sum_{t=\mu}^{\infty} g_{tt}+\sum_{t=\mu}^{\infty}\sum_{p=\mu}^{t-1}\begin{vmatrix} g_{tt} & g_{tp} \\ g_{pt} & g_{pp}\end{vmatrix}+ \tag{29}$$

$$+\sum_{t=\mu}^{\infty}\sum_{p=\mu}^{t-1}\sum_{h=\mu}^{p-1}\begin{vmatrix} g_{tt} & g_{tp} & g_{th} \\ g_{pt} & g_{pp} & g_{ph} \\ g_{ht} & g_{hp} & g_{hh}\end{vmatrix}+\ldots,$$

где μ — значения индексов $t, p, h, \ldots$, с которых отсчитываются значения m и k в определителях (23), (25).

Можно показать, что сумма определителей второго порядка (29) характеризует одинарное переотражение волн взаимодействия цилиндров решетки; сумма определителей третьего порядка — двойное, и так далее. В случае, когда взаимодействие между цилиндрами во внимание не принимается, учитывается лишь сумма диагональных членов матрицы определителя (29).

Для исследования условий сходимости этого ряда воспользуемся следующим неравенством Адамара [8]:

$$|\det[g_{mn}]|^2\leqslant\prod_{n=0}^{M}\sum_{m=0}^{M}|g_{mn}|^2, \tag{30}$$

где M стремится к бесконечности.

При больших значениях индексов m и n функция $\Phi_{m+n}\gg\Phi_{m-n}$. В этом случае

$$\Phi_{m+n}\leqslant 2\sum_{r=1}^{\infty}H_{m+n}(kbr)\simeq\frac{-2i(m+n-1)!}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{2}{kbr}\right)^{m+n}\simeq \tag{31}$$

$$\simeq\frac{-2i(m+n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{kb}\right)^{m+n}.$$

Тогда

$$|\det[g_{mn}]|^2\leqslant\prod_{n=0}^{M}\sum_{m=0}^{M}\left[4\left|\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}\left(\frac{ka}{kb}\right)^{m+n}\right|\right]^2\leqslant \tag{32}$$

$$\leqslant\prod_{n=0}^{M}\left[4\left|\sum_{m=0}^{M}\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}\left(\frac{ka}{kb}\right)^{m+n}\right|\right]^2.$$

Для вычисления суммы по m используем следующее равенство [3]:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}\left(\frac{ka}{kb}\right)^{m+n}=\frac{1}{\left(\frac{kb}{ka}-1\right)^{n}}. \tag{33}$$

Очевидно, что произведение по n будет уменьшаться с возрастанием n при выполнении условия

$$b>2a. \tag{34}$$

И сходимость этого произведения будет тем выше, чем дальше отстоят цилиндры друг от друга.

Условие (34) в реальных условиях выполнимо, и ряд (29) обычно сходится достаточно хорошо.

ЛИТЕРАТУРА

1. *V. Twersky.* Multiple scattering by arbitrary configuration of parallel cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1952, *24*, 42.
2. *V. Twersky.* On the scattering of waves by an infinite grating. Transactions on antennas and propagations. V-AB-10, november № 6, 1962.
3. *Е. Л. Шендеров.* Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
4. *Е. А. Иванов.* О дифракции поля продольного дипольного излучателя на двух параллельных круговых цилиндрах. Изв. вузов. Радиофизика, 1966, *9*, 3.
5. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гостехиздат, 1964.
6. *V. Twersky.* Elementary function representations of Soblömilch series. Archive for Rational mechanics and analysis, 1961, *8*, 4.
7. *A. Hessel. A. A. Oliner.* A new theory of Wood's anomalies of optical gratings. Appl. Optics, 1965, *4*, 1272.
8. *Г. Корн, Т. Корн.* Справочник по математике для научных работников и инженеров, М., «Наука», 1968.

Поступила
3 июля 1972 г.
После переработки
8 апреля 1974 г.