относительного изменения коэффициента поглощения. При напряженности поля около 23 *кв/см* наступает резкое уменьшение поглощения ультразвука ($\Delta\alpha<0$), причем величина $\Delta\alpha/\alpha$ достигает значения -80%. При дальнейшем увеличении напряженности поля коэффициент остается того же знака и не изменяет своей величины. В изотропной жидкости вблизи температуры фазового превращения также наблюдается уменьшение поглощения ультразвука, но оно не велико и величина $\Delta\alpha/\alpha$ стремится к нулю при повышении температуры.

Изменение поглощения ультразвука в нематическом состоянии обусловлено переориентацией молекул в электрическом поле. Молекулы ПАА обладают отрицательной диэлектрической анизотропией $(\varepsilon_\perp-\varepsilon_\parallel)<0$, поэтому электрическое поле должно их ориентировать перпендикулярно направлению поля. Однако рентгеноструктурные исследования [5, 6] в слоях толщиной в несколько миллиметров показывают ориентацию молекул в направлении электрического поля. Подобная ориентация является следствием наличия движения жидкокристаллического вещества, возникающего в электрическом поле и направленного вдоль силовых линий поля. Увеличение поглощения ультразвука вызвано, по-видимому, ориентацией молекул вдоль распространения ультразвука. Уменьшение влияния электрического поля на поглощение с ростом температуры вызвано нарушением ориентации под действием теплового движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. E. Lord, Jr., M. M. Labes.* Anisotropic ultrasonic properties of a nematic liquid crystal. Phys. Rev. Lett., 1970, *25*, 9, 570–572.
2. *E. D. Lieberman, J. D. Lee, F. C. Moon.* Anistropic ultrasonic wave crystal placen in a magnetic field. Appl. Phys. Lett., 1971, *18*, 7, 280–281.
3. *K. A. Kemp, S. V. Letcher.* Ultrasonic determination of anisotropic sheal and bielk viscosities in nematic liquid crystals. Phys. Rev. Lett., 1971, *27*, 24, 1634–1636.
4. *G. G. Natale, D. E. Commins.* Temperature dependence of anisotropic-ultrasonic propagation in a nematic liquid Crystal. Phys. Rev. Lett., 1972, *28*, 22, 1439–1441.
5. *Б. К. Вайнштейн, Е. А. Костерин, И. Г. Чистяков.* Структура параазоксианизола в постоянных электрических полях. Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1970, *77*, 75–89.
6. *Р. И. Жаренов, И. Г. Чистяков.* Исследование структуры п-азоксибензолов в постоянных электрических полях. Сб. докл. I научн. конф. по жидким кристаллам, Иваново, 1972, 216–226.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила 26 сентября 1973 г.

УДК 534.22.094.1

О ДИСПЕРСИИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ПРОСТЫХ ЖИДКОСТЯХ

В. А. Красильников, В. И. Павлов

Зависимость энергии элементарного возбуждения $\varepsilon(k)$ от структурного фактора $S(x)$ жидкого гелия в основном состоянии была получена Фейнманом [1] и несколько позднее иным методом Питаевским [2]. Тем самым в принципе была определена дисперсионная зависимость частоты ω от волнового числа k при некоторых весьма общих предположениях, накладываемых на вид структурного фактора среды. Вычисление этого фактора для квантовых жидкостей представляет определенные трудности.

Если пренебречь квантовыми эффектами, то для обычных жидкостей эта задача разрешима и дисперсионная зависимость может быть найдена. Прежде всего покажем, что зависимость $\varepsilon(k)$ от $S(x)$, полученная в работах [1–2], остается справедливой и для классических жидкостей. Ограничимся гидродинамическим приближением.

Уравнения движения и непрерывности идеальной баротропной жидкости сохраняет полную энергию

$$\mathscr{H}=\int dx\left\{\frac{1}{2}\rho v^{-2}+\varepsilon(\rho)\right\}. \tag{1}$$

Здесь ρ – плотность среды, $\varepsilon(\rho)$ – плотность внутренней энергии, v – скорость в эйлеровых координатах. Выражение (1) является гамильтонианом с каноническими переменными * ρ и φ, где $v=\operatorname{grad}\varphi$. Непосредственно варьируя (1) по ρ и φ, можно показать, что уравнение движения (уравнение Бернулли) и уравнение непрерывности могут быть написаны в виде уравнений Гамильтона:

$$\partial\varphi/\partial t=-\delta\mathscr{H}/\delta\rho,\quad \partial\rho/\partial t=\delta\mathscr{H}/\delta\varphi.$$

* См. работу [3]; там же приведена полная библиография.

Здесь $\delta\mathscr{H}/\delta\rho$ и $\delta\mathscr{H}/\delta\varphi$ представляют собой функциональные производные. Таким образом, канонические переменные определены, причем ρ – каноническая координата, а φ – канонический импульс.

Для слабовозбужденного состояния жидкости можно положить $\rho=\rho_0+\rho_1$, $|\rho_1|\ll\rho_0$, где ρ_0 – плотность, соответствующая равновесному состоянию. Раскладывая $\varepsilon(\rho)$ в ряд по ρ_1 вблизи положения равновесия и ограничиваясь только квадратичными членами, получим [2]

$$\mathscr{H}\approx\mathscr{H}_0+\frac{1}{2}\rho_0\int dx_1\, v^2+\frac{1}{2}\int dx_1\, dx_2\,\chi(x_1,x_2)\,\rho_1(x_1)\,\rho_1(x_2). \tag{2}$$

Здесь $\mathscr{H}_0$ – энергия жидкости в равновесном состоянии, $\chi(x_1, x_2)$ – вторая функциональная производная внутренней энергии жидкости по числу частиц в единице объема, которая определяет структуру жидкости; для изотропной среды $\chi(x_1, x_2)=\chi(x_1-x_2)$. Раскладывая канонические переменные φ и ρ в ряд Фурье, получим

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+\frac{1}{V}\sum_k\left(\frac{1}{2}\rho_0k^2\varphi_k^2+\frac{1}{2}\chi_k\rho_k^2\right), \tag{3}$$

где V – нормировочный объем. Полученное выражение имеет вид гамильтониана суммы осцилляторов с каноническим импульсом φ_k и канонической координатой ρ_k. Собственная частота каждого из них дается выражением

$$\omega_k^2=\rho_0\chi_k k^2. \tag{4}$$

Чтобы исключить из рассмотрения величину χ_k и связать ω_k со структурным фактором, необходимо провести квантование (3), что можно сделать, поскольку канонические переменные определены.

Энергия, соответствующая энергии гармонического осциллятора в равновесном состоянии с температурой $\theta=\varkappa T$ ($\varkappa$ – постоянная Больцмана), равна

$$\hbar\omega_k\left(\bar{N}_k+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_k\left[(\exp\hbar\omega_k/\theta-1)^{-1}+\frac{1}{2}\right]= \tag{5}$$

$$=\frac{\hbar\omega_k}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_k}{2\theta}=\frac{1}{V}\chi_k\overline{|\rho_k|^2}.$$

Будем считать $\hbar\omega_k\ll\theta$; тогда, очевидно,

$$\theta=\frac{1}{V}\chi_k\overline{|\rho_k|^2}. \tag{6}$$

Выражая отсюда χ_k и подставляя в формулу (4), получаем *

$$\omega_k^2=\rho_0V\theta/\overline{|\rho_k|^2}k^2. \tag{7}$$

Смысл $\overline{\rho_k^2}$ физически достаточно прозрачен. Нетрудно видеть, что $\overline{\rho_k^2}$ с точностью до размерной постоянной есть фурье-компонента функции корреляции плотности числа частиц $S(x_1-x_2)=\dfrac{\overline{[n(x_1)-\bar{n}][n(x_2)-\bar{n}]}}{\bar{n}}$. Можно показать [4], что для изотропной жидкости

$$S(x)=\delta(x)=\nu(|x|), \tag{8}$$

$$\overline{|n_k|^2}=\bar{n}V\left(1+\int dx\,\nu(x)\exp ikx\right)= \tag{9}$$

$$=\bar{n}V\left(1+\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{k}\int_0^\infty dx\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)\sin kx\right),$$

$$\int dx\,\nu(x)=-1+\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{\bar{N}}=-1+\frac{\varkappa T}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=-1+\frac{\varkappa T}{mc^2}. \tag{10}$$

---

* В работе [2] принято $T=0°$ К, откуда следовало $\dfrac{\hbar\omega_k}{2}=\dfrac{1}{V}\chi_k\overline{\rho_k^2}$ и тем самым $\varepsilon_k=\hbar\omega_k=\dfrac{1}{2}\rho_0V\dfrac{\hbar^2k^2}{\overline{\rho_k^2}}=\dfrac{\hbar^2k^2}{2S_k}$.

Здесь $\bar{n}=\bar{N}/V$ – среднее число молекул жидкости в единице объема. Эта величина связана со средней плотностью ρ_0 соотношением $\rho_0=m\bar{n}$, где m – масса молекул жидкости, $\nu(x)$ – функция корреляции, которая характеризует вероятность частице 2 находиться в элементе объема dx_1, если известно, что частица 1 находится в dx_2. Интеграл от определенной таким образом функции корреляции по некоторому объему связан со средним квадратом флуктуации полного числа частиц в этом объеме и тем самым со сжимаемостью $(\partial V/\partial p)_T$ и скоростью звука c в жидкости. Хотя эти величины взяты при постоянной энтропии, делать различие между изотермической и адиабатической скоростями звука нет существенной необходимости. Практически для всех жидкостей отношение теплоемкостей с очень высокой степенью точности равно единице [4].

Известные к настоящему времени экспериментальные результаты [5] свидетельствуют о том, что в окрестности точки $x=a$ (a – характерный размер молекул жидкости) производная $\partial\nu/\partial x$ имеет резкий максимум, ширина которого вследствие плотной упаковки молекул и того факта, что молекулы жидкости не могут сближаться на расстояние, меньшее их характерных размеров, мала по сравнению с a. Это обстоятельство весьма важно, так как при этом условии выражение (7) может быть легко вычислено. Действительно в этом случае $\partial\nu/\partial x$ можно заменить дельта-функцией $A\delta(x-a)$, где A – некоторая постоянная и

$$\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{\partial\nu}{\partial x}\sin kx\,dx=\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{k}A\sin ka. \tag{11}$$

Для определения A воспользуемся тем, что при $k\to 0$

$$\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial k}\frac{A}{k}\sin ka\simeq-\frac{4}{3}\pi A a^3. \tag{12}$$

С другой стороны, поскольку при $k\to 0$ (9) переходит в (10), то сравнивая выражения (12) и (10), имеем

$$A=\frac{3}{4\pi a^3}\left(1-\frac{\varkappa T}{mc^2}\right). \tag{13}$$

Подставляя это значение A в формулу (12), получим

$$\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial k}\frac{1}{k}A\sin ka=3\left(1-\frac{\varkappa T}{mc^2}\right)\frac{1}{ka}\frac{\partial}{\partial(ka)}\frac{\sin ka}{ka}, \tag{14}$$

и, согласно формуле (9),

$$\overline{|\rho_k|^2}=\rho_0 Vm\left[1+3\left(1-\frac{\varkappa T}{mc^2}\right)\frac{1}{(ka)^3}\frac{\partial}{\partial(ka)}\frac{\sin ka}{ka}\right]. \tag{15}$$

Подставляя полученное выражение (15) в формулу (7), получаем дисперсионную зависимость $\omega(k)$ в неявной форме. Если $ka\ll 1$ то, принимая во внимание формулу (5), можно получить окончательно

$$\omega(k)=ck\left\{1-\frac{mc^2}{20\varkappa T}a^2k^2\left[1-\frac{\varkappa T}{mc^2}+O\left(\frac{\hbar^2/ma^2}{\varkappa T}\right)\right]\right\}. \tag{16}$$

Сделаем некоторые оценки. Для большинства жидкостей величина $\dfrac{\varkappa T}{mc^2}=\dfrac{\overline{(\Delta N)^2}}{\bar{N}}$ достаточно мала. Поэтому

$$\frac{\Delta c}{c}=\frac{c-v_\text{г}}{c}\simeq\frac{mc^2}{100}a^2k^2\simeq\frac{4ma^2}{\theta}f^2,$$

где $v_\text{г}=\partial\omega/\partial k$ и f – частота звука. Например, для жидкого аргона при $f=10^9$ *гц*, $m=10^{-22}$ *г*, $T=10^2$ °K, $a=2\cdot10^{-8}$ *см*, $\Delta c/c\simeq 8\cdot10^{-6}$.

Хотя дисперсионная поправка мала, в некоторых задачах ее влияние может быть заметно. Она может иметь существенное значение, например, при распространении волн конечной амплитуды в жидкостях при гиперзвуковых частотах, вызывая пространственные осцилляции второй гармоники. Кроме того, экспериментальные данные по изучению обсуждаемой дисперсии могут оказаться интересными для исследования поведения корреляционной функции простых жидкостей. Точность, с которой в настоящее время измеряется скорость гиперзвука, позволяет обнаружить указанный вид дисперсии. Отметим в заключение, что во всем проведенном рассмотрении не принимались во внимание возможные релаксационные процессы, что требует специального анализа. Выражаем благодарность Л. П. Питаевскому и В. О. Руденко за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. P. Feynman.* Atomic theory of two – fluid model of liquid He. Phys. Rev., 1954, *94*, 1, 262–279.
2. *Л. П. Питаевский.* К выводу формулы для энергетического спектра жидкого He^4. ЖЭТФ, 1956, *31*, 3(9), 536–537.
3. *В. Е. Захаров.* Гамильтониановский формализм для гидродинамических моделей плазмы. ЖЭТФ, 1971, *60*, 5, 1714–1727.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Статистическая физика, М., «Наука», 1971.
5. Физика простых жидкостей, статистическая теория. Под ред. Г. Темперли, Дж. Роулинсона, Дж. Рашбрука, М., «Мир», 1971.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра акустики

Поступила
29 марта 1974 г.

УДК 534.833

О РЕЗОНАНСНЫХ ОТРАЖАТЕЛЯХ ЗВУКА В ВОЛНОВОДЕ

А. Д. Лапин

Для уменьшения передачи звука низкой частоты по волноводу часто применяют резонансные отражатели [1–3], представляющие собой резонансную систему, акустически присоединенную к волноводу. Эффективными резонансными отражателями являются объемный резонатор, участок стенки волновода, характеризуемый импедансом упругого типа, упругая пластина, закрывающая вырез в стенке, и т. п.

В литературе по звукоизоляции часто встречается утверждение, что резонансная система является эффективным отражателем звука лишь в узком (по сравнению с длиной волны звука) волноводе. В настоящей работе показано, что при определенной структуре падающего поля резонансная система является эффективным отражателем звука и в широком волноводе.

Рассмотрим волновод с круговым сечением; направим ось z цилиндрической системы координат r, φ, z по его оси. Будем считать, что стенка $r=R$ волновода характеризуется реактивным импедансом Z_0 при $|z|<l$ и является абсолютно жесткой при $|z|>l$. Пусть из полуволновода $z<-l$ на полуволновод $z>-l$ падает гармоническая звуковая волна с потенциалом $\Phi^{(0)}$. Найдем рассеянное поле Φ в волноводе обусловленное импедансным участком. Мы будем предполагать, что длина этого участка мала по сравнению с длиной волны звука.

Выберем в качестве падающего поля нормальную волну с индексами (g, s), имеющую единичную амплитуду. Для волновода с жесткими стенками эта волна имеет вид

$$\Phi^{(0)}(r, \varphi, z)=J_g(\varkappa_{gs}r)\cos(g\varphi)\exp\left(i\sqrt{k^2-\varkappa_{gs}^2}\,z\right), \tag{1}$$

где J_g – функция Бесселя g-го порядка, k – волновое число, $\varkappa_{00}=0$, $\varkappa_{gs}=\mu_{gs}/R$, μ_{gs} – s-й положительный корень уравнения

$$J_g'(\mu)=0 \quad (g=0, 1, 2, 3, \ldots;\ s=1, 2, 3, \ldots).$$

В рассматриваемой задаче рассеяние звука происходит на осесимметричном препятствии, поэтому рассеянное поле Φ будет иметь ту же зависимость от угла, что и падающее поле $\Phi^{(0)}$.

Звуковое поле в волноводе при $|z|<l$ удовлетворяет граничному условию

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R}=ik\frac{\rho c}{Z_0}\left[\Phi^{(0)}(R, 0, z)+\Phi(R, 0, z)\right]\cos(g\varphi), \tag{2}$$

где ρ и c – соответственно плотность среды и скорость звука в ней. При малой (по сравнению с длиной волны звука) длине импедансного участка соотношение (2) можно приближенно представить в виде

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R}=ik\frac{\rho c}{Z_0}\left[\Phi^{(0)}(R, 0, 0)+\Phi(R, 0, 0)\right]\cos(g\varphi) \quad \text{при} \quad |z|<l. \tag{3}$$

Рассеянное поле в волноводе можно вычислить следующим способом. Найдем решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее граничному условию

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R}=\begin{cases} v\cos(g\varphi) & |z|<l \\ 0 & |z|>l \end{cases} \tag{4}$$

и условию излучения; величину v выберем таким образом, чтобы это решение удовлетворяло и граничному условию (3). Тогда мы получим (в первом приближении по kl) рассеянное поле.