АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 2

УДК 534.26

ОТРАЖЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ ОТ МЕСТА ВХОДА ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТЬ

В. А. Вешев, Д. П. Коузов, В. А. Пачин

Рассмотрены изгибные колебания пластины, вертикально погруженной в жидкость. Верхняя часть пластины выступает над поверхностью жидкости и приводится в движение некоторыми источниками. Вычислен коэффициент отражения от поверхности жидкости для изгибной волны, бегущей по пластине из бесконечности. Определен входной импеданс для пластины, приведенной в движение гармонической силой, приложенной к ее верхнему концу.

Представляет практический и теоретический интерес изучение колебаний упругих тел, частично погруженных в жидкость. Данная проблема исследуется ниже на некоторой простейшей модели. Пусть идеальная сжимаемая жидкость заполняет нижнее полупространство $-\infty<x<+\infty$, $0<y<+\infty$. В жидкость вертикально погружена бесконечная пластина $-\infty<y<+\infty$ (фиг. 1). Источником поля является изгибная волна, набегающая со стороны свободной части пластины. В силу симметрии описанной модели антисимметричные (изгибные) и симметричные колебания пластины возбуждаются и протекают независимо друг от друга, поэтому в дальнейшем симметричные движения пластины не учитываются. В качестве переменных, описывающих акустическое поле в системе, выберем изгибное смещение в пластине ζ и звуковое давление в жидкости P. Зависимость процессов от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, который всюду опускается. Для искомых функций $\zeta(y)$ и $P(x, y)$ имеем уравнение Гельмгольца

$$\Delta P+k^2P=0 \quad (x\neq 0,\ y>0), \tag{1}$$

соотношение

$$\zeta=e^{i\varkappa y}+\alpha e^{-i\varkappa y}+\beta e^{\varkappa y} \quad (y<0), \tag{2}$$

описывающее движение свободной части пластины, и граничные условия

$$\left(\frac{d^4}{dy^4}-\varkappa^4\right)\zeta=-\frac{h^3}{D}[P(+0, y)-P(-0, y)] \quad (y>0) \tag{3}$$

$$\zeta=\frac{1}{\rho\omega^2h^2}\frac{\partial P(\pm 0, y)}{\partial x} \quad (y>0), \tag{4}$$

выражающие баланс сил и непрерывность нормальной составляющей вектора смещений на границе пластина — жидкость. Поверхность жидкости считается свободной

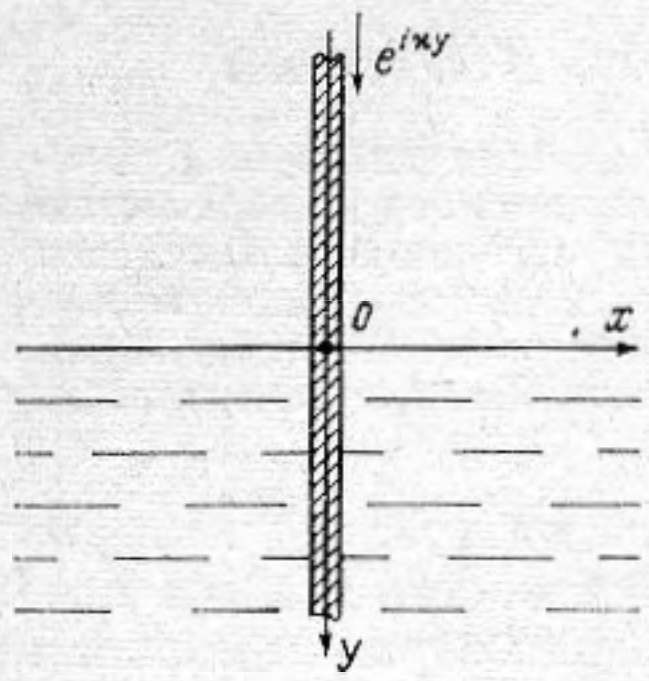
$$P(x, 0)=0 \quad (x\neq 0). \tag{5}$$

Наконец, в месте погружения пластины в жидкость ($y=0$) считаются непрерывными смещение $\zeta(y)$ и его производные до третьего порядка включительно

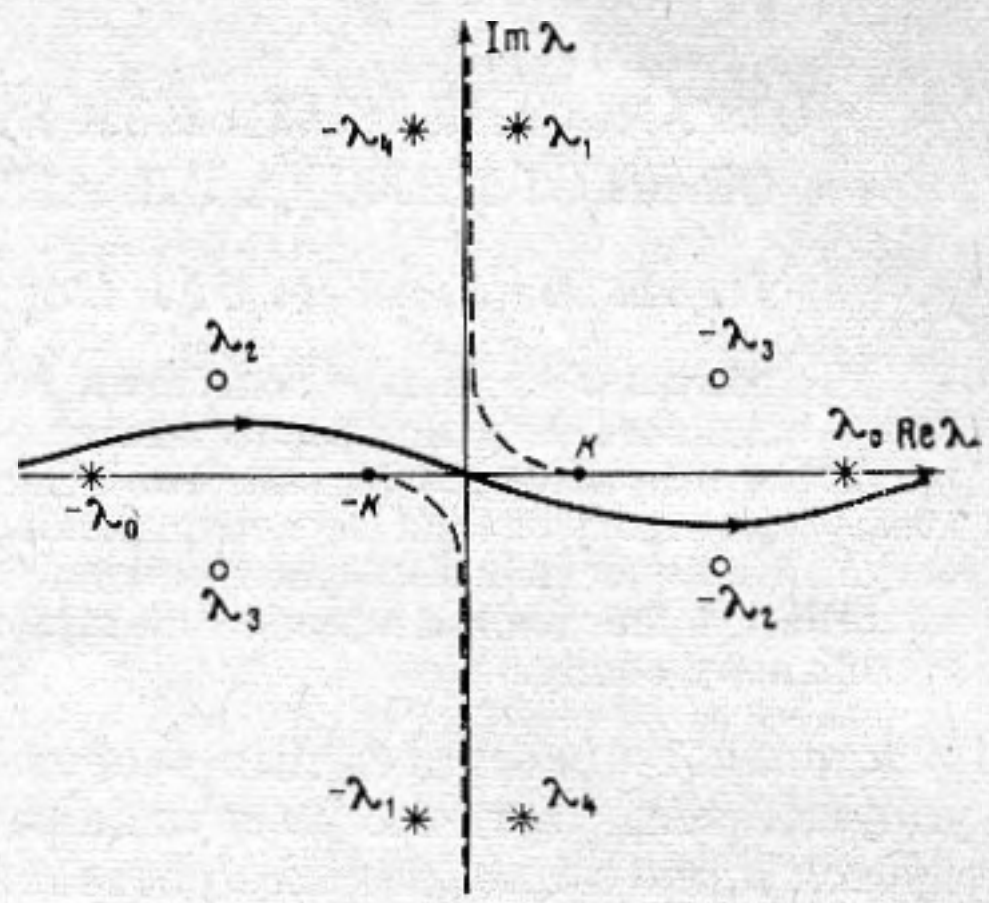
$$\frac{d^s\zeta(+0)}{dy^s}=\frac{d^s\zeta(-0)}{dy^s} \quad (s=0, 1, 2, 3). \tag{6}$$

Гранично-контактные соотношения (6) означают отсутствие механических дефектов в пластине, а также отсутствие сосредоточенного (типа δ-функции) воздействия на нее со стороны жидкости. Искомая функция $P(x, y)$ считается непрерывной в начале координат и удовлетворяющей принципу предельного поглощения.

В формулах (1)—(6) использованы обозначения: h — толщина пластины, D — цилиндрическая жесткость пластины, ρ — плотность жидкости,



Фиг. 1



Фиг. 2

ω — круговая частота, k — безразмерное волновое число в жидкости, $\varkappa$ — безразмерное волновое число в пластине, α — коэффициент отражения изгибной волны, β — коэффициент трансформации бегущей изгибной волны в нераспространяющуюся изгибную волну. Величины x, y, ζ, k, $\varkappa$ считаются безразмерными, при этом в качестве характерной длины выбрана толщина пластины h.

Будем искать $P(x, y)$ в виде разложения по плоским волнам

$$P(x,y)=\frac{\rho\omega^2h^2}{\pi}\operatorname{sign}(x)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(\lambda)\exp\{i\lambda y-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|x|\}\,d\lambda. \tag{7}$$

Выбор ветви радикала традиционный [1]. Пользуясь условиями (3)—(5), получаем

$$p(\lambda)=[a(i\lambda)^3+bi\lambda]/[(\lambda^4-\varkappa^4)\sqrt{\lambda^2-k^2}-2\nu], \tag{8}$$

где

$$\nu=\rho\omega^2h^5/D.$$

Процедура нахождения $p(\lambda)$ рассмотрена в работе [2] для более общей ситуации и здесь опускается. В формуле (7) обход полюсов $p(\lambda)$, расположенных на действительной оси ($\lambda=\pm\lambda_0$), осуществляется на основании принципа предельного поглощения [1]. Этот обход пояснен на фиг. 2, где контур интегрирования изображен сплошной жирной линией, а разрезы — штриховой.

На основании гранично-контактных равенств (6) получается линейная неоднородная система для нахождения неизвестных констант α, β, a, b:

$$\begin{aligned}
&\alpha+\beta+I_3a+I_1b=-1\\
&-i\varkappa\alpha+\varkappa\beta+I_4a+I_2b=-i\varkappa\\
&-\varkappa^2\alpha+\varkappa^2\beta+I_5a+I_3b=\varkappa^2\\
&i\varkappa^3\alpha+\varkappa^3\beta+I_6a+I_4b=i\varkappa^3,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$I_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(i\lambda)^n\sqrt{\lambda^2-k^2}\,e^{+i0\lambda}}{(\lambda^4-\varkappa^4)\sqrt{\lambda^2-k^2}-2\nu}d\lambda.$$

Интегралы I_n для нечетных n имеют следующие значения [3]:

$$I_1=I_5=0,\quad I_3=1,$$

и, решая систему (9), приходим к следующему выражению для коэффициента отражения:

$$\alpha=i\frac{I_6+\varkappa(I_4^2-I_2I_6)(1+i)-2iI_4\varkappa^2-\varkappa^3(1-i)+I_2\varkappa^4}{I_6+\varkappa(I_4^2-I_2I_6)(1-i)+2iI_4\varkappa^2-\varkappa^3(1+i)+I_2\varkappa^4}. \tag{10}$$

Интегралы I_n для четных $n=2m$ способом, указанным в работе [1], могут быть сведены к сумме вычетов

$$I_{2m}=\frac{2}{\pi}(-1)^{m+1}\sum_{s=0}^{4}\frac{\lambda_s^{2m-1}(\lambda_s^2-k^2)}{5\lambda_s^4-4\lambda_s^2k^2-\varkappa^4}\left(\ln\frac{\lambda_s+\sqrt{\lambda_s^2-k^2}}{k}-\frac{i\pi}{2}\right). \tag{11}$$

Выбор ветви логарифма здесь определяется требованием

$$0<\operatorname{Re}\ln\frac{\lambda_s+\sqrt{\lambda_s^2-k^2}}{k},\qquad 0\leqslant\operatorname{Im}\ln\frac{\lambda_s+\sqrt{\lambda_s^2-k^2}}{k}\leqslant 2\pi.$$

Через λ_s ($s=0, 1, 2, 3, 4$) обозначены корни знаменателя $p(\lambda)$. Функция $(\lambda^4-\varkappa^4)\sqrt{\lambda^2-k^2}-2\nu$ имеет на двулистной римановой поверхности десять корней $\pm\lambda_0, \pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_4$, причем $\lambda_4=\bar{\lambda}_1$, $\lambda_3=\bar{\lambda}_2$. Выбор нумерации корней пояснен на фиг. 2. При этом корни, лежащие на основном листе, изображены звездочкой, а корни, расположенные на втором листе, отмечены кружочком.

Значения корней λ_s ($s=0, 1, 2$), интегралов I_{2m} ($m=1, 2, 3$) и коэффициента отражения α для ситуации сталь — вода были рассчитаны на ЭВМ и протабулированы (см. таблицу). Модуль и аргумент α в зависимости от k изображены на фиг. 3 и 4 сплошной линией. Как видно из графика, в интервале $10^{-3}\leqslant k\leqslant 1$ коэффициент отражения относительно невелик, и лишь для весьма низких частот модуль его (в связи с ростом «присоединенной» массы жидкости) начинает довольно медленно стремиться к единице. Предельное значение аргумента α при $k\to 0$ равно $\pi/2$. Сравнительная малость коэффициента отражения, по-видимому, связана с большим удельным весом стали. На низких частотах ($k\to 0$) имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_s=(2\nu_0)^{1/5}k^{2/5}e^{2\pi is/5}\left[1+\frac{1}{5}(2\nu_0)^{-4/5}\varkappa_0^4k^{2/5}e^{-8\pi is/5}+O(k^{4/5})\right], \tag{12}$$

$$I_{2m}=(-1)^{m+1}\frac{4i}{5}(2\nu_0)^{(2m-3)/5}k^{(4m-6)/5}\left[e^{2\pi i\frac{2m-3}{5}}-1\right]^{-1}+O(k^{(4m-4)/5}), \tag{13}$$

$$\alpha=i\frac{1+iA_1\gamma-A_2\gamma^2-iA_3\gamma^3+O(\gamma^4)}{1+A_1\gamma+A_2\gamma^2+A_3\gamma^3+O(\gamma^4)} \tag{14}$$

k	$\lambda_0 \cdot 10^3$	$\mathrm{Re}\lambda_1 \cdot 10^3$ $\mathrm{Im}\lambda_1 \cdot 10^3$	$-\mathrm{Re}\lambda_2 \cdot 10^3$ $\mathrm{Im}\lambda_2 \cdot 10^3$	$-\mathrm{Re}I_2$ $-\mathrm{Im}I_2$	$-\mathrm{Re}I_4 \cdot 10^3$ $\mathrm{Im}I_4 \cdot 10^3$	$-\mathrm{Re}I_6 \cdot 10^6$ $-\mathrm{Im}I_6 \cdot 10^6$	$\mathrm{mod}\ \alpha \cdot 10^2$	$\arg \alpha$
1	1096	44,3	937	0,524	519	459000	1,42	4,59
		983	122	0,475	481	522000		
$8 \cdot 10^{-1}$	965	46,5	802	0,585	469	329000	1,66	4,57
		880	123	0,523	431	379000		
$5 \cdot 10^{-1}$	759	50,0	578	0,734	379	164000	2,26	4,50
		700	102	0,637	343	194000		
$2 \cdot 10^{-1}$	490	51,7	331	1,11	251	42200	3,79	4,33
		452	89,3	0,936	221	53100		
10^{-1}	356	48,7	236	1,52	184	15200	5,17	4,19
		328	93,1	1,26	159	20200		
$8 \cdot 10^{-2}$	322	47,1	214	1,68	167	10900	5,65	4,15
		297	92,3	1,39	144	14900		
$5 \cdot 10^{-2}$	260	43,3	176	2,07	136	5490	6,75	4,06
		240	87,4	1,70	115	7810		
$2 \cdot 10^{-2}$	174	34,8	122	3,12	91,7	1450	9,20	3,90
		161	71,4	2,50	75,5	2280		
10^{-2}	129	28,6	93,1	4,22	68,4	537	11,3	3,78
		120	58,2	3,33	55,1	914		
$8 \cdot 10^{-3}$	117	26,8	85,3	4,64	62,4	391	12,1	3,74
		109	54,2	3,64	49,9	684		
$5 \cdot 10^{-3}$	95,8	22,9	71,1	5,71	51,1	208	13,4	3,63
		89,7	46,3	4,43	40,6	373		
$2 \cdot 10^{-3}$	62,4	17,9	50,4	6,76	34,7	36,5	17,1	3,49
		59,3	35,6	5,96	26,2	101		
10^{-3}	47,2	14,4	38,2	9,38	26,2	15,4	20,7	3,38
		44,9	27,7	8,01	19,6	43,6		
$8 \cdot 10^{-4}$	43,2	13,3	35,0	10,4	24,0	11,7	21,5	3,35
		41,1	25,4	8,80	17,9	33,3		
$5 \cdot 10^{-4}$	35,8	11,1	29,0	12,9	19,8	6,56	23,1	3,29
		34,0	21,0	10,7	14,7	18,8		
$2 \cdot 10^{-4}$	24,8	7,67	20,1	19,4	13,7	2,13	26,5	3,16
		23,6	14,6	15,7	10,1	6,23		
10^{-4}	18,8	5,81	15,2	26,3	10,4	0,913	29,3	3,07
		17,9	11,1	20,8	7,63	2,70		
$8 \cdot 10^{-5}$	17,2	5,32	13,9	29,0	9,50	0,681	30,6	3,04
		16,4	10,1	22,8	6,97	2,04		
$5 \cdot 10^{-5}$	14,3	4,40	11,5	35,5	7,87	0,376	32,3	2,98
		13,6	8,38	27,6	5,77	1,16		
$2 \cdot 10^{-5}$	9,88	3,05	7,99	53,3	5,45	0,125	36,1	2,87
		9,40	5,81	40,0	3,98	0,386		
10^{-5}	7,49	2,31	6,06	71,5	4,13	0,0545	39,0	2,78
		7,12	4,40	52,9	3,01	0,168		
$8 \cdot 10^{-6}$	6,85	2,12	5,54	79,3	3,78	0,0417	40,4	2,75
		6,51	4,02	57,9	2,74	0,128		
$5 \cdot 10^{-6}$	5,67	1,75	4,59	96,7	3,12	0,0237	41,8	2,69
		5,40	3,34	70,3	2,27	0,0731		
$2 \cdot 10^{-6}$	3,93	1,22	3,18	140	2,17	0,00791	45,6	2,59
		3,74	2,31	102	1,57	0,0243		
10^{-6}	2,98	0,921	2,41	185	1,64	0,00344	48,4	2,52
		2,83	1,75	134	1,19	0,0106		

Здесь $\nu_0 = \nu/k^2 = \rho c^2 h^3/D$, $\varkappa_0^4 = \varkappa^4/k^2 = \rho_0 c^2 h^3/D$, ρ_0 — плотность материала пластины, c — скорость звука в жидкости,

$$A_1 = 8\sqrt{2}\cos^2\frac{\pi}{5}\left(5\sin\frac{\pi}{5}\right)^{-1}, \qquad A_2 = \left(\sin\frac{\pi}{10}\right)^{-1},$$

$$A_3 = \frac{5}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{10}, \qquad \gamma = (2\nu_0)^{-1/5}\varkappa_0 k^{1/10} e^{-\pi i/20}.$$

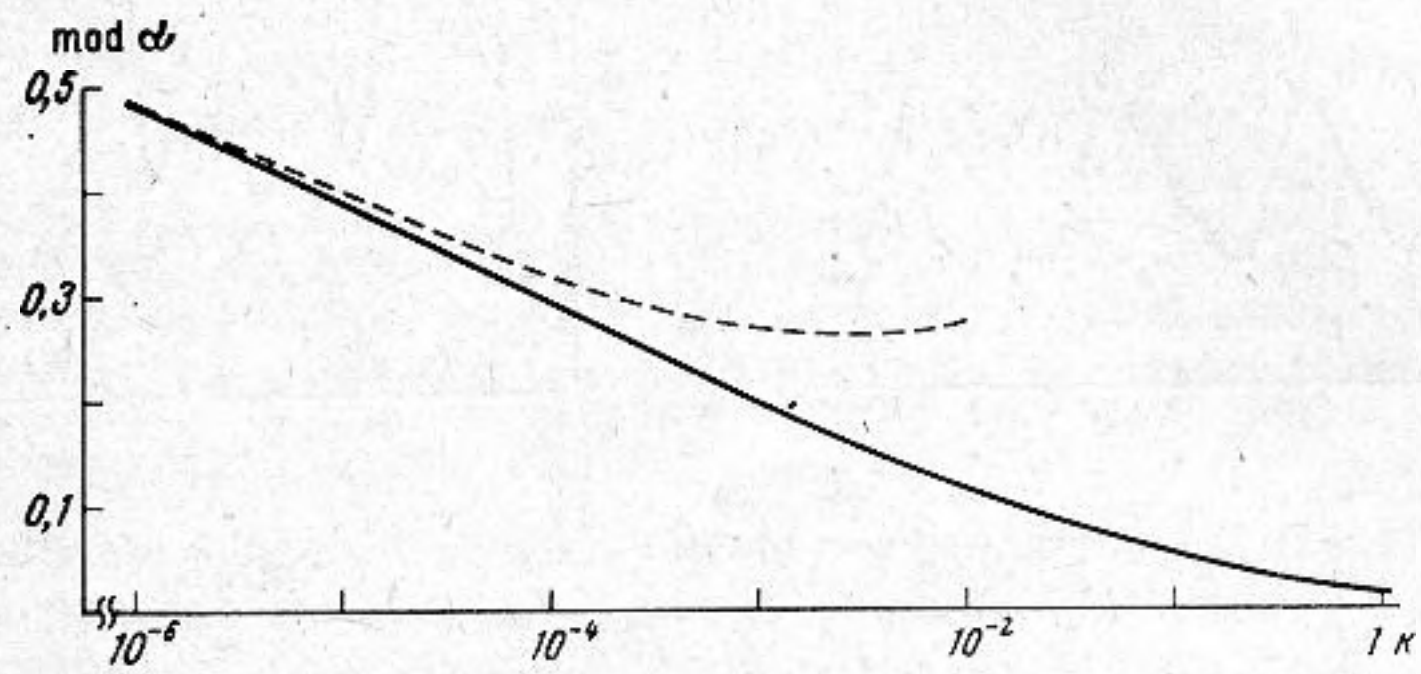
Формулы (12) — (14) получены на основании тейлоровских разложений λ_s по степеням $k^{2/5}$ [1]. Ограничиваясь старшим членом в формуле (12) при $k = 10^{-3}$, будем иметь ошибку порядка 1%. Расчеты, проводимые по формулам (11) и (13), при $k = 10^{-4}$ дают различие ~2%. Результаты расчетов α по формуле (14), изображены на фиг. 3 и 4 штриховыми ли-

ниями. Так, при $k=10^{-4}$ отличие асимптотического значения α (14) от точного (10) составляет менее 7%.

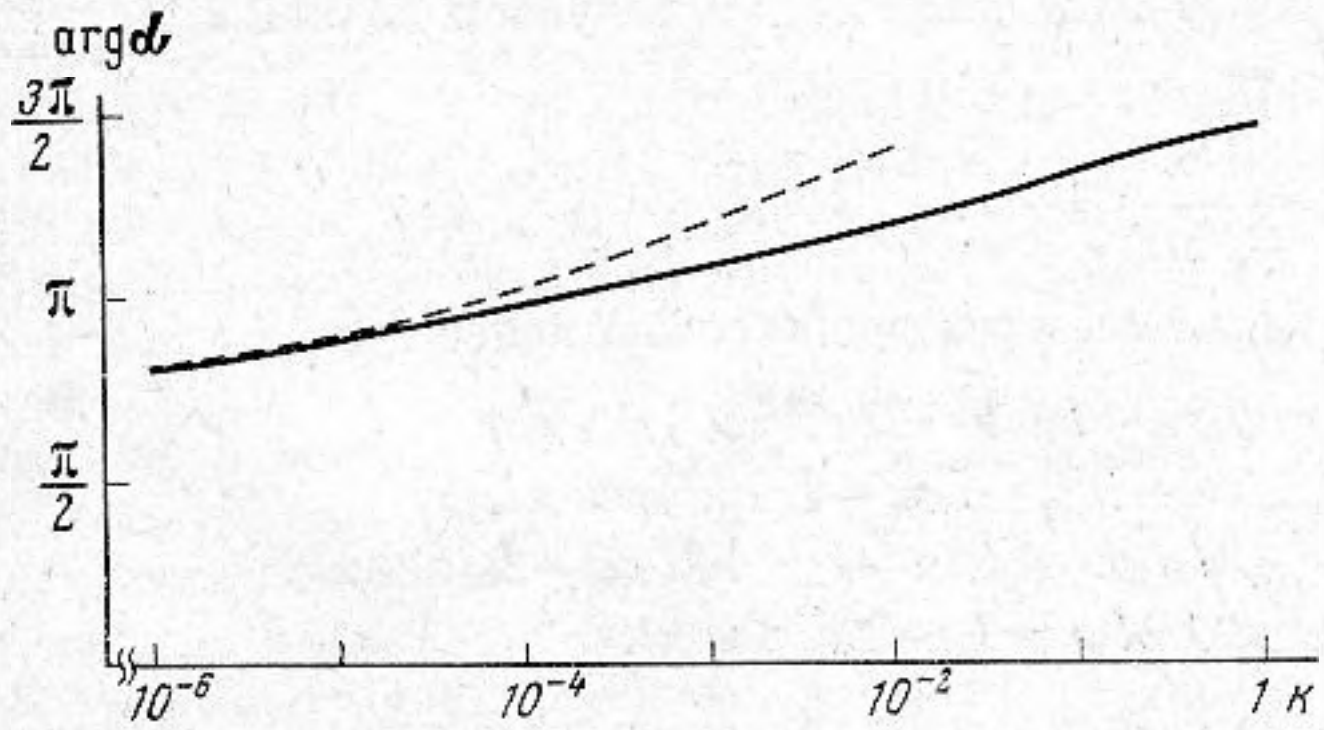
Сходным образом можно рассмотреть колебания полубесконечной пластины, которая выступает над поверхностью жидкости на некоторую заданную величину. Будем считать, что поле возбуждается гармонической силой линейной плотности F, приложенной к верхнему краю пластины. Источник поля характеризуется условиями

$$\zeta''(-l)=0, \quad \zeta'''(-l)=Fh^2/D. \tag{15}$$

Здесь l — безразмерная длина свободного участка пластины. Первое из этих равенств означает отсутствие сосредоточенного момента, приложен-



Фиг. 3



Фиг. 4

ного к верхнему концу пластины. Поле в жидкости по-прежнему описывается формулами (7) и (8). Для смещений свободной части пластины мы получаем выражение

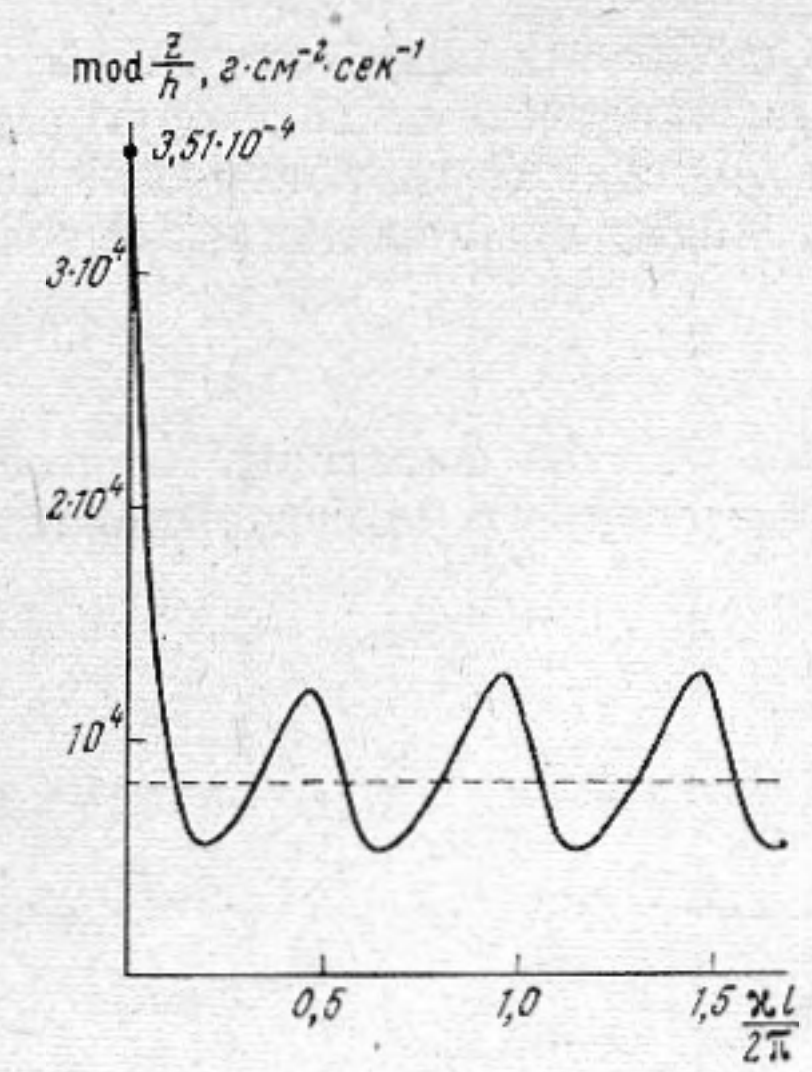
$$\zeta(y)=A\operatorname{ch}\varkappa y+B\cos\varkappa y+C\operatorname{sh}\varkappa y+E\sin\varkappa y \quad (-l\leqslant y\leqslant 0).$$

Константы A, B, C, E, a, b определяются из условий (6) и (15). В частности, для входного импеданца системы Z мы имеем следующее точное выражение:

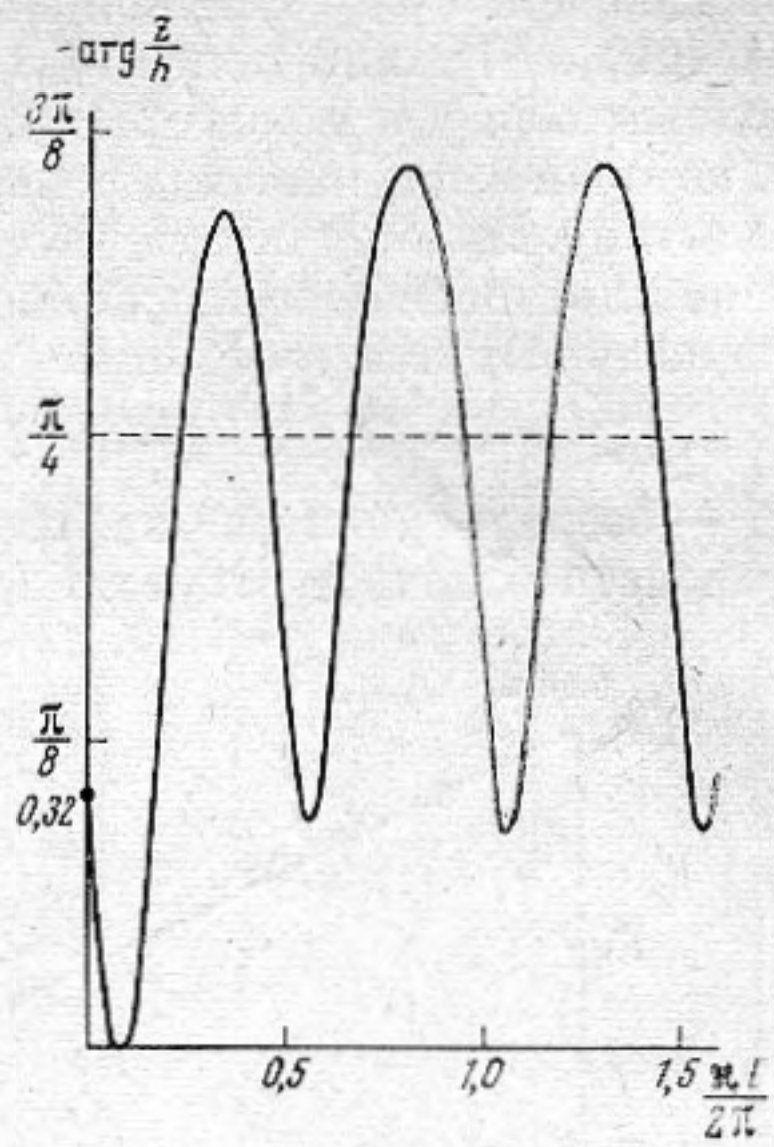
$$Z=\frac{F}{-i\omega\zeta(-l)h}=\frac{iD\varkappa^3}{\omega h^3}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \tag{16}$$

где

$$\Delta_1=\frac{I_2\varkappa^4-I_6}{\operatorname{ch}\varkappa l}-2I_4\varkappa^2\operatorname{th}\varkappa l\sin\varkappa l+\varkappa(I_2I_6-I_4^2+\varkappa^2)\operatorname{th}\varkappa l\cos\varkappa l-$$
$$-\varkappa(I_2I_6-I_4^2-\varkappa^2)\sin\varkappa l-(I_2\varkappa^4+I_6)\cos\varkappa l,$$
$$\Delta_2=2\varkappa(I_2I_6-I_4^2)\operatorname{th}\varkappa l\sin\varkappa l+(I_2\varkappa^4+2I_4\varkappa^2+I_6)\times$$
$$\times\operatorname{th}\varkappa l\cos\varkappa l-(I_2\varkappa^4-2I_4\varkappa^2+I_6)\sin\varkappa l-2\varkappa^3\cos\varkappa l.$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Результаты вычисления Z по формуле (16) для системы сталь — вода при $k=10^{-4}$ приведены на фиг. 5 и 6. Штриховые линии соответствуют значению входного импеданца Z_0 для полубесконечной пластины при отсутствии жидкости

$$Z_0 = \frac{D\varkappa^3}{2\omega h^3}(1-i).$$

Для $\varkappa l > 2\pi$ мы имеем с погрешностью менее 1%

$$\Delta_1 = (I_4^2\varkappa - I_2 I_6\varkappa - 2I_4\varkappa^2 + \varkappa^3)\sin\varkappa l + \\ + (I_2 I_6\varkappa - I_4^2\varkappa - I_2\varkappa^4 - I_6 + \varkappa^3)\cos\varkappa l,$$

$$\Delta_2 = (2I_2 I_6\varkappa - 2I_4^2\varkappa - I_2\varkappa^4 + 2I_4\varkappa^2 - I_6)\sin\varkappa l + \\ + (I_2\varkappa^4 + 2I_4\varkappa^2 + I_6 - 2\varkappa^3)\cos\varkappa l.$$

Таким образом, если отвлечься от случая малых l, импеданц системы зависит периодически от длины выступающей над поверхностью жидкости части пластины, причем период равен половине длины изгибной волны в пластине. Чем больше коэффициент отражения α, тем сильнее различаются максимальные и минимальные значения модуля и аргумента Z.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. П. Коузов.* Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине. ПММ, 1963, *27*, 6, 1037—1043.
2. *Б. П. Белинский, Д. П. Коузов, В. Д. Чельцова.* О дифракции акустических волн на пластинах, сочлененных под прямым углом. ПММ, 1973, *37*, 2, 291—299.
3. *Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов.* О волнах, распространяющихся вдоль кромок пластины. Акуст. ж., 1972, *18*, 4, 549—555.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова
Физический факультет
Научно-исследовательский физический институт

Поступила
11 марта 1974 г.