АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 2

УДК 534.833.524.2

ВИБРОИЗОЛЯЦИЯ УПРУГОГО РЕБРА ПО ОТНОШЕНИЮ К ИЗГИБНЫМ И ПРОДОЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЯМ

В. Ю. Кирпичников, М. Н. Кузьмичев

Исследовано влияние волновых явлений в ребре, а также преобразования типов волн на изоляцию ребром жесткости изгибных и продольных колебаний, распространяющихся по тонкому стержню. По результатам численного эксперимента сделан вывод о невысокой точности приближенных решений для коэффициентов отражения изгибных и продольных волн. Оценена энергия «наведенных» колебаний стержня.

При изучении распространения колебаний по инженерным конструкциям часто требуется определить виброизоляцию, создаваемую упругими подкрепляющими элементами типа ребер жесткости. Так, в работах [1—4] исследовалась виброизоляция одиночного ребра жесткости, а в работе [5] — виброизоляция периодической системы ребер. В этих работах вклад в виброизоляцию ребер их изгибных и продольных колебаний, а также преобразования типов волн в несущем стержне не анализировался. Ниже рассматривается влияние упомянутых факторов на величину модулей коэффициентов отражения изгибных и продольных волн от одиночного подкрепляющего элемента.

Пусть на тонком стержне прямоугольного сечения толщиной h_1 нормально к его нейтральной оси установлено ребро жесткости толщиной h_4 и высотой H из того же материала, что и стержень. Модуль упругости и плотность материала обозначим соответственно через E и ρ. Совместим координатную ось x с нейтральной осью стержня, а ось y направим вдоль ребра.

Пусть из полубесконечного элемента 1 на ребро в направлении положительных значений координаты x падает плоская изгибная волна единичной амплитуды $\exp(ik_1x-i\omega t)$, где k_1 — волновое число изгибных колебаний стержня, ω — круговая частота, t — время. В стержне возникают отраженные и прошедшие продольная и изгибные (бегущая и неоднородная) волны, а в ребре — прошедшие и отраженные от свободного конца продольная и изгибные (бегущая и неоднородная) волны.

Коэффициенты отражения от ребра жесткости и прохождения за ребро изгибной (продольной) волны с учетом возникновения всех указанных типов волн могут быть найдены методом внутренних импеданцев.

Суть метода заключается в следующем. Любая стержневая конструкция мысленно расчленяется на отдельные однородные участки (E=const, ρ=const, I=const, где I — момент инерции поперечного сечения) так, чтобы в пределах этих участков не наблюдалось никаких внешних возмущений. Чтобы сохранить характер колебательных процессов в выделенном участке конструкции, его концы нагружаются импеданцами a_{ij}, выражающими кинематическую связь рассматриваемой и отсеченной частей, а также внешними возмущениями (поперечной P и продольной Q силами и из-

гибающим моментом M), выражающими влияние усилий, приложенных к элементам отсеченной части или действующих по концам выделенного участка. При учете совместных изгибных и продольных колебаний эти требования позволяют сформулировать в общем случае по три граничных условия для каждого конца $x=x_n$ выделенного участка стержневой конструкции

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} a_{11}(x_n) & a_{12}(x_n) & a_{13}(x_n) \\ -a_{12}(x_n) & a_{22}(x_n) & a_{23}(x_n) \\ -a_{13}(x_n) & a_{23}(x_n) & a_{33}(x_n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v(x_n) \\ v'(x_n) \\ u(x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} EIv'''(x_n) \\ EIv''(x_n) \\ EFu'(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_n) \\ M(x_n) \\ Q(x_n) \end{bmatrix}$$

В системе (1) через $v(x_n)$, $u(x_n)$ и $v'(x_n)$ обозначены поперечное и продольное смещения нейтральной оси, а также угол поворота конца рассматриваемого участка конструкции; $EIv'''(x_n)$, $EFu'(x_n)$ и EIv'' (x_n) — перерезывающая и продольная силы и изгибающий момент, действующие в рассматриваемом поперечном сечении площадью F. Попарное равенство импеданцев со смешанными индексами объясняется теоремой взаимности и принятым правилом знаков для усилий и деформаций.

При определении коэффициентов отражения и прохождения изгибных и продольных волн в задачах о виброизоляции упругих препятствий с любой конфигурацией поперечного сечения, установленных на бесконечном стержне достаточно рассмотреть колебания полубесконечного участка стержня. Импеданцы и внешние усилия этого участка будут определяться импеданцами и внешними усилиями препятствия и отсеченной части стержня. Соответственные формулы могут быть получены, если подставить граничные условия (1) для отсеченных участков конструкции в динамические условия равновесия узла соединения. Перемещения и углы поворота отсеченных участков конструкции предварительно выражаются через перемещения и углы поворота смежного сечения рассматриваемого полубесконечного участка. В результате получаются три уравнения, являющиеся по существу тремя граничными условиями для этого участка. После приравнивания соответствующих свободных членов и коэффициентов при перемещениях и угле поворота в уравнениях полученной таким образом системы и системы (1), написанной для рассматриваемого полубесконечного участка, могут быть найдены формулы, выражающие взаимосвязь импеданцев и внешних усилий в узле соединения элементов стержневой конструкции.

В рассматриваемой задаче эти формулы имеют вид

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} &a_{11}^{(3)}(0)=a_{11}^{(1)}(0)+a_{33}^{(4)}(0), \quad a_{22}^{(3)}(0)=a_{22}^{(1)}(0)-a_{22}^{(4)}(0), \\ &a_{12}^{(3)}(0)=a_{12}^{(1)}(0)+a_{23}^{(4)}(0), \quad a_{23}^{(3)}(0)=a_{23}^{(1)}(0)+a_{12}^{(4)}(0), \\ &a_{13}^{(3)}(0)=a_{13}^{(1)}(0)-a_{13}^{(4)}(0), \quad a_{33}^{(3)}(0)=a_{33}^{(1)}(0)+a_{11}^{(4)}(0), \\ &P^{(3)}=P^{(1)}, \quad M^{(3)}=M^{(1)}, \quad Q^{(3)}=Q^{(1)}. \end{aligned}\right\}$$

Для определения коэффициентов отражения и прохождения необходимо конкретизировать импеданцы и внешние усилия для полубесконечных участков стержня 1 и 3 и ребра 4. Эти величины можно получить из общих формул, связывающих импеданцы и усилия, загружающие концы выделенного участка стержня. Для чисто изгибных колебаний конструкции выражения, связывающие импеданцы, представлены в работе [6].

Не выписывая здесь упомянутые общие формулы ввиду их громозд-

кости, представим необходимые нам импеданцы и внешние усилия полубесконечных участков стержня 1 и 3 и ребра 4

$$
(3)\quad \begin{cases}
a_{11}^{(1),(3)} = \mp(1+i)EI_1k_1^3, \\
a_{12}^{(1),(3)} = iEI_1k_1^3, \\
a_{22}^{(1),(3)} = \mp(1-i)EI_1k_1, \\
a_{33}^{(1),(3)} = \pm iEh_1\varkappa, \\
a_{13}^{(1),(3)} = a_{23}^{(1),(3)} = 0, \\
a_{11}^{(4)} = EI_4k_4^3\dfrac{A(k_4H)}{E(k_4H)}, \\
a_{12}^{(4)} = EI_4k_4^2\dfrac{F(k_4H)}{2E(k_4H)}, \\
a_{22}^{(4)} = -EI_4k_4\dfrac{B(k_4H)}{E(k_4H)}, \\
a_{33}^{(4)} = -Eh_4\varkappa\,\mathrm{tg}\,(\varkappa H), \\
a_{13}^{(4)} = a_{23}^{(4)} = 0, \\
P^{(1)} = -2(1+i)EI_1k_1^3, \\
M^{(1)} = -2(1+i)EI_1k_1^2, \\
P^{(3)} = P^{(4)} = M^{(3)} = M^{(4)} = Q^{(1)} = Q^{(3)} = Q^{(4)} = 0.
\end{cases}
$$

Здесь верхний и нижний знаки соответствуют значениям $x=-0$ и $x=+0$; k и $\varkappa$ имеют смысл волновых чисел изгибных и продольных колебаний ребра и стержня, а $A(k_4H)$; $B(k_4H)$, $E(k_4H)$ и $F(k_4H)$ — известные линейные комбинации функций Крылова [3]. Укажем, что при распространении по стержню продольной волны следует принять $P^{(1)}=M^{(1)}=0$ и $Q^{(1)}=2iEh_4\varkappa$.

Рассмотрим колебания полубесконечных участков стержня, нагруженных известными импеданцами и усилиями. Упругую линию стержня зададим в виде:

$$
(4)\quad \begin{aligned}
v_1(x) &= e^{ik_1x} + \mathrm{R}e^{-ik_1x} + R''e^{k_1x}, \\
u_1(x) &= re^{-i\varkappa x}, \\
v_3(x) &= Te^{ik_1x} + T''e^{-k_1x}, \\
u_3(x) &= te^{i\varkappa x}.
\end{aligned}
$$

Здесь R'' и T'' — амплитуды изгибных неоднородных волн (отраженной и прошедшей), а r и t — амплитуды «наведенных» продольных волн (отраженной и прошедшей).

Используя формулы (2)—(4) и граничные условия (1), напишем коэффициент отражения R изгибной волны от ребра жесткости

$$
(5)\quad R = \frac{\left(Z_{xy}Z_x - \dfrac{\varkappa}{k_1}Z^2\right)(2+iZ_y) - 2Z_yZ_x}{Z_y\left(Z_{xy}Z_x + \dfrac{\varkappa}{k_1}Z^2\right)}
$$

Здесь

$$Z_x = -2i - \frac{h_4^3 k_4^3}{12 h_1 \varkappa} \frac{A(k_4 H)}{E(k_4 H)},$$

$$Z_y = 2(1+i) + \frac{12 h_4 \varkappa}{h_1^3 k_1^3} \operatorname{tg}(\varkappa H),$$

$$Z_{xy} = 2(1-i) - \frac{h_4^3 k_4}{h_1^3 k_1} \frac{B(k_4 H)}{E(k_4 H)}$$

$$Z = -\frac{h_4^3 k_4^2}{h_1^3 k_1^2} \frac{F(k_4 H)}{2E(k_4 H)}.$$

Величины Z_x, Z_y и Z_{xy} определяют нормированные реакции ребра и полубесконечных элементов стержня соответственно на перемещения в направлении координатных осей x и y, а также на угол поворота в плоскости xoy. Величина Z характеризует нормированную реакцию ребра на преобразование падающей изгибной волны в продольные колебания стержня.

Введем обозначения: $n_1 = \frac{h_4}{h_1}$, $n_2 = \frac{H}{h_4}$, $n_3 = \varkappa H$; тогда аргумент функций Крылова и реакций Z_x, Z_y, Z_{xy} и Z примут вид

$$k_4 H = \sqrt[4]{12}\,(n_2 n_3)^{0,5};$$

$$Z_x = -2i - \frac{1}{\sqrt[4]{12}} n_1 n_2^{-0,5} n_3^{0,5} \frac{A(n_2, n_3)}{E(n_2, n_3)};$$

$$Z_y = 2(1+i) + \sqrt[4]{12}\, n_1^{1,5} n_2^{0,5} n_3^{-0,5} \operatorname{tg}(n_3);$$

$$Z_{xy} = 2(1-i) - n_1^{2,5} \frac{B(n_2, n_3)}{E(n_2, n_3)};$$

$$Z = -n_1^2 \frac{F(n_2, n_3)}{2E(n_2, n_3)}.$$

Рассмотрим некоторые приближенные выражения для коэффициента отражения R. Примем равными бесконечности и нулю жесткости соответственно несущего стержня и ребра по отношению к продольным волнам и учтем лишь изгибные колебания элементов рассматриваемой конструкции и перемещения ребра как массы. Для этого следует положить $Z_x = \infty$, $Z_y = 2(1+i)$, $Z = 0$. Выражение коэффициента отражения изгибной волны от ребра будет

$$R_и = \frac{i s_3}{s_3(1+i) - 4} \tag{6}$$

где

$$s_3 = n_1^{2,5} \frac{B(n_2, n_3)}{E(n_2, n_3)}.$$

Пусть жесткость ребра бесконечна по отношению к изгибным колебаниям, а жесткость несущего стержня бесконечна по отношению к продольным колебаниям. В этом случае в ребре возможны только продольные колебания, а в стержне — только изгибные. Поскольку здесь мы должны положить $Z_x = \infty$, $Z_{xy} = 2(1-i)$ и $Z = 0$, то коэффициент отражения изгибной волны от ребра жесткости принимает следующий вид:

$$R_п = \frac{s_1}{4 - (1+i) s_1}, \tag{7}$$

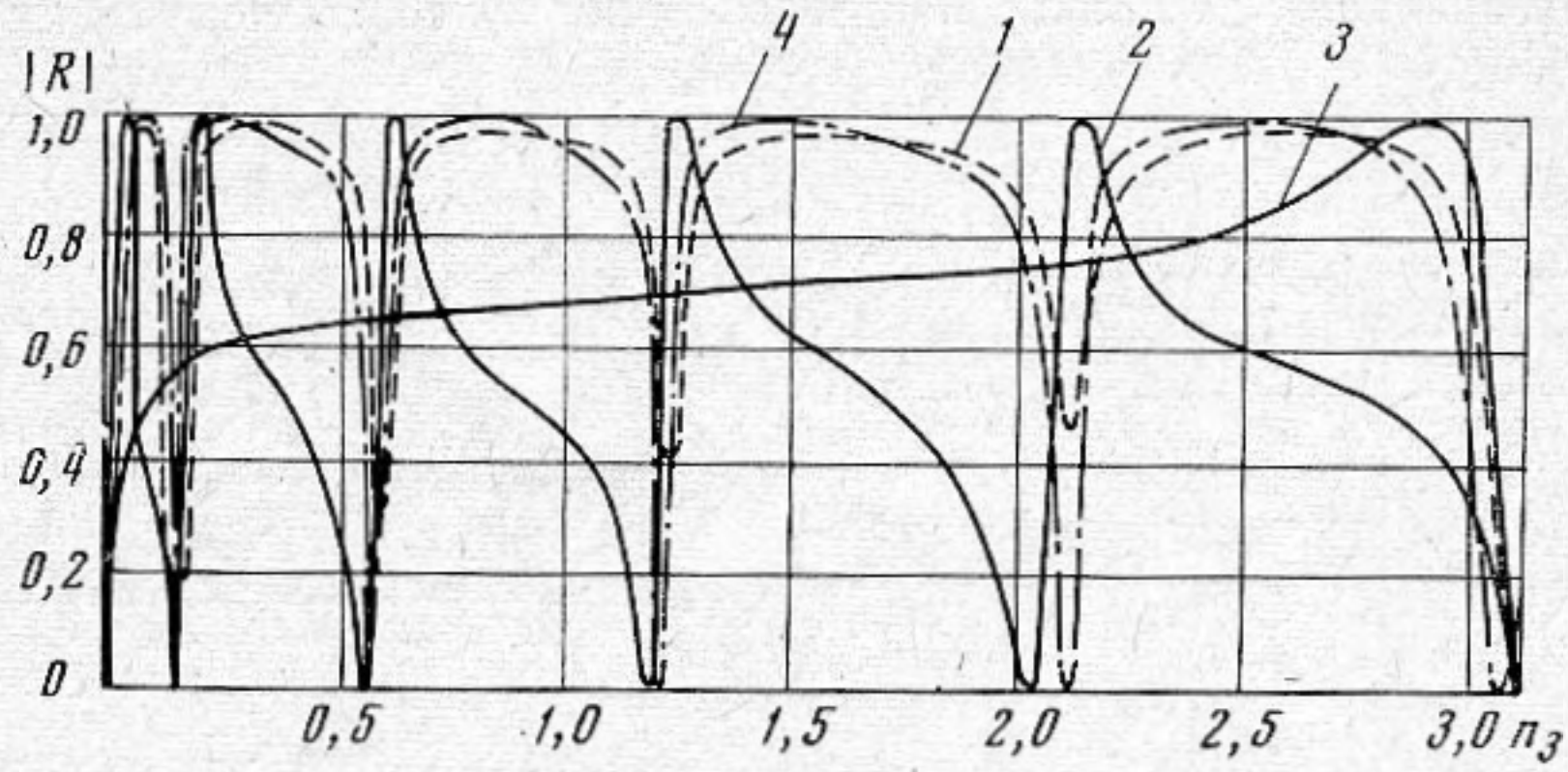
где

$$s_1 = \sqrt[4]{12}\, n_1^{1,5} n_2^{0,5} n_3^{-0,5} \operatorname{th}(in_3).$$

В более общем случае, когда в ребре появляются как изгибные, так и продольные волны, но в несущем стержне отсутствует преобразование изгибной волны в продольную ($Z_x=\infty$, $Z=0$), коэффициент отражения $R_{и+п}$ оказывается равным

$$R_{и+п}=R_и+R_п. \tag{8}$$

Если на ребро жесткости в направлении положительных значений координаты x падает плоская продольная волна единичной амплитуды



Фиг. 1

$\exp(i\varkappa x - i\omega t)$, то коэффициент отражения R' с учетом всех возникших в конструкции колебаний может быть написан в виде

$$R' = -\frac{Z_{xy}Z_x - \frac{\varkappa}{k_1}Z^2 + 2iZ_{xy}}{Z_{xy}Z_x - \frac{\varkappa}{k_1}Z^2}. \tag{9}$$

Положим равной бесконечности жесткость стержня по отношению к изгибным колебаниям, т. е. пренебрежем преобразованием продольной волны в изгибные колебания стержня. В этом случае $Z=0$ и коэффициент отражения $R_и'$ будет

$$R_и' = \frac{s_4}{2i - s_4}, \tag{10}$$

где

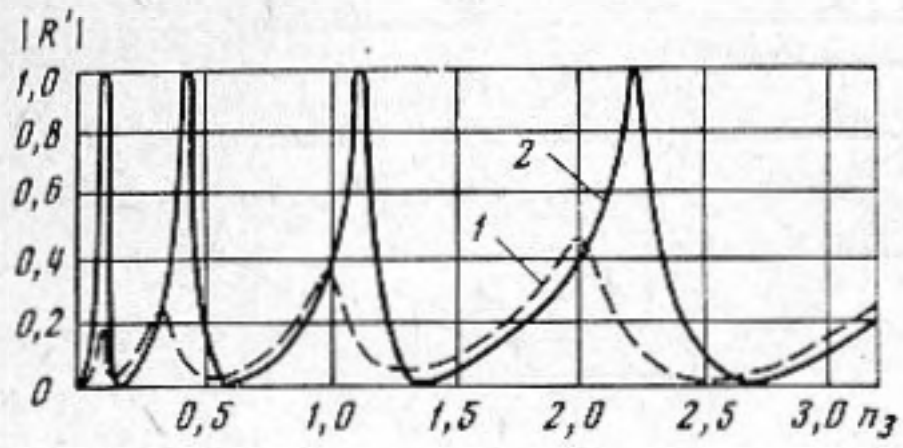
$$s_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{12}} n_1 n_2^{-0,5} n_3^{0,5} \frac{A(n_2, n_3)}{E(n_2, n_3)}.$$

Формулы (5)—(10) использовались для определения вклада в виброизоляцию изгибной и продольной волн колебаний ребра, а также преобразования волн в несущем стержне. Расчеты выполнялись для значений параметров n_1 и n_2, равных соответственно 1,0; 1,5; 2,0; 2,5, и 9; 16; 20; 25. Величина безразмерной высоты ребра жесткости n_3 изменялась с шагом 0,01 от 0,01 до π.

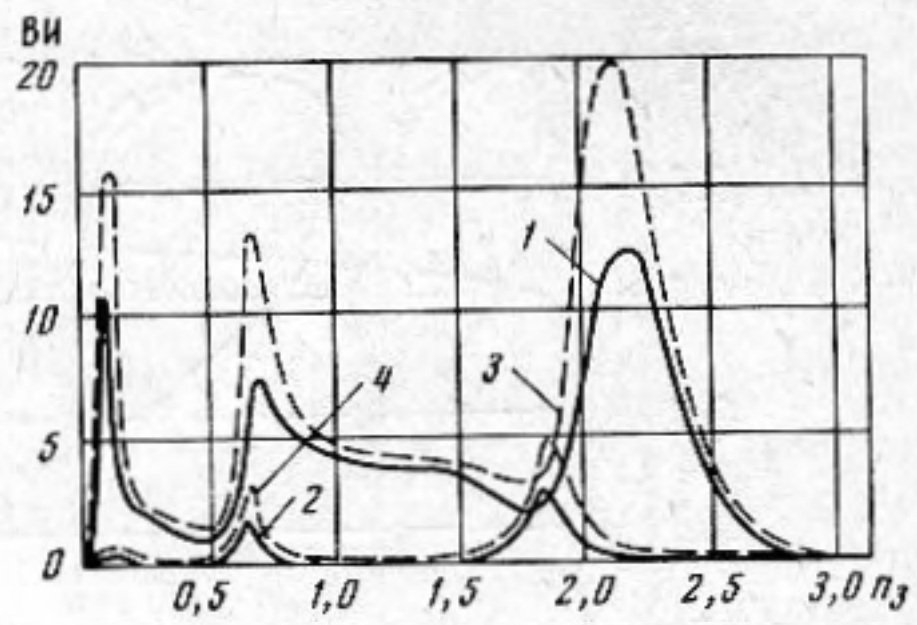
На фиг. 1 представлены типичные зависимости от n_3 модулей коэффициентов отражения изгибной волны, соответствующих точному $|R|$ и частным $|R_и|$, $|R_п|$, $|R_{и+п}|$ решениям. Результаты получены при отношении толщин ребра и стержня, равном 2, и высоте ребра, кратной двадцати пяти собственным толщинам ($n_2=25$).

Из рассмотрения фигуры видно, что с ростом n_3 модули коэффициентов отражения $|R|$ (кривая *1*), $|R_и|$ (кривая *2*) и $|R_{и+п}|$ (кривая *4*), рассчитанные соответственно по общей формуле (5) и частным формулам (6) и (8), осциллируют относительно некоторого среднего значения. Кривая (*3*) для модуля коэффициента отражения $R_п$ существенно отличается от кривых *1*, *2* и *4*. Из этого следует, что учет в ребре только продольных колебаний не может удовлетворительно описать точное решение рассматриваемой задачи.

Максимумы $|R_и|$ (кривая *2*) определяют случаи полной виброизоляции и наблюдаются при значениях параметра n_3, соответствующих антирезонансным частотам ребра, у которого один конец защемлен, а другой свободен. Эти значения несколько меньше величин n_3, соответствующих макси-



Фиг. 2



Фиг. 3

мумам $|R_{и+п}|$ и $|R|$. Минимумы $|R_и|$ равны нулю, что указывает на возможность беспрепятственного распространения по стержню изгибной волны в данном частном случае. Сопоставление показывает, что, несмотря на некоторое подобие кривой *2* и кривой *1*, соответствующей точному решению, различие между ними оказывается весьма значительным. В связи с этим учет только одних изгибных колебаний ребра является недостаточным для определения его виброизоляции по отношению к изгибной волне.

Дополнительный учет продольных колебаний в ребре (кривая *4*) уменьшает разницу между частными и точным решениями, что позволяет в приближенных инженерных оценках модуля R использовать для вычисления упрощенную формулу (8). В более точных расчетах $|R|$ следует использовать формулу (5), учитывающую дополнительно к предыдущему частному случаю преобразование изгибных волн в продольные колебания несущего стержня.

На фиг. 2 представлены результаты расчета коэффициентов отражения продольной волны от ребра $|R'|$ и $|R_и'|$, вычисленных при $n_1=1{,}5$ и $n_2=16$. Кривая (*1*) соответствует точному решению (9), а кривая (*2*) — приближенному решению (10). Видно, что обе кривые имеют резонансный характер, причем максимумы кривой (*2*) наблюдаются при значениях параметра n_3, соответствующих собственным частотам изгибных колебаний ребра жесткости. Различие кривых *1* и *2* указывает на невысокую точность приближенного решения и свидетельствует о необходимости использования точного решения (9). Сделанный вывод справедлив для всех значений параметров n_1 и n_2, принятых в расчете.

Поскольку в обоих проанализированных выше случаях вблизи значений n_3, соответствующих максимумам $|R|$ и $|R'|$, наблюдалось различие между приближенными и точными решениями, виброизоляция изгибных и продольных волн вычисляется с учетом как волновых явлений в ребре, так и преобразования волн в стержне. Расчеты изоляции ребром изгибных ВИ (продольных ВИ′) волн были выполнены с учетом энергии прошедших, как изгибных (продольных), так и «наведенных» продольных (из-

гибных) волн в стержне

$$\text{ВИ} = 10\lg\frac{1}{T^2+\frac{1}{2}\frac{k_1}{\varkappa}t^2} \tag{11}$$

$$\text{ВИ}' = 10\lg\frac{1}{T'^2+2\frac{\varkappa}{k_1}t^2}, \tag{12}$$

где $T(T')$ и $t(t')$ — амплитуды прошедших изгибных (продольных) и «наведенных» продольных (изгибных) волн.

Величины T, T', t и t' вычислялись с использованием следующих выражений:

$$T=\frac{2\left[Z_x(Z_y+Z_{xy})-\frac{\varkappa}{k_1}Z^2\right]}{Z_y\left(Z_{xy}Z_x-\frac{\varkappa}{k_1}Z^2\right)} \tag{13}$$

$$T'=\frac{2Z_{xy}}{\frac{\varkappa}{k_1}Z^2-Z_{xy}Z_x} \tag{14}$$

$$t=2(1+i)\frac{\varkappa}{k_1}\frac{Z}{\frac{\varkappa}{k_1}Z^2-Z_{xy}Z_x}=-r, \tag{15}$$

$$t'=(1+i)\frac{Z}{Z_{xy}Z_x-\frac{\varkappa}{k_1}Z^2}=r', \tag{16}$$

Расчеты виброизоляции производились для указанных выше диапазонов изменения параметров n_1, n_2 и n_3; множитель $k_1/\varkappa$ в формулах (11) и (12) записывался в виде $\sqrt[4]{12}\,(n_1n_2)^{0,5}\,n_3^{-0,5}$.

На фиг. 3 сплошными кривыми *1* и *2* представлены величины виброизоляции ВИ и ВИ′ в децибелах, рассчитанные при $n_1=1$, $n_2=9$. Штриховыми кривыми *3* и *4* изображены значения ВИ и ВИ′, вычисленные без учета энергии «наведенных» волн. Сопоставляя кривые *1* и *3*, а также *2* и *4*, видим, что в обоих случаях распространения волн по стержню учет энергетического вклада «наведенных» волн уменьшает величины ВИ и ВИ′, особенно в области безразмерных высот ребра, соответствующих максимальной виброизоляции. Таким образом, энергия «наведенных» волн вблизи частот максимальной виброизоляции может быть одного порядка с энергией волн той же природы, что и у падающей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. С. Никифоров.* О виброизоляции одиночного ребра жесткости. Акуст. ж., 1969, *15*, 4, 623—625.
2. *В. П. Маслов.* Косое падение изгибной волны на узкое препятствие. Акуст. ж., 1967, *13*, 3, 406—410.
3. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.
4. *М. Д. Генкин, В. П. Маслов.* Виброизоляция высокого ребра жесткости. Акустическая динамика машин и конструкций. М., «Наука», 1973.
5. *M. Heckl.* Wave propagation on beam-plate systems. J. Acoust. Soc. America, 1961, *33*, 5, 640—651.
6. *В. В. Тютекин, А. П. Шкварников.* Внутренние изгибные импеданцы и их применение для задач распространения изгибных волн по неоднородным стержням. Акуст. ж., 1968, *14*, 2, 275—281.

Поступила
10 июля 1973 г.