АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 2

УДК 534.25

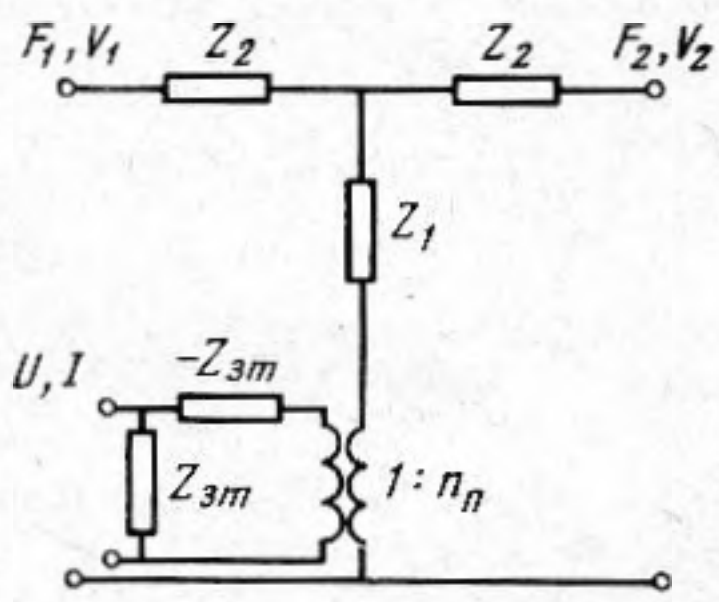
ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ НАГРУЖЕННОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Е. В. Кривин

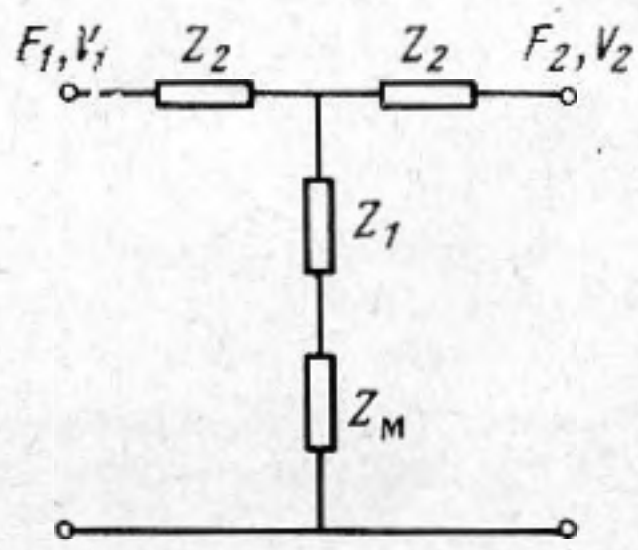
Рассмотрено нормальное падение звуковой волны на электрически нагруженный пьезоэлектрический слой. Показано, что коэффициент отражения определяется величиной электрической нагрузки пьезоэлемента. Приведены выражения для электрической нагрузки, обеспечивающей полное поглощение и отражение звуковой волны от пьезоэлектрического слоя.

Отражение плоской звуковой волны от электрически нагруженного слоя пьезоэлектрика имеет значительный практический интерес в связи с возникающей возможностью электрического управления условиями прохождения через этот слой звуковой волны.

Рассмотрим нормальное падение волны на пьезоэлектрический слой, нагруженный на акустические нагрузки в виде полупространств с нормированными волновыми сопротивлениями ρ_1 и ρ_2; в качестве нормирующей величины для механических сопротивлений возьмем волновое сопротивление пьезоэлемента $W_п$. Для нормирования электрических сопротивлений, используем модуль сопротивления заторможенного пьезоэлемента $R_п$ на нормирующей собственной частоте $f_п = C_п/2l_п$, где $C_п$ — скорость распространения звука в пьезоматериале, $l_п$ — толщина пьезоэлектрического слоя. Введение нормировок позволяет облегчить получение и интерпретацию результатов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Анализируя условия прохождения звука через пьезоэлектрический слой, воспользуемся представлением его в виде схемы замещения (фиг. 1), приведенной в работе [1]. Учитывая, что нормированная нагрузка на электрической стороне схемы замещения равна $Z_э$, представим ее в виде эквивалентного четырехполюсника (фиг. 2).

На фиг. 1, 2 использованы следующие обозначения: $Z_{эт}$ — нормированное сопротивление заторможенного пьезоэлемента; Z_1, Z_2 — нормированные

сопротивления механических двухполюсников, равные, без учета необратимых потерь в пьезоэлектрике, соответственно

$$-j\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\right)\Big/2\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\nu,\qquad j\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\nu,$$

где $\nu=f/f_{\text{п}}$, f — текущая частота, $Z_{\text{м}}$ — нормированное механическое сопротивление электрической части схемы, равное $jK_{\text{п}}^2/\pi\nu(j\nu Z_{\text{э}}+1)$, $K_{\text{п}}$ — коэффициент электромеханической связи.

Матрица передачи четырехполюсника $|\Pi|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

где

$$a=d=\frac{Z_1+Z_2+Z_{\text{м}}}{Z_1+Z_{\text{м}}},$$

$$b=Z_2+\frac{Z_2(Z_1+Z_2+Z_{\text{м}})}{Z_1+Z_{\text{м}}},$$

$$c=\frac{1}{Z_1+Z_{\text{м}}}.$$

Систему, состоящую из четырехполюсника с нагрузками ρ_1 и ρ_2, можно описать системой уравнений

$$(1)\qquad F_1=F_{1\,\text{пад}}+F_{1\,\text{отр}},\quad V_1=\frac{1}{\rho_1}(F_{1\,\text{пад}}-F_{1\,\text{отр}}),$$

$$F_2=F_{2\,\text{пр}},\quad V_2=\frac{1}{\rho_2}F_{2\,\text{пр}},\quad F_1=aF_2+bV_2,\quad V_1=cF_2+dV_2,$$

где $F_{\text{пад}}$, $F_{\text{отр}}$, $F_{\text{пр}}$ — комплексные амплитуды силы в падающей, отраженной и прошедшей волнах; индексы 1, 2 относятся соответственно к входной или выходной поверхности пьезослоя.

Отсюда можно определить коэффициент отражения V и прозрачности D

$$V=\frac{F_{1\,\text{отр}}}{F_{1\,\text{пад}}}=\frac{Z_{\text{вх}}-\rho_1}{Z_{\text{вх}}+\rho_1}=\frac{a\rho_2+b-c\rho_2\rho_1-d\rho_1}{a\rho_2+b+c\rho_2\rho_1+d\rho_1},$$

$$D=\frac{F_{2\,\text{пр}}}{F_{1\,\text{пад}}}=\frac{2}{a+\dfrac{b}{\rho_2}+c\rho_1+\dfrac{\rho_1}{\rho_2}d}.$$

Связь между коэффициентами отражения и прозрачности определяется выражением

$$V=\frac{D}{2}\left(a+\frac{b}{\rho_2}-c\rho_1-\frac{\rho_1}{\rho_2}d\right),$$

модуль коэффициента отражения $|V|$ будет

$$|V|=\sqrt{\frac{(R_{\text{вх}}-\rho_1)^2+X_{\text{вх}}^2}{(R_{\text{вх}}+\rho_1)^2+X_{\text{вх}}^2}},$$

где

$$R_{\text{вх}}=\frac{m\left(\rho_2 m-4R_{\text{м}}\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{2}\nu\right)+4\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{2}\nu(\rho_2+R_{\text{м}})\left(m+R_{\text{м}}\rho_2+\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{2}\nu\right)}{m^2+4\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{2}\nu(\rho_2+R_{\text{м}})^2}$$

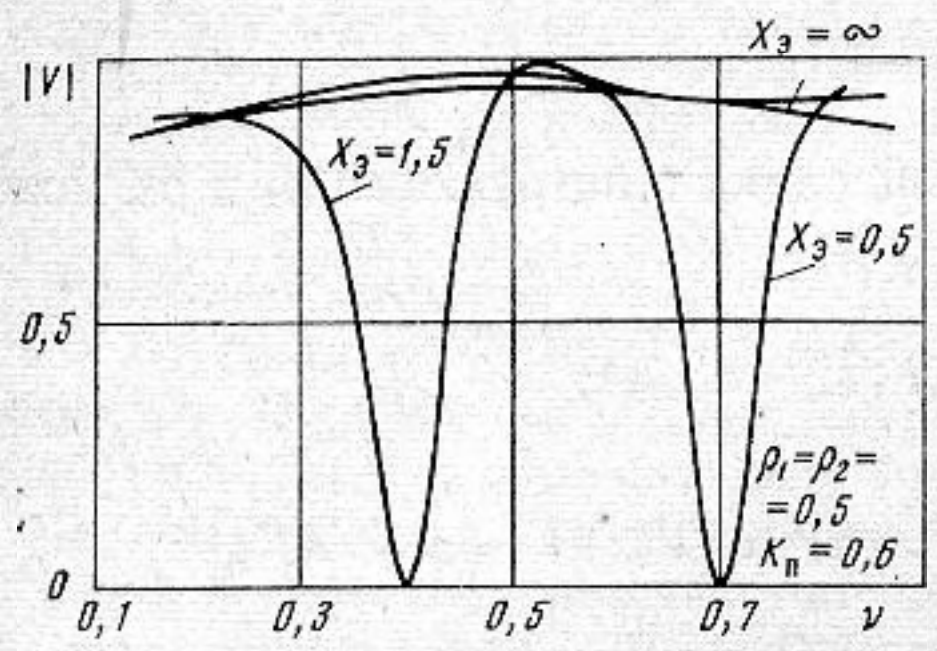
$$X_{вх}=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\nu\left[m\left(m+R_м\rho_2+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\right)-(\rho_2+R_м)\left(\rho_2 m-4R_м\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\right)\right]}{m^2+4\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu(\rho_2+R_м)^2},$$

$$m=1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu-2X_м\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\nu,$$

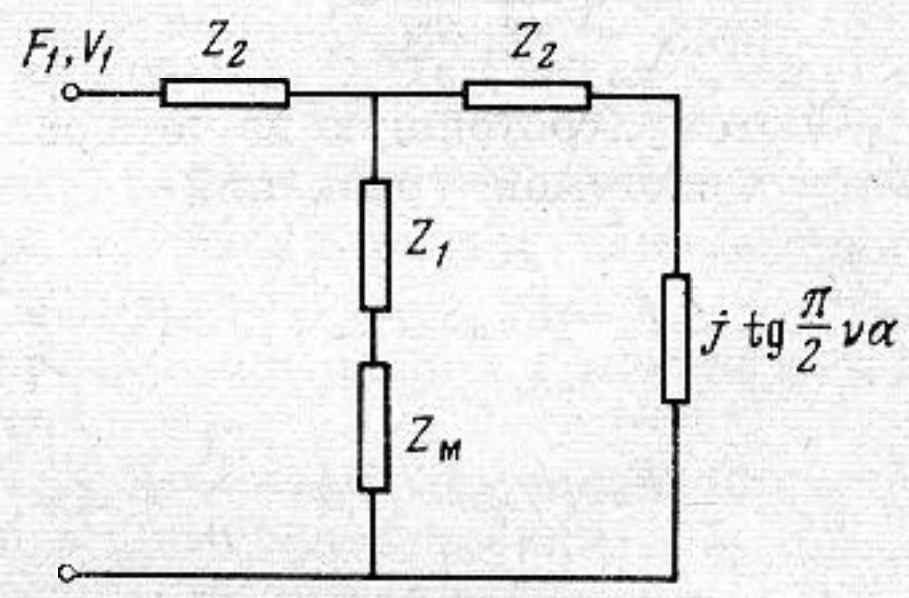
$$R_м=\frac{K_п^2R_э}{\pi[(1-\nu X_э)^2+\nu^2R_э]},$$

$$X_м=\frac{K_п^2(1-\nu X_э)}{\pi\nu[(1-\nu X_э)^2+\nu^2R_э^2]}.$$

На фиг. 3 приведен график зависимости модуля коэффициента отражения от ν при разных реактивных нагрузках на электрической стороне пьезоэлектрического слоя. Рассмотрим условия полного отражения и полной прозрачности слоя.



Фиг. 3



Фиг. 4

При разомкнутых контактах пьезоэлектрический слой, как и следовало ожидать, ведет себя как слой обычного вещества. Если $\rho_1=\rho_2$, то $|V|=0$ при толщине слоя, кратной целому числу полуволн. При толщине слоя, равном четверти длины волны, $|V|=0$ при условии, что волновое сопротивление материала пьезослоя равно среднему геометрическому от волновых сопротивлений нагрузок.

Полная прозрачность пьезоэлектрического слоя возможна лишь при условии, что электрическая нагрузка будет реактивной, в противном случае часть звуковой энергии, проходящей через слой, превращается в электрическую и рассеивается на активной электрической нагрузке. При $Z_э=jX_э$ четырехполюсник реактивен и выполнение условия $|V|=0$ ($|D|=1$) сводится к решению системы уравнений

$$(2)\qquad \begin{cases} a\rho_2-d\rho_1=0, \\ b-c\rho_1\rho_2=0. \end{cases}$$

Так как $a=d$, то верхнее равенство в системе уравнений (2) имеет смысл только при $\rho_1=\rho_2$. Тогда, подставляя в нижнее уравнение значения b и c, находим

$$(3)\qquad X_э=\frac{1}{\nu}\left[1-\frac{2K_п^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\nu}{\pi\nu(1-\rho_1^2)}\right].$$

Полученный результат позволяет сделать следующий вывод: при $\rho_1=\rho_2$ можно для пьезоэлектрического слоя заданной толщины, путем выбора соп-

ротивления электрической нагрузки согласно формуле (3) обеспечить полную прозрачность слоя на заданной частоте.

Если $\rho_1 \neq \rho_2$, то полное поглощение звуковой волны пьезоэлектрическим слоем можно обеспечить при комплексной электрической нагрузке. В этом случае, как отмечалось выше, $|D|<1$. Модуль коэффициента отражения $|V|=0$, если $Z_{вх}=\rho_1$. После простых преобразований получаем систему уравнений

$$(4)\qquad \begin{cases} 1-2X_м \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu+R_м(\rho_2-\rho_1)-\rho_1\rho_2=0, \\ (\rho_2-\rho_1)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu-2X_м \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\right)=4R_м \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu. \end{cases}$$

Решая систему уравнений (4), мы получим

$$R_м=\frac{(\rho_2-\rho_1)\left(\rho_1\rho_2-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\right)}{(\rho_2-\rho_1)^2+4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu},$$

$$X_м=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu}-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu(\rho_1+\rho_2)^2}{(\rho_2-\rho_1)^2+4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu}\right]$$

Величина электрической нагрузки определяется из выражений

$$(5)\qquad X_э=\frac{1}{\nu}\left[1-\frac{K_п^2X_м}{\pi\nu(R_м^2+X_м^2)}\right],$$

$$(6)\qquad R_э=\frac{K_п^2R_м}{\pi\nu(R_м^2+X_м^2)}.$$

Так как всегда $R_э \geqslant 0$, то $R_м \geqslant 0$. Это условие выполнимо, если при $\rho_1<\rho_2$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu \leqslant \sqrt{\rho_1\rho_2}$, а при $\rho_1>\rho_2$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu \geqslant \sqrt{\rho_1\rho_2}$. Таким образом, при $\rho_1 \neq \rho_2$ полное поглощение звуковой волны пьезоэлектрическим слоем, при соответствующем подборе электрической нагрузки, возможно только в интервалах частот, определяемых указанными выше неравенствами.

Представляет интерес случай, когда вся энергия звуковой волны, падающей на пьезоэлектрический слой, поглощается электрической нагрузкой. Очевидно (фиг. 2), это возможно при условии $\rho_2=0$ или $\rho_2=\infty$. В первом случае из уравнения (4) находим

$$R_м=\frac{\rho_1 \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu}{\rho_1^2+4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu},$$

$$X_м=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu}-\frac{\rho_1^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu}{\rho_1^2+4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu}\right)$$

во втором случае

$$R_м=\rho_1,$$

$$X_м=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu}.$$

Полное отражение от пьезоэлектрического слоя $|V|=1$ достигается при $R_{вх}=0$. Это условие выполняется при чисто реактивной электрической нагрузке. Величину ее мы находим из уравнения

$$m^2+4m\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu+4\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{2}\nu=0.$$

Решая его, находим

$$X_м=\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu},$$

или, для электрической нагрузки

$$X_э=\frac{1}{\nu}\left[1-\frac{2K_п^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu}{\pi\nu\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\right)}\right]. \tag{7}$$

Аналогичный результат можно получить другим путем. Известно, что разрыв продольного или замыкание поперечного звена лишает четырехполюсник способности передавать энергию. Поперечное звено замкнуто (см. фиг. 2), если $Z_1+Z_м=0$, отсюда сразу следует формула (7).

Рассмотренный случай открывает возможность обеспечения полного поглощения звуковой волны, падающей на пьезоэлектрический слой, путем соответственного выбора электрической нагрузки и при любых соотношениях между ρ_1 и ρ_2. Такая возможность достигается путем использования системы, состоящей из двух пьезоэлектрических слоев. Потребуем, чтобы второй слой обеспечивал полное отражение звуковой волны. Тогда его электрическая нагрузка будет

$$X_{э2}=\frac{1}{\nu}\left[\alpha-\frac{2K_п^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha}{\nu\pi\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\alpha\right)}\right],$$

где $\alpha=l_2/l_1$, l_1, l_2 — толщины соответственно первого и второго слоя. При такой нагрузке схема замещения системы пьезослоев имеет вид, показанный на фиг. 4.

Приравнивая входное сопротивление к ρ_1, находим

$$R_м=\frac{\rho_1\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha\right)^2}{4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu+4\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\alpha+\rho_1}$$

$$X_м = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha\right)^2\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha\right)}{4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu + 4\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu\alpha + \rho_1} -$$

$$- \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2}\nu + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\nu}$$

Величину электрической нагрузки находим из выражения (5), (6).

В заключение отметим, что путем переключения электрической нагрузки из положения, определяемого формулой (3), в положение, определяемое (7), при $\rho_1 = \rho_2$ пьезоэлектрический слой может выполнять функции управляемого затвора для звуковых волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Залесский.* Анализ и синтез пьезоэлектрических преобразователей. Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 1971.

Физико-механический институт
Академии наук УССР

Поступила
11 июня 1973 г.