АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 2

УДК 534.286:532.528

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА НА РЕЗОНАНСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПУЗЫРЬКОВ

Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин

Исследуется влияние твердой или свободной поверхности раздела на собственную частоту и коэффициент затухания пульсирующей и движущейся поступательно газовой полости в жидкости. Получены аналитические зависимости и численные результаты, определяющие значения собственной частоты и коэффициента затухания в зависимости от размера пузырька, вязкости жидкости, расстояния от поверхности раздела и ее типа.

Для оценки шумов акустической и гидродинамической кавитации, при расчетах затухания и скорости распространения звука в двухфазном пограничном слое, возникающем при движении тел в жидкости, необходимо знать точное соотношение между размерами газовых пузырьков, частотой линейного резонанса и коэффициентом затухания на собственной частоте.

Исследованию параметров движения пузырьков в безграничной жидкости посвящены работы [1—3]. В работах [4, 5] установлено, что пульсации пузырьков вблизи твердой стенки оказываются иными, чем в свободном пространстве. Экспериментально измеренное значение частоты собственных колебаний пузырьков, находящихся непосредственно на твердой поверхности [4], существенно меньше, чем значение частоты линейного резонанса в неограниченной среде [1, 2], и удовлетворительно согласуется с теоретической оценкой, учитывающей неподвижный зеркально-отображенный мнимый источник, заменяющий твердую поверхность [5].

Рассмотрим более общий, чем в работе [5], случай, когда газовая полость пульсирует и перемещается поступательно в результате взаимодействия со свободной или твердой поверхностью раздела в вязкой жидкости.

Уравнения, описывающие радиальное и поступательное движения пузырька в вязкой жидкости с точностью до членов порядка ε^2, имеют вид [6]:

$$R\ddot{R}(1\pm\varepsilon)+\left(\frac{3}{2}\pm 2\varepsilon^2\right)\dot{R}^2\mp\frac{1}{2}\varepsilon^2R\ddot{x}\mp 2\varepsilon^2\dot{R}\dot{x}-\frac{1}{4}\dot{x}^2+ \tag{1}$$

$$+\frac{P_0}{\rho}+\frac{2\sigma}{\rho R}-\left(\frac{P_0}{\rho}+\frac{2\sigma}{\rho R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}+4\frac{\mu\dot{R}}{\rho R}=0,$$

$$R\ddot{x}+3\dot{R}\dot{x}\mp 9\varepsilon^2\dot{R}^2\mp 3\varepsilon^2R\ddot{R}+0{,}3\dot{x}^2+9\frac{\mu}{\rho R}\dot{x}=0, \tag{2}$$

где R — радиус пузырька, x — расстояние от центра пузырька до поверхности раздела, ρ, P_0 — плотность и давление в жидкости, окружающей пузырек, σ — коэффициент поверхностного натяжения, μ — динамический коэффициент вязкости, $\varepsilon=\dfrac{R}{2x}$, γ — показатель политропы. Точками в выражениях (1), (2) обозначены производные по времени, верхние знаки в (1), (2) и далее перед членами с ε и ε^2 соответствуют движению пузырька вблизи твердой стенки, нижние — движению у свободной поверхности.

Предположим, что отклонение радиуса от равновесного значения R_0 и отклонение расстояния до поверхности раздела от его начального значения x_0 малы, т. е.

$$R=R_0+R',\ x=x_0+x',\quad \frac{R'}{R_0}\ll 1,\quad \frac{x'}{x_0}\ll 1. \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в формулы (1), (2) и сохраняя малые члены только порядка R' и x', получим уравнения для малых колебаний пузырька, находящегося вблизи поверхностей раздела:

$$R_0\ddot{R}(1\pm\varepsilon_0)\mp\frac{1}{2}\varepsilon_0^2R_0\ddot{x}+4\frac{\mu}{\rho R_0}\dot{R}+\left[\frac{3\gamma}{\rho R_0}\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)-\frac{2\sigma}{\rho R_0^2}\right]R=0, \tag{4}$$

$$R_0\ddot{x}\mp3\varepsilon_0^2R_0\ddot{R}+9\frac{\mu}{\rho R_0}\dot{x}=0, \tag{5}$$

где $\varepsilon_0=\dfrac{R_0}{2x_0}$. Переменные R и x, штрихи при которых далее опущены, характеризуют малые возмущения радиуса пузырька R_0 и расстояния его x_0 до границы раздела. Приведем уравнения (4), (5) к безразмерному виду:

$$\ddot{\eta}(1\pm\varepsilon_0)\mp\frac{1}{2}\varepsilon_0^2\ddot{\beta}+4M_1\dot{\eta}+3\gamma\left[1+E\left(1-\frac{1}{3\gamma}\right)\right]\eta=0, \tag{4'}$$

$$\ddot{\beta}\mp3\varepsilon_0^2\ddot{\eta}+9M_2\dot{\beta}=0, \tag{5'}$$

где

$$\eta=\frac{R}{R_0},\ \beta=\frac{x}{R_0},\ M_1=M_2=\frac{\mu}{R_0\sqrt{\rho P_0}}=M,$$

$$\tau=\frac{t}{R_0}\sqrt{\frac{P_0}{\rho}},\quad \frac{2\sigma}{R_0P_0}=E.$$

Уравнения (4′), (5′) представляют собой уравнения колебаний системы с двумя степенями свободы при наличии сил сопротивления. Предполагая в дальнейшем проанализировать самостоятельное влияние вязкостного сопротивления, введем в уравнениях радиального и поступательного движения (4′) и (5′) величины M_1 и M_2, равные M, как параметры, характеризующие раздельное влияние вязкости на обе степени свободы. Запишем далее уравнение для собственных частот системы:

$$a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0, \tag{6}$$

где $a=1\pm\varepsilon_0-1{,}5\varepsilon_0^4$, $b=4M_1+9M_2\pm9\varepsilon_0M_2$, $c=3\gamma+E(3\gamma-1)+36M_1M_2$, $d=9M_2[3\gamma+E(3\gamma-1)]$.

Корни уравнения (6) в общем виде найти невозможно, поэтому поступим следующим образом.

Пусть ξ есть действительный корень уравнения (6), который можно найти, применяя численные методы. Тогда выражения для собственной частоты f и коэффициента затухания δ радиальных колебаний газового пузырька с учетом ξ запишутся в виде

$$f=\frac{1}{2\pi R_0}\left(\frac{P_0}{\rho}\right)^{1/2}\left[\frac{c+\xi b+\xi^2a}{a}-\left(\frac{b+\xi a}{2a}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{7}$$

$$\delta=-\frac{1}{2R_0}\left(\frac{P_0}{\rho}\right)^{1/2}\left(\frac{b}{a}+\xi\right). \tag{8}$$

ε_0	M	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	$-\xi_1$	0,090	0,899	1,799	2,699	3,599	4,499	5,399	6,299	7,200	8,099
	$-\xi_2$	0,090	0,899	1,799	2,699	3,599	4,499	5,399	6,299	7,200	8,099
0,1	$-\xi_1$	0,090	0,900	1,800	2,700	3,600	4,500	5,400	6,301	7,201	8,101
	$-\xi_2$	0,090	0,900	1,800	2,700	3,600	4,500	5,400	6,301	7,201	8,102
0,2	$-\xi_1$	0,090	0,900	1,800	2,704	3,607	4,511	5,414	6,317	7,220	8,123
	$-\xi_2$	0,090	0,900	1,800	2,706	3,612	4,518	5,425	6,332	7,238	8,145
0,3	$-\xi_1$	0,090	0,901	1,810	2,722	3,636	4,551	5,465	6,400	7,293	8,207
	$-\xi_2$	0,090	0,901	1,813	2,737	3,672	4,615	5,561	6,507	7,455	8,402
0,4	$-\xi_1$	0,090	0,905	1,829	2,767	3,709	4,650	5,591	6,532	7,472	8,411
	$-\xi_2$	0,090	0,906	1,846	2,844	3,901	4,995	6,105	7,218	8,329	9,400
0,5	$-\xi_1$	0,090	0,912	1,871	2,857	3,851	4,844	5,835	6,846	7,812	8,800
	$-\xi_2$	0,090	0,915	1,935	3,218	4,817	6,504	8,162	9,780	11,37	12,900

Вычисленные значения ξ приведены в таблице.

Величины ξ_1 и ξ_2 характеризуют пульсации пузырька у твердой и свободной поверхностей соответственно. Вычисления выполнены при $P_0=10^6$ *дин/см*^{2}, $\sigma=75$ *дин/см*, $\rho=1$ *г/см*^{3} и различных значениях безразмерных параметров ε_0 и M. Если учесть вязкость только в радиальном движении ($M_2=0$), то выражения (7) и (8) записываются в явном виде как

$$(7')\qquad f_1=\frac{1}{2\pi R_0}\left\{\frac{P_0[3\gamma+E(3\gamma-1)]}{\rho(1\pm\varepsilon_0-1{,}5\varepsilon_0^4)}-4\frac{\mu^2}{R_0^2\rho^2(1\pm\varepsilon_0-1{,}5\varepsilon_0^4)^2}\right\}^{1/2},$$

$$(8')\qquad \delta_1=-\frac{2\mu}{\rho R_0^2(1\pm\varepsilon_0-1{,}5\varepsilon_0^4)}.$$

При $\varepsilon_0\to 0$, т. е. при удалении пузырька от поверхности раздела, выражения (7′), (8′) тождественно переходят в формулы для частоты и коэффициента затухания в безграничной жидкости — f_∞ и δ_∞ [3]:

$$(7'')\qquad f_\infty=\frac{1}{2\pi R_0}\left\{\frac{P_0\left[3\gamma+\frac{2\sigma}{P_0R_0}(3\gamma-1)\right]}{\rho}-4\frac{\mu^2}{R_0^2\rho^2}\right\}^{1/2},$$

$$(8'')\qquad \delta_\infty=-\frac{2\mu}{\rho R_0^2}.$$

Если учесть вязкость только в уравнении поступательного движения ($M_1=0$) и пренебречь ε_0^4 по сравнению с ε_0, то получим следующие выражения:

$$(9)\qquad \xi=-9M_2,$$

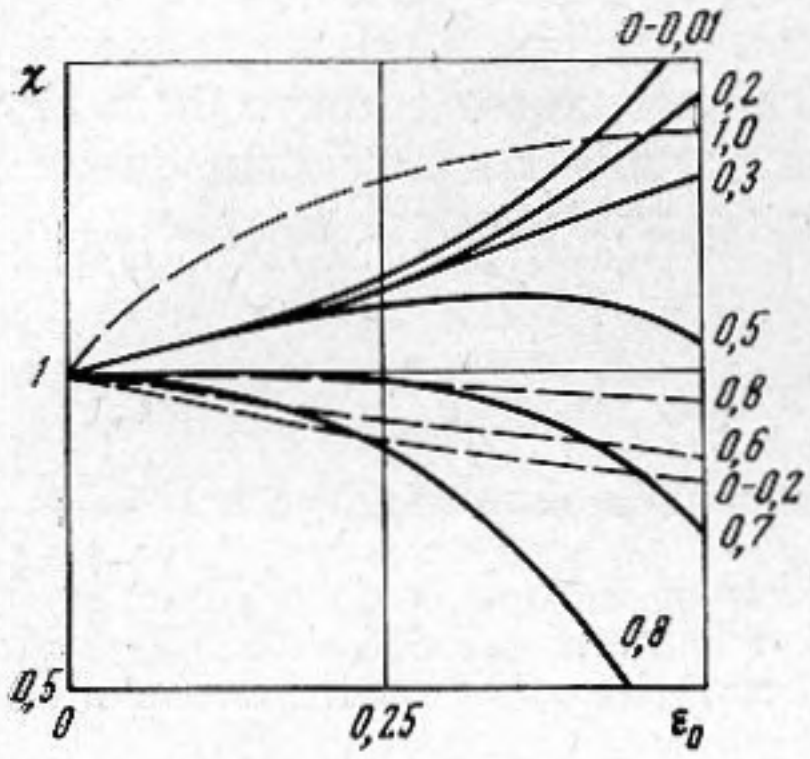
$$(7''')\qquad f_2=\frac{1}{2\pi R_0}\left\{\frac{P_0[3\gamma+E(3\gamma-1)]}{\rho(1\pm\varepsilon_0)}\right\}^{1/2},$$

$$(8''')\qquad \delta_2=0.$$

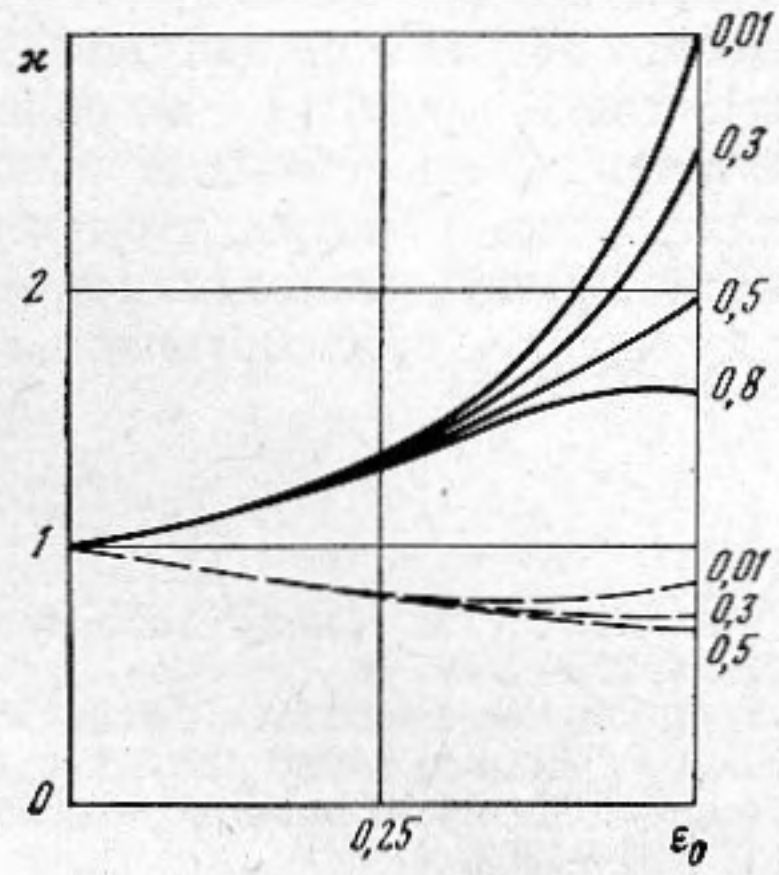
На фиг. 1, 2 приведены результаты вычислений величин $\chi=\frac{f}{f_\infty}$ и $\varkappa=\frac{\delta}{\delta_\infty}$ при различных значениях ξ, взятых из таблицы. Сплошные кривые соответ-

ствуют пульсациям пузырька у свободной поверхности, пунктирные — пульсациям у твердой поверхности. Значения $M_1=M_2=M$ являются параметрами и обозначены рядом с кривыми. Из рассмотрения кривых на фиг. 1, 2 и формул (7), (8) — (7‴), (8‴) можно сделать следующие выводы.

1. При приближении к твердой или свободной поверхности ($\varepsilon_0 \to 0{,}5$) собственная частота пузырька в маловязких жидкостях при $M \simeq 0 \div 0{,}2$ соот-

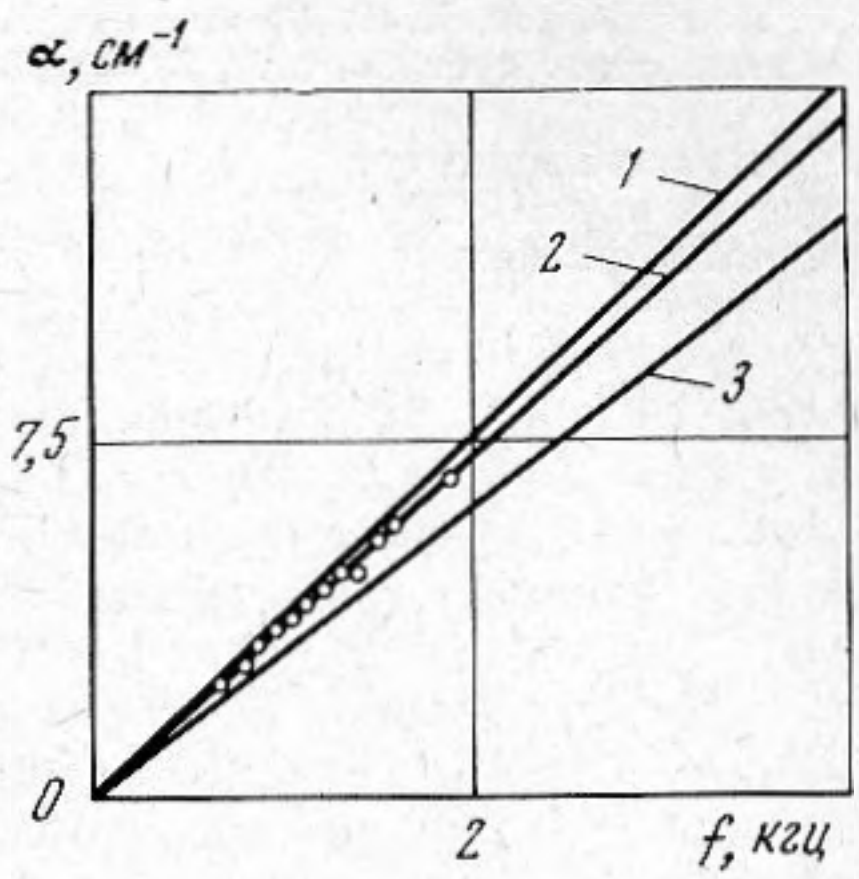


Фиг. 1



Фиг. 2

ветственно уменьшается в $\sqrt{1{,}5}$ или увеличивается в $\sqrt{2}$ раз и может быть вычислена по формуле (7′). Причиной изменения частоты f является соответственно увеличение или уменьшение присоединенной массы пузырька в жидкости, ограниченной поверхностью раздела. Отметим, что учет более высоких приближений в определении потенциала при выводе уравнений (1), (2) практически не влияет на величину резонансной частоты. Так, например, учет членов порядка ε^3 приводит к изменению f не более чем на 1,5%.



Фиг. 3

2. С увеличением вязкости при фиксированном ε_0 значение собственной частоты пузырька f уменьшается как вблизи твердой, так и вблизи свободной поверхности. При увеличении M значение f_∞ уменьшается быстрее, чем частота f, при колебаниях у твердой поверхности и медленнее, чем частота, при колебаниях у свободной поверхности, что и определяет зависимость $\chi(\varepsilon_0)$ на фиг. 1.

3. При приближении к поверхности раздела ($\varepsilon_0 \to 0{,}5$) коэффициент затухания δ уменьшается до полутора раз у твердой поверхности и возрастает до 2,5—3 раз у свободной поверхности в зависимости от величины M. Значения δ, определяемые аналитически по формуле (8′) и численным способом, хорошо согласуются между собой при $M=0 \div 0{,}3$ для пульсаций пузырька у свободной поверхности и при $M>0{,}3$ для пульсаций вблизи твердой поверхности.

4. При постоянном ε_0 значения δ с увеличением M возрастают как у твердой, так и у свободной поверхности (фиг. 2).

5. Вязкостный член в уравнении поступательного движения в рамках принятого приближения оказывает малое влияние на коэффициент затуха-

ния и собственную частоту пульсаций пузырька вблизи поверхностей раздела, за исключением области значений $M>0{,}4$ и $\varepsilon_0>0{,}4$, при которых, как следует из таблицы, $|\xi_{1,2}|>9M$.

На фиг. 3 сопоставляются зависимости $\alpha=\dfrac{1}{R_0}=F(f)$, полученные экспериментально для пульсаций пузырьков в воде при $P_0=1$ *атм*, $\varepsilon_0=0{,}5$ (обозначены точками по данным [4]) с соответствующими теоретическими зависимостями (кривая *1* — по данным [5], кривая *2* рассчитана по формуле (7), кривая *3* представляет зависимость $\alpha(f)$ при $\varepsilon_0=0$ по данным [3]).

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть использованы также для вычисления собственных частот и коэффициентов затухания пузырьков, пульсирующих вблизи других пузырьков такого же размера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Minnaert.* On musical air bubbles and the sounds of running water. Philos. Mag., 1933, *16*, 235—248.
2. *F. Smith.* On the destructive mechanical effects of the gas bubbles liberated by the passage of intence sound through a liquid. Philos. Mag., 1935, *19*, 1147—1151.
3. *G. Hougton.* Theory of bubbles pulsation and cavitytion. J. Acoust. Soc. America, 1963, *35*, 9, 1387—1393.
4. *S. D. Howkins.* Measurements of the resonant frequency of a bubble near a rigid boundary. J. Acoust. Soc. America, 1965, *37*, 3, 504—508.
5. *M. Strasberg.* The pulsation frequency of Nonspherical gas bubbles in liquids, J. Acoust. Soc. America, 1953, *25*, 3, 536—537.
6. *Г. Н. Кузнецов, И. Е. Щекин.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости. Акуст. ж., 1972, *18*, 4, 565—570.

Акустический институт
Академии наук СССР
Сухумский филиал

Поступила
14 июня 1973 г.