АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 2

УДК 534.83

О ГАШЕНИИ ЗВУКА В ВОЛНОВОДАХ АКТИВНЫМ МЕТОДОМ

М. В. Федорюк

Рассмотрена задача о гашении звуковой волны, возбужденной источником звука в волноводе, заполненном газом или жидкостью. Показано, что звуковую волну в области вне источника звука можно полностью погасить, используя приемную и излучающую поверхности, на которых непрерывно расположены монопольные и дипольные излучатели и приемники.

Рассмотрим волновод $W=\{-\infty<x<\infty\}\times D$ с идеально жесткими стенками, заполненный однородной жидкостью (или газом) с плотностью ρ и скоростью звука c. Сечение D волновода есть ограниченная область в плоскости (x, y) с гладкой границей ∂D. Рассматриваются установившиеся колебания частоты ω (зависимость от времени дается фактором $e^{-i\omega t}$). Звуковое давление $p(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}=(x, y, z)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)p(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}),\ \mathbf{r}\in W, \tag{1}$$

краевому условию

$$\partial p(\mathbf{r})/\partial n=0,\ \mathbf{r}\in\partial W \tag{2}$$

на боковой поверхности волновода, и условию погашаемости на бесконечности. Предполагается, что функция $f(\mathbf{r})$ финитна, т. е. $f(\mathbf{r})\equiv 0$, $|x|>x_0$ и что частота ω не является критической для волновода W. Функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ задачи (1), (2) (т. е. функция точечного источника, расположенного в точке $\mathbf{r}^0$) является решением задачи

$$(\Delta_r+k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}^0),\ \mathbf{r}\in W;$$

$$\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)/\partial n=0,\ \mathbf{r}\in\partial W$$

и удовлетворяет условию погашаемости.

Введем оператор Грина Γ_a, играющий основную роль в настоящей работе:

$$\Gamma_a(u)(\mathbf{r})=\iint\limits_{D_a}\left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial x'}-\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial x'}u(\mathbf{r}')\right]dy'dz'. \tag{3}$$

Здесь интеграл берется по сечению D_a, $x'=a$ волновода W и $u(\mathbf{r})$ — произвольная гладкая функция, определенная при $\mathbf{r}'\in W$ в окрестности этого сечения. $\Gamma_a(u)(\mathbf{r})$ есть звуковое поле, созданное монопольными и дипольными излучателями, непрерывно распределенными на сечении D_a с плотностями $\partial u(\mathbf{r}')/\partial x'$, $-u(\mathbf{r}')$ соответственно (оси диполей ортогональны к D_a). Основные свойства оператора Грина следующие:

1) оператор Грина линеен, т. е.

$$\Gamma_a(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)=\alpha_1\Gamma_a(u_1)+\alpha_2\Gamma_a(u_2),$$

где α_1, α_2 — постоянные;

2) поле $\Gamma_a(u)(\mathbf{r})$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца при $\mathbf{r}\in D_a$ и условию погашаемости;

3) пусть при $x>x_0$ поле $p^+(\mathbf{r})$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(4)\qquad (\Delta+k^2)p^+(\mathbf{r})=0,$$

условию (2) и условию погашаемости при $x\to+\infty$. Тогда при любом $a>x_0$

$$(5)\qquad \Gamma_a(p^+)(\mathbf{r})=p^+(\mathbf{r})\theta(x-a),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда: $\theta(x)=0$, $x<0$; $\theta(x)=1$, $x>0$.

Для доказательства разложим $p^+(\mathbf{r})$ и $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$ в ряды по нормальным (в том числе и неоднородным) модам:

$$(6)\qquad p^+(\mathbf{r})=\sum_{k_m\in\sigma^+} p_m{}^+ e^{ik_m x}\varphi_m(y,z),$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\sum_{k_m\in\sigma^+}\frac{1}{2ik_m}\exp[ik_m|x-x'|]\varphi_m(y,z)\varphi_m(y',z').$$

Здесь φ_m — решения задачи на собственные значения

$$(\Delta_{y,z}+k^2-k_m{}^2)\varphi_m(y,z)=0,\ (y,z)\in D;$$

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}=0,\qquad (y,z)\in\partial D,$$

где $\partial/\partial\nu$ — производная по внешней нормали к ∂D. Функции φ_m вещественнозначны и нормированы условием $\iint\limits_D \varphi_m{}^2 dydz=1$. Через σ^+ мы обозначили множество всех k_m, таких, что либо $k_m>0$, либо $\operatorname{Im} k_m>0$.

Применим формулу Грина к области $W_{a,b}$, т. е. в части W, заключенной между плоскостями $x=a$ и $x=b$, где $x_0<a<b$:

$$(7)\qquad \iiint\limits_{W_{a,b}}[p^+(\mathbf{r}')(\Delta_{\mathbf{r}'}+k^2)G(\mathbf{r},\mathbf{r}')-G(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\Delta_{\mathbf{r}'}+k^2)p^+(\mathbf{r}')]d\mathbf{r}'=$$

$$=\iiint\limits_{W_{a,b}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')p^+(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'=\Gamma_a(p^+)(\mathbf{r})-\Gamma_b(p^+)(\mathbf{r}),$$

так как интеграл по боковой поверхности цилиндра $W_{a,b}$ равен нулю.

Пусть $x<a$. Тогда

$$\Gamma_a(p^+)(\mathbf{r})=\sum_{k_n,k_m\in\sigma^+}\frac{k_m-k_n}{2k_m}p_m{}^+\varphi_n(y,z)\times$$

$$\times\exp[ik_n(a-x)+ik_m a]\iint\limits_{D_a}\varphi_n\varphi_m dy'dz'=0,$$

так как последний интеграл равен δ_{nm} и аналогично $\Gamma_b(p^+)(\mathbf{r})=0$. Если же $\mathbf{r}$ таково, что $a<x<b$, то $\Gamma_b(p^+)(\mathbf{r})=0$, и из (7) следует, что $\Gamma_a(p^+)(\mathbf{r})=p^+(\mathbf{r})$. Тем самым формула (5) доказана. Аналогично, если $p^-(\mathbf{r})$ есть поле, удовлетворяющее однородному уравнению Гельмгольца при $x<x_0$ и условию погашаемости при $x\to-\infty$, то при $a<x_0$

$$(5')\qquad \Gamma_a(p^-)(\mathbf{r})=-p^-(\mathbf{r})\theta(a-x).$$

Формула (5) показывает, что если на сечении D_a непрерывно распределить монопольные и дипольные излучатели с плотностями $\frac{\partial p^+}{\partial x}, -p^+$ соответственно, то она будет являться однонаправленным излучателем, так как $\Gamma_a(p^+)(\mathbf{r})=0$ при $x<a$. Такая излучающая поверхность называется поверхностью Гюйгенса (см. работы [1—3], в которых поверхность Гюйгенса рассматривалась для задач во внешности некоторого тела).

Рассмотрим теперь задачу о гашении звукового поля при $x>0$, $\mathbf{r}\in W$ от источника, расположенного в области $x\leqslant-\delta<0$, $\mathbf{r}\in W$ (т. е. в уравнении (1) функция $f(\mathbf{r})=0$ при $x>-\delta$), причем поле в области $x<0$ должно остаться неизменным. Эта задача решается с помощью приемной и излучающей поверхностей, расположенных на сечениях D_{-b}, D_0 соответственно, где $0<b<\delta$. На поверхности D_{-b} непрерывно расположены монопольные и дипольные приемники, измеряющие p и $\frac{\partial p}{\partial x}$ на D_{-b}. Приемники и излучатели предполагаются акустически прозрачными.

По известным значениям p, $\frac{\partial p}{\partial x}$ на D_{-b} находим p, $\frac{\partial p}{\partial x}$ на D_0

$$p(\mathbf{r})=\Gamma_{-b}(p)(\mathbf{r}),\ x=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma_{-b}(p)(\mathbf{r}),\quad x=0.$$

Действительно, поле $p(\mathbf{r})$ при $x>-\delta$ обладает теми же свойствами, что и поле $p^+(\mathbf{r})$, так как $f(\mathbf{r})=0$ при $x>-\delta$, и из формулы (5) следует первая из формул (8), после этого вторая формула становится очевидной.

По найденным значениям p, $\frac{\partial p}{\partial x}$ непрерывно распределяем на D_0 монопольные и дипольные излучатели с плотностями $-\frac{\partial p}{\partial x}$, p соответственно. Тогда созданное ими поле равно $-\Gamma_0(p)(\mathbf{r})$, так что суммарное поле $p^*(\mathbf{r})$ будет

$$p^*(\mathbf{r})=p(\mathbf{r})[1-\theta(x)]=\begin{cases}0, & x>0,\\ p(r), & x<0.\end{cases} \tag{9}$$

Существенно, что поле в области $x<0$ остается неизменным, так что излучатели не создают дополнительных помех приему. Кроме того, при решении этой задачи мы не использовали никакой информации о поле $p(\mathbf{r})$, за исключением лишь той, что излучатель работает на частоте ω и расположен в области $x<-\delta$.

Аналогично решается задача о гашении звукового поля от излучателя, расположенного между сечениями $x=-\delta$ и $x=\delta$ вне этой области. Для этой цели расположим две приемные и две излучающие поверхности на сечениях $x=\pm a$, $x=\pm b$ соответственно, где $\delta<a<b$. По известным значениям p, $\frac{\partial p}{\partial x}$ на сечениях $D_{\pm a}$ находим значения p, $\frac{\partial p}{\partial x}$ на сечениях $D_{\pm b}$, а затем располагаем излучатели на сечениях $D_{\pm b}$ так, чтобы они создавали поля $\pm\Gamma_{\pm b}(p)(\mathbf{r})$ соответственно. Тогда результирующее поле $p^*(\mathbf{r})$ равно

$$p^*(\mathbf{r})=p(\mathbf{r})-\Gamma_{-b}(p)(\mathbf{r})+\Gamma_b(p)(\mathbf{r})=\begin{cases}p(\mathbf{r}), & |x|<b,\\ 0, & |x|>b.\end{cases}$$

Пусть теперь имеется два источника, т. е.

$$f(\mathbf{r})=f_1(r)+f_2(\mathbf{r}),$$

где $f_i(\mathbf{r})$ — финитные функции (возможно, обобщенные), такие, что $f_1(\mathbf{r})=0$ при $x<-\delta$, $f_2(\mathbf{r})=0$ при $x>\delta>0$. Требуется погасить поле, созданное излучателем $f_1(\mathbf{r})$, в области $x>0$, причем поле в области $x<0$ должно остаться неизменным, чтобы излучатели не создавали помех приему. Для

решения этой задачи расположим приемную и излучающую поверхности на сечениях D_{-b}, D_0 соответственно, где $0<b<\delta$. Представим поле $p(\mathbf{r})$ в виде $p(\mathbf{r})=p_1(\mathbf{r})+p_2(\mathbf{r})$, где $p_j(\mathbf{r})$ — поле, созданное излучателем $f_j(\mathbf{r})$, т. е.

$$(\Delta+k^2)p_j(\mathbf{r})=f_j(\mathbf{r}),\ \mathbf{r}\in W,$$

и поля $p_j(\mathbf{r})$ удовлетворяют краевому условию (2) и условию погашаемости.

Если на D_0 расположить монопольные и дипольные излучатели так, чтобы они создавали поле $-\Gamma_a(p_1)(\mathbf{r})$, то результирующее поле будет

$$p^*(\mathbf{r})=p(\mathbf{r})-\Gamma_0(p_1)(\mathbf{r})=\begin{cases} p(\mathbf{r}), & x<0 \\ p_2(\mathbf{r}), & x>0, \end{cases} \tag{10}$$

что решает задачу. Но для этого предварительно необходимо найти p_1, $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ на сечении D_0 по известным на сечении D_{-b} значениям суммарного поля p, $\frac{\partial p}{\partial x}$ от обоих излучателей f_1, f_2. Покажем, что

$$p_1(\mathbf{r})=\Gamma_{-b}(p)(\mathbf{r}),\ x=0. \tag{11}$$

Значение $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ на сечении D_0 получается дифференцированием этой формулы по x. Тем самым поставленная нами задача будет полностью решена. Так как поле $p_1(\mathbf{r})$ обладает свойствами поля $p^+(\mathbf{r})$ в области $x>-\delta$, и так как сечение D_{-b} лежит в этой области, то, в силу формулы (5), $\Gamma_{-b}(p_1)(\mathbf{r})=p_1(\mathbf{r})\theta(x+b)$. Аналогично из формулы (5) получаем, что $\Gamma_{-b}(p_2)(\mathbf{r})=-p_2(\mathbf{r})\theta(-x+b)$, так как поле $p_2(\mathbf{r})$ обладает свойствами поля $p^-(r)$ в области $x<\delta$. Следовательно,

$$\Gamma_{-b}(p)(\mathbf{r})=\Gamma_{-b}(p_1)(\mathbf{r})+\Gamma_{-b}(p_2)(\mathbf{r})=$$

$$=p_1(\mathbf{r})\theta(x+b)-p_2(\mathbf{r})\theta(b-x)=p_1(\mathbf{r})$$

при $x>-b$, что и доказывает формулу (11). Полученные для случаев одного и двух источников решения устойчивы относительно малых ошибок в работе приемников и излучателей; это доказывается точно так же, как и в работе [3].

Пусть, наконец, скорость звука в волноводе W переменна, т. е. поле p удовлетворяет уравнению

$$[\Delta+k^2n^2(\mathbf{r})]p(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}). \tag{12}$$

Решение задачи о гашении, полученное выше без всяких изменений переносится на тот случай, когда $n^2=n^2(y, z)$, $x\geqslant l$, при некотором $l>0$ (скорость звука постоянна по трассе и переменна по сечению) и когда $n^2=n^2(x, y, z)$, $x<l$. Форма W в области $x<l$ произвольна, т. е. $W\cap\{x<l\}$ может быть конечной областью, цилиндром переменного сечения, полупространством, неодносвязной областью и т. д.

Для доказательства достаточно заменить оператор $\Delta+k^2$ оператором $\Delta+k^2n^2(\mathbf{r})$, тогда формула (7) останется в силе. Далее, при $x>l$ разложения (5) имеют место, так что $\Gamma_a(p^+)(\mathbf{r})=0$ при $a>l$, $x<a$ и потому основная формула (5) сохраняется. Более того, решение справедливо и в том случае, когда в среде имеется поглощение и стенки волновода W — импедансные и поглощающие.

Непрерывное распределение излучателей и приемников можно с любой степенью точности заменить дискретным. Однако вряд ли вопрос о необходимом (для гашения с заданной точностью) числе приемников и излучателей может быть решен без помощи ЭВМ.

Другой метод гашения (с помощью кольцевых приемников и излучателей, расположенных на стенках волновода), предложен в работе [4]. Полного гашения при этом не достигается.

Автор благодарит В. В. Тютекина за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Д. Малюжинец.* Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. XV, 124—139.
2. *M. Jessel.* Acoustique théoretique, 1973, Masson et C^le, Paris.
3. *М. В. Федорюк.* О работах Г. Д. Малюжица по теории волновых потенциалов. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. XV, 169—179.
4. *M. A. Swinbanks.* The active control of sound propagation in long ducts. J. Sound and Vibration, 1973, *27*, 3, 411—436.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
25 декабря 1973 г.