АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 3

УДК 534.222.1

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. И. Гельфгат

В предположении малости рассеяния на длину волны и масштаб неоднородностей процесс многократного рассеяния монохроматической волны в одномерной случайной среде может быть описан как стохастический процесс диффузионного типа. Плотность распределения параметров этого процесса, являющаяся функцией коэффициентов отражения и прохождения волны, удовлетворяет уравнению Колмогорова — Фоккер — Планка, роль времени в котором играет толщина рассеивающего слоя. Коэффициенты сноса и диффузии, входящие в уравнение, находятся из решения задачи рассеяния во втором приближении метода малых возмущений по величине флуктуаций параметров среды. В рассматриваемом приближении вклад в рассеяние вносят резонансные флуктуации, приводящие к взаимному перерассеянию прямой волны в обратную, и согласованные флуктуации, приводящие к случайным фазовым набегам в прямой и обратной волнах без их взаимного перерассеяния. Найдено решение уравнения Колмогорова — Фоккер — Планка, позволяющее рассчитать любые характеристики рассеянного поля, а также решить задачу о рассеянии поля точечного источника в случайно неоднородной среде.

Будем описывать распространение монохроматической волны круговой частоты ω в одномерной случайно неоднородной среде системой уравнений 1-го порядка для давления p и скорости v:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & \rho(1+\varepsilon_\beta) \\ \beta(1+\varepsilon_\beta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где ρ и β — средние плотность и сжимаемость, а ε_ρ и ε_β — случайные относительные отклонения соответственных параметров. Заменой переменных

$$\begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\beta/\rho} & -\sqrt{\beta/\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} \tag{2}$$

сведем исходную систему (1) к виду

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} = ik \begin{pmatrix} 1+\dfrac{\varepsilon_\beta+\varepsilon_\rho}{2} & \dfrac{\varepsilon_\beta-\varepsilon_\rho}{2} \\ \dfrac{\varepsilon_\rho-\varepsilon_\beta}{2} & -1-\dfrac{\varepsilon_\beta+\varepsilon_\rho}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $k=\omega\sqrt{\beta\rho}$ — волновое число в однородной среде с усредненными параметрами ρ и β, которые предполагаются постоянными. Заметим, что замена

(2) фактически связана с разбиением полного поля на поля бегущих вправо p_+ и влево p_- волн. Хотя подобные разбиения и не являются однозначными, используемому разложению можно придать четкий физический смысл.

А именно, если в данной точке неоднородной среды мы разорвем среду и вставим однородный участок с толщиной, кратной длине волны, то поле в остальных участках не изменится, а внутри вставки на ее границах поля бегущих вправо и влево волн будут совпадать с введенными выше величинами p_+ и p_-.

Введем матрицу перехода $G(x, x_0)$, связывающую поля в точках x и x_0 $(x \geqslant x_0)$ согласно соотношению

$$\begin{pmatrix} p_+(x) \\ p_-(x) \end{pmatrix} = G(x, x_0) \begin{pmatrix} p_+(x_0) \\ p_-(x_0) \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Подстановкой выражения (4) в систему (3) можно показать, что как функция первого аргумента матрица $G(x, x_0)$ удовлетворяет уравнению (3).

Введенная матрица перехода содержит всю информацию о рассеянии звука слоем, простирающимся от x_0 до x. В самом деле, если этот слой мы поместим в однородную среду и пустим на него слева волну единичной амплитуды, то соотношение (4) примет вид

$$\begin{pmatrix} D_+ \\ 0 \end{pmatrix} = G(x, x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ V_+ \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где V_+ и D_+ — коэффициенты отражения и прохождения при падении волны слева. Если же волна единичной амплитуды падает на слой справа, то равенство (4) примет вид

$$\begin{pmatrix} V_- \\ 1 \end{pmatrix} = G(x, x_0) \begin{pmatrix} 0 \\ D_- \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где V_- и D_- — коэффициенты отражения и прохождения при падении волны справа. Из соотношений (5) и (6) мы находим выражения для элементов матрицы перехода через коэффициенты отражения и прохождения:

$$G(x, x_0) = \begin{pmatrix} D_+ - V_- D_-^{-1} V_+ & V_- D_-^{-1} \\ -D_-^{-1} V_+ & D_-^{-1} \end{pmatrix} . \tag{7}$$

Подставив выражение (7) в уравнение (3), которому удовлетворяет матрица перехода, можно получить систему дифференциальных уравнений для коэффициентов отражения и прохождения.

Заметим, что у матрицы G не все элементы независимы. В самом деле, принцип взаимности приводит к равенству $D_+ = D_-$, а условие отсутствия потерь (а мы ограничимся только этим случаем) приводит еще к двум соотношениям: $|V_+|^2 + |D_+|^2 = 1$ и $V_+/D_+ = -(V_-/D_-)^*$ [1]. В качестве независимых параметров удобно выбрать следующие: $\varphi = \arg V_- - 2k(x - x_0)$ — флуктуационная фаза коэффициента отражения, $\psi = \arg D_- - k(x - x_0)$ — флуктуационная фаза коэффициента прохождения, $u = \dfrac{1 + |V|^2}{|D|^2}$ — отношение энергии на входе в неоднородный слой к энергии на выходе слоя. Удобство этих параметров состоит в том, что дифференциальные уравнения для коэффициентов отражения и прохождения в переменных u, φ, ψ

принимают вид уравнений с правыми частями, пропорциональными малым флуктуациям ε_ρ и ε_β:

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dx}=k(\varepsilon_\beta-\varepsilon_\rho)\sqrt{u^2-1}\sin(\varphi+2k(x-x_0)),\\
&\frac{d\varphi}{dx}=k\left[\varepsilon_\beta+\varepsilon_\rho+(\varepsilon_\beta-\varepsilon_\rho)\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\cos(\varphi+2k(x-x_0))\right],\\
&\frac{d\psi}{dx}=\frac{k}{2}\left[\varepsilon_\beta+\varepsilon_\rho+(\varepsilon_\beta-\varepsilon_\rho)\frac{u-1}{\sqrt{u^2-1}}\cos(\varphi+2k(x-x_0))\right].
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Будем далее предполагать малость рассеяния на интервалах порядка длины волны и масштаба неоднородностей. В этом случае от стохастических уравнений (8) можно перейти к диффузионному уравнению Колмогорова — Фоккер — Планка для переходной плотности вероятности $W(u, \varphi, \psi, x)$. Коэффициенты сноса и диффузии находятся из решения уравнений (8) во втором порядке теории возмущений по флуктуациям, причем усреднение проводится по физически малому интервалу, содержащему, однако, много длин волн и масштабов неоднородностей. В указанном диффузионном приближении уравнение Колмогорова — Фоккер — Планка имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x}=\sigma_1^2\Big\{&\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial}{\partial u}+\frac{u^2}{u^2-1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{4}\frac{u-1}{u+1}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}+\\
&+\frac{u}{u+1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\,\partial\psi}\Big\}W+\sigma_2^2\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}\right\}^2W+\\
&+\tilde{\sigma}_1^2\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}\right\}W,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1^2=\frac{k^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}dx\cos 2kx\,[B_{\beta\beta}(x)-2B_{\beta\rho}(x)+B_{\rho\rho}(x)],\\
&\sigma_2^2=\frac{k^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx[B_{\beta\beta}(x)+2B_{\beta\rho}(x)+B_{\rho\rho}(x)],\\
&\tilde{\sigma}_1^2=\frac{k^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}dx\sin 2k|x|\,[B_{\beta\beta}(x)-2B_{\beta\rho}(x)+2B_{\rho\rho}(x)],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

а $B_{\beta\beta}(x)$, $B_{\rho\rho}(x)$ и $B_{\beta\rho}(x)$ — соответствующие автокорреляционные и взаимно-корреляционная функции.

Частные случаи уравнения (9) были получены ранее в работах [2—4]. В указанных работах выводились уравнения для двумерной плотности вероятности $W(u, \varphi; x)$, что не позволяло находить средние характеристики поля внутри рассеивающего слоя, а также решать задачу о точечном источнике в слое или задачу о влиянии рассеяния на отражение. В работе [5] было получено уравнение (9) для случая $\rho=\text{const}$.

Отметим, что разбиение правой части уравнения (9) на три слагаемых соответствует физической картине рассеяния. Первое и третье слагаемые соответствуют вкладу резонансных (т. е. с пространственным волновым вектором $2k$) флуктуаций в рассеяние. Этот вклад отсутствует, если нет

резонансных флуктуаций либо они есть, но волновое сопротивление среды постоянно ($\varepsilon_\beta=\varepsilon_\rho$, т. е. $\sqrt{\rho/\beta}=\mathrm{const}$). В этих случаях отсутствует отраженная назад волна и решение уравнения (9) дает диффузию фазы коэффициента прохождения, т. е. результат, соответствующий параболическому уравнению для полного поля. Если же $\sigma_2^2=0$, то эффект рассеяния полностью обусловлен резонансным отражением: волна с волновым вектором k, рассеиваясь на флуктуациях с волновым вектором $2k$, переходит в волну, бегущую назад с волновым вектором k; последняя, в свою очередь, рассеиваясь на тех же резонансных флуктуациях, переходит вновь в волну, бегущую в исходном направлении с волновым вектором k. Именно этим резонансным рассеянием объясняется близкий к экспоненциальному характер зависимости от толщины рассеивающего слоя отраженной энергии [2, 6]. Отметим, что и в неодномерном случае именно резонансное рассеяние приводит к росту пропорционально рассеивающему объему рассеянной энергии, получаемому в борновском приближении [7, 8]. Аналогичный эффект можно отметить и в задаче рассеяния плоской волны на неровной поверхности [9]. Во всех этих случаях коэффициентом пропорциональности служит величина спектральной плотности резонансных флуктуаций, что непосредственным образом указывает на резонансный характер расходимости с ростом объема соответствующих рядов теории возмущений. Отметим, что достаточно большое затухание в среде может подавить резонансное рассеяние (сдвиг резонанса в комплексную область); видимо в связи с этим становятся применимыми либо обычные методы теории возмущений, либо диаграммные методы [10].

Возвращаясь к одномерной задаче, заметим, что часто используемое предположение о дельта-корреляции флуктуаций маскирует указанное выше различие между рассеянием на резонансных и нерезонансных флуктуациях, поскольку у дельта-коррелированных флуктуаций спектральная плотность постоянна.

Обсудив качественный характер решения уравнения (9), напишем в явном виде решение для нулевых начальных условий *

$$W(u,\varphi,\psi;x_0)=\delta(u-1)\delta(\varphi)\delta(\psi):$$

$$W(u,\varphi,\psi;x)=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,y\,\mathrm{th}\,\pi(y+ie_n)\times \tag{11}$$

$$\times\mathscr{P}^{-1/2+iy}_{n/2,\,n/2}(u)\exp\left\{in\psi-(x-x_0)\left[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\frac{n^2}{4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_1^2\left(\frac{1}{4}+y^2\right)-in\bar{\sigma}_1^2\right]\right\},$$

где $\mathscr{P}^z_{m,n}(u)$ — функции Якоби [11], а $e_{2m+1}=1/2$, $e_{2m}=0$.

Явный вид плотности распределения (11) позволяет свести к квадратурам нахождения любых средних характеристик рассеивающего слоя, а также позволяет найти средние характеристики поля точечного источника в рассеивающей среде (способ нахождения изложен в работе [1] для дискретных рассеивателей).

Отметим, что из вида решения (11) следует, что фаза коэффициента отражения независима от остальных параметров и распределена равномер-

* Можно доказать, что решение уравнения (9) для ненулевых начальных условий $W(u,\varphi,\psi;x_0)=\delta(u-u_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(\psi-\psi_0)$ выражается простым способом через функцию (11). Доказательство основано на правой инвариантности уравнений (3) и [9], т. е. на неизменности вида уравнений при замене G на GG_0, где G_0 — постоянная матрица [11]. Отказ от подобной групповой трактовки осложнил авторам работ [3, 4] получение решений соответственных уравнений Колмогорова — Фоккер — Планка.

но на $(0,2\pi)$, но остальные параметры статистически связаны. Можно, однако, показать, что с ростом толщины рассеивающего слоя статистическая связь между модулем и фазой коэффициента прохождения ослабевает, причем распределение фазы коэффициента прохождения стремится к равномерному, а распределение модуля сближается с логонормальным.

На подобное асимптотическое поведение было ранее указано в работе [12], но в этой работе доказывалась лишь близость распределений по вариации. Однако практический интерес представляют асимптотические выражения для различных физических величин, как-то: среднее поле, средняя плотность энергии, средний уровень и т. п. Из сближения распределений по вариации нельзя сделать определенного вывода об асимптотическом поведении этих величин. Для такого вывода следовало бы доказать слабую сходимость распределений, которой, однако, нет. Именно поэтому представляет интерес явный вид распределения (11), из которого известными асимптотическими методами можно выявить поведение различных средних характеристик рассеянного поля при росте размеров рассеивающего объема.

Не приводя явных, довольно громоздких аналитических выражений для средних характеристик поля точечного источника в рассеивающей среде, отметим, что они аналогичны полученным ранее выражениям для случая рассеяния волны в среде со слабыми дискретными рассеивателями [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гельфгат.* Поле точечного источника в случайно неоднородной среде. Одномерная задача. Акуст. ж., 1972, *18*, 1, 31–41.
2. *М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев.* Волноводы со случайными неоднородностями и броуновское движение в плоскости Лобачевского. Теория вероятностей и ее применения, 1959, *4*, 4, 424–432.
3. *В. И. Беспалов.* О статистических характеристиках коэффициента отражения волны в случайно неоднородных линиях передачи. Изв. вузов. Радиофизика, 1959, *2*, 5, 711–719.
4. *Ю. А. Рыжов.* К теории распространения волн в одномерной случайно неоднородной среде. Препринт НИРФИ № 25, Горький, 1972.
5. *W. Kohler, G. C. Papanicolaou.* Power statistics for wave propagation in one dimension and comparison with radiative transport theory. J. Math. and Phys., 1973, *14*, 12, 1733–1745.
6. *Ю. Л. Газарян.* Об одномерной задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями. ЖЭТФ, 1969, *56*, 6, 1856–1871.
7. *Л. А. Чернов.* Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., Изд-во АН СССР, 1958.
8. *В. И. Татарский.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
9. *Ф. Г. Басс, И. М. Фукс.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М., «Наука», 1972.
10. *С. А. Рыбак.* Взаимодействие волн в случайно неоднородных структурах. Докт. дис. Акуст. ин-т АН СССР, М., 1973.
11. *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
12. *В. Н. Тутубалин.* Сближение вероятностных мер по вариации и произведения случайных матриц. Теория вероятностей и ее применения, 1968, *13*, 1, 19—32.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
30 мая 1974 г.